

**UNE INTRODUCTION À LA TOPOLOGIE :
GRAPHES, SURFACES ET NOEUDS.**

Yves Colin de Verdière

INSTITUT FOURIER, BP 74, F-38402-ST MARTIN D'HÈRES CEDEX
E-mail address: yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr

1991 *Mathematics Subject Classification.*

Key words and phrases.

Table des matières

PRÉFACE	5
Chapitre 1. TOPOLOGIE GÉNÉRALE	7
1. Introduction	7
2. Les axiomes	7
3. Invariants	8
4. Connexité	9
5. Compacité	9
6. Espaces métriques	10
7. Ensemble de Cantor et courbe de Péano	11
8. Théorème de d'Alembert	11
9. Théorème de point fixe	12
Chapitre 2. GRAPHERS et COMPLEXES SIMPLICIAUX	13
1. Introduction	13
2. Graphes	13
3. Cycles d'un graphe	14
4. Topologie	16
5. Nombres chromatiques	17
6. Arbres maximaux et complexité	18
7. Dimères	19
8. Complexes simpliciaux	19
Chapitre 3. SURFACES	23
1. Introduction	23
2. La notion de surface selon Riemann	23
3. Triangulations	25
4. Caractéristique d'Euler-Poincaré	26
5. Géométrie des polyèdres de dimension 2	27
6. Classification des surfaces	28
7. Degré	31
8. La courbure des surfaces : le point de vue des surfaces de l'espace à 3 dimensions	32
9. La courbure des surfaces : le point de vue des connections	34
10. La formule de Gauß-Bonnet	39
11. Singularités des champs de vecteurs	41
12. Théorie de Morse	43
Chapitre 4. NOEUDS	45
1. Il y a une mathématique des noeuds	45

2.	Représentation planaire et codage des noeuds	47
3.	Mouvements de Reidemeister	49
4.	Un exemple : le 3-coloriage d'un diagramme de noeud	51
5.	Nombre d'entrelacement de 2 noeuds : combinatoire	52
6.	Formule de Gauss	52
7.	Auto-entrelacement d'un ruban et formule de White	53
8.	Le polynôme de Jones	55
9.	Propriétés du polynôme de Jones	56
10.	Exemples	57
11.	Lien avec la mécanique statistique	58
12.	La formule de Witten	61
13.	Les invariants de Vassiliev	62
14.	Problème d'examen	67
Chapitre 5. GEOMETRIE HYPERBOLIQUE		69
1.	Introduction	69
2.	Le demi-plan de Poincaré et son homogénéité	69
3.	Description de G	70
4.	La distance et les géodésiques	71
5.	Birapport	72
6.	Classification des déplacements	74
7.	Angles et triangles ; aire	74
8.	La courbure	77
9.	La géométrie euclidienne comme limite de géométries hyperboliques	79
10.	Pavages hyperboliques	79
11.	Applications de la géométrie hyperbolique	80
Chapitre 6. LES FORMES DIFFÉRENTIELLES		83
1.	Motivations	83
2.	Formes différentielles dans \mathbb{R}^n	83
3.	Exemples tirés de la physique	85
4.	Produit extérieur	85
5.	Produit intérieur	85
6.	Changement de variables	85
7.	Cobord ou différentielle extérieure	86
8.	Dérivée de Lie et homotopies : lemme de Poincaré	86
9.	Formes sur les variétés	87
10.	Intégrales	87
11.	Cohomologie de de Rham	87
12.	Opérateur \star de Hodge et dualité de Poincaré	88
13.	Théorie du degré	88
14.	Fibrés vectoriels et connections	88
15.	Les équations de Maxwell revisitées	90
16.	Théorie de Morse : l'approche de Witten	91
17.	Connection de Levi-Civita des surfaces	91
18.	Courbure des surfaces	91
19.	Formules de Gauss-Bonnet	91

PRÉFACE

Le contenu de ce texte correspond à des cours donnés dans le cadre du magistère de physique de Grenoble. Il s'agit d'une option d'ouverture proposée aux étudiants de 3ème année. L'ambition n'est pas celle que l'on peut avoir pour des étudiants d'un cursus de mathématiques pour qui l'acquisition d'outils est importante.

Cela rend possible un style assez peu formel où l'on souhaite moins donner des preuves complètes que de faire comprendre de façon intuitive les objets présentés, de les voir et de se les approprier. Ce style est facile (et agréable) à avoir pour un cours oral, il est plus difficile à maintenir dans une rédaction écrite qui garde une apparence plus formelle. J'ai voulu le tenter...

Les thèmes choisis sont les graphes (avec l'accent mis sur leur topologie et l'espace des cycles : il est intéressant d'avoir entre les mains un espace vectoriel non trivial et d'en choisir des bases), les surfaces (leur classification, la caractéristique d'Euler), et enfin les noeuds sous l'aspect diagramme (planaire) des noeuds. Le cours culmine avec la présentation combinatoire du polynôme de Jones et l'introduction d'un *calcul des diagrammes*. Un premier chapitre donne le vocabulaire de la topologie générale ainsi que quelques résultats : courbes de Péano, théorème de d'Alembert-Gauss, théorème de point fixe de Brower. J'ai souhaité inclure un chapitre d'introduction à la géométrie hyperbolique ainsi qu'un chapitre donnant le formalisme des formes différentielles qui ne fait pas encore partie du bagage standard des physiciens malgré ses grands avantages.

Je remercie les auditeurs de ce cours pour leurs questions et remarques. Je les remercie aussi pour leur fidélité et leur enthousiasme ! Merci aussi à Roland Bacher qui a relu le premier jet bourré d'imprécisions et de sous-entendus malencontreux.

TOPOLOGIE GÉNÉRALE

1. Introduction

La topologie est la *science des formes* par opposition à la géométrie qui est la science des grandeurs. Il est remarquable qu'on ait pu dégager une axiomatique générale pour la topologie qui recouvre bien notre intuition et qui soit satisfaisante du point de vue mathématique. Ainsi qu'on le verra, cette axiomatique induit un vocabulaire d'apparence assez formel, mais donnant lieu à une mathématique riche et non triviale. La topologie est aujourd'hui une science extrêmement vivante et connectée aux domaines voisins des mathématiques comme la théorie des fonctions ou la géométrie différentielle.

Le but de ce chapitre est de fournir *l'axiomatique* de la topologie générale, puis de montrer quelques pathologies (notion de dimension et courbe de Péano) et enfin des applications simples de la topologie aux équations non-linéaires.

2. Les axiomes

DÉFINITION 1.1. *Un espace topologique est la donnée d'une ensemble X et d'un sous-ensemble \mathcal{O} de l'ensemble de toutes les parties de X . Une partie $U \subset X$ telle que $U \in \mathcal{O}$ sera dite ouverte. Les axiomes sont les suivants:*

(O_1) \emptyset et X sont ouverts.

(O_2) Si $U, V \in \mathcal{O}$, $U \cap V \in \mathcal{O}$.

(O_3) Si $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille d'ouverts $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{O}$.

Les espaces topologiques que l'on va utiliser dans ce cours seront de Hausdorff ou séparés : 2 points distincts sont contenus dans des ouverts disjoints.

L'idée intuitive est la suivante : la propriété (P) d'un point de X définie par l'appartenance à U est stable par petite perturbation si et seulement si U est un ouvert. Ici *petit* est en sens qualitatif et non quantitatif : en topologie, on ne s'occupe pas des grandeurs, mais des formes.

Exemples :

- Topologie de \mathbb{R} : les ouverts sont les réunions d'intervalles ouverts (i.e. de la forme $]a, b[$).
- Topologies produits : si X et Y sont 2 espaces topologiques, les ouverts de $X \times Y$ sont les réunions de produits d'ouverts.
- Sous-espaces : si $Y \subset X$, les ouverts de Y sont les $O \cap Y$ avec O ouvert de X .
- Sous-ensembles de \mathbb{R}^n : ce qui précède permet de les munir d'une topologie naturelle.

DÉFINITION 1.2. *Si X et Y sont 2 espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ est continue si $\forall V \subset Y$ ouvert de Y , $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ est un ouvert de X .*

On dit que X et Y sont homéomorphes s'il existe une bijection f de X sur Y qui est continue et dont l'inverse est continue.

Deux espaces topologiques homéomorphes sont indiscernables par un topologue, mais le sont en général par un géomètre qui s'intéresse à des structures plus fines (angles, distances, aires).

Les intervalles $]0, 1[$ et \mathbb{R} sont homéomorphes. Le carré plein et le disque sont homéomorphes.

DÉFINITION 1.3. $f, g : X \rightarrow Y$ sont dites homotopes si il existe $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, continue, telle que $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$.

On dira que X et Y sont homotopiquement équivalents s'il existe $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ continues telles $f \circ g$ soit homotope à Id_Y et $g \circ f$ à Id_X .

Montrons par exemple que la réunion X du cercle Y de centre O et de rayon 1 et du segment $Z = [1, 2]$ de Ox a la même type d'homotopie que le cercle Y . Soit $f : X \rightarrow Y$ définie par $f(Z) = 1 \in Ox$ et f est l'identité sur Y et g est l'injection évidente de Y dans X . $f \circ g$ est l'identité de Y . $g \circ f$ est la projection de X sur Y qui est l'identité sur Y et envoie Z sur $1 \in Ox$. On définit $F(t, x) = x$ si $x \in Y$ et $F(t, x) = 1 + t(x - 1) \in Ox$ si $x \in Z$. On vérifie la continuité de F .

Il est souvent beaucoup plus difficile de montrer que 2 espaces ne sont pas homéomorphes ou n'ont pas le même type d'homotopie.

Exercices : 1) Parmi les lettres majuscules de l'alphabet

A, B, C, D, \dots

lesquelles sont homéomorphes ? Lesquelles ont le même type d'homotopie ?

2) Montrer que le disque et le carré (pleins) sont homéomorphes.

3) Montrer que le cercle S^1 et le plan privé d'un point ont même type d'homotopie ; même question pour le 8 et le plan privé de 2 points.

4) Montrer que la sphère de \mathbb{R}^3 privée d'un point est homéomorphe au plan.

3. Invariants

Le topologue s'intéresse, entre autres, à classer les espaces topologiques. Il doit se restreindre à des familles d'espaces raisonnables comme les complexes simpliciaux ou les variétés.

Un *invariant topologique* défini sur une famille \mathcal{F} d'espaces topologiques est une application $X \rightarrow I(X)$ qui, à tout élément X de \mathcal{F} , associe un objet mathématique (un groupe, un entier, ...) de façon que si X est homéomorphe à Y , $I(X) = I(Y)$. Un invariant est dit *complet* si $I(X) = I(Y)$ implique que X est homéomorphe à Y .

De même, un *invariant homotopique* vérifie que $I(X) = I(Y)$ dès que X et Y ont même type d'homotopie.

Par exemple, la caractéristique d'Euler-Poincaré est un invariant homotopique des graphes et des variétés. C'est un invariant homotopique complet des graphes connexes.

Les variétés admettent plein d'invariants topologiques : leur dimension, l'orientabilité, les nombres de Betti, les groupes d'homotopies. Ces derniers sont aussi des invariants homotopiques, sauf la dimension (le plan et la droite ont même type d'homotopie).

Remonter de l'équivalence d'homotopie à l'équivalence topologique est parfois difficile. La *conjecture de Poincaré* est :

si une variété compacte de dimension d à le type d'homotopie de la sphère de dimension d , elle lui est homéomorphe.

On sait la prouver en toutes dimensions, sauf 3. Cela a valu la médaille Fields à S. Smale (dimension ≥ 5) et à M. Freedman (dimension 4). G. Perelman a donné, début 2003, une preuve en dimension 3 qui a résisté jusqu'à aujourd'hui aux critiques des spécialistes.

4. Connexité

On souhaite donner un sens précis à la propriété être d'un seul tenant, on dira d'un espace topologique qu'il est ou n'est pas *connexe*.

DÉFINITION 1.4. *Un espace topologique X est connexe s'il n'existe pas 2 ouverts U et V disjoints non vides dont la réunion est X .*

On a le théorème des valeurs intermédiaires : si X est connexe et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, l'image $f(X)$ est un intervalle. Réciproquement, si cette condition est satisfaite pour toute f , X est connexe. Donc, tout intervalle de \mathbb{R} est connexe (c'est le théorème des valeurs intermédiaires usuel). Réciproquement, les parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

Exemple : tout intervalle de \mathbb{R} est connexe, le cercle n'est pas homéomorphe à l'intervalle, car le cercle privé d'un point est connexe et pas l'intervalle privé d'un point intérieur.

Souvent, on prouve une propriété plus forte que la connexité, appelée *connexité par arcs*.

DÉFINITION 1.5. *Un chemin dans X est une application continue de $[0, 1]$ dans X . L'espace X est connexe par arcs si 2 points quelconques $a, b \in X$ peuvent être joints par un chemin dans X .*

5. Compacité

Il s'agit d'une propriété importante qui remplace la finitude d'un ensemble.

DÉFINITION 1.6. *Un espace topologique K est dit compact s'il a les propriétés suivantes :*

i) il est séparé (pour toute paire de points a, b de K , il existe des ouverts disjoints U et V tels que $a \in U$ et $b \in V$).

ii) Si on a $K = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ où les U_α sont tous ouverts, il existe une partie finie $B \subset A$ telle que $K = \cup_{\alpha \in B} U_\alpha$.

Si K est compact et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continue, f est bornée (il existe M tel que $\forall x \in K, |f(x)| \leq M$) et f atteint son sup et son inf.

Les compacts de \mathbb{R}^n sont les parties fermées bornées. Un produit de compact est compact.

On a le

THÉORÈME 1.1. *L'image d'un compact par une application continue est compact.*

COROLLAIRE 1.1. *Si $f : X \rightarrow Y$ est continue bijective et X compact, f est un homéomorphisme.*

Exercice : donner des exemples d'applications continues bijectives qui ne soient pas des homéomorphismes.

Un espace topologique peut s'écrire de façon unique comme la réunion d'une famille de sous-espaces connexes disjoints, appelés *composantes connexes* de X . Leur nombre est un invariant homotopique.

6. Espaces métriques

DÉFINITION 1.7. Une distance d sur un espace X est une application $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$ telle que :

- (D₁) $d(x, y) = 0$ équivaut à $x = y$.
- (D₂) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (D₃) L'inégalité triangulaire est satisfaite :

$$\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) .$$

DÉFINITION 1.8. Un espace métrique est un couple (X, d) où d est une distance sur X .

Un espace métrique est muni d'une topologie dont les ouverts sont les $U \subset X$ tels que

$$\forall x \in U, \exists a > 0, B(x, a) \subset U .$$

Se donner une métrique est un moyen simple de se donner une topologie. Il faut faire attention que toutes les topologies ne sont pas associées à des métriques, mais surtout, que des distances différentes peuvent donner la même topologie : par exemple d et $\inf(d, 1)$ ou les distances euclidiennes sur un espace vectoriel de dimension finie.

Exemples :

- Distance euclidienne sur \mathbb{R}^n
- Distance sur

$$(1) \quad K = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)\} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

avec $\varepsilon_i = 0$ ou 1 .

$$d(\varepsilon, \varepsilon') = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\varepsilon_i - \varepsilon'_i|}{2^i} .$$

- Espaces fonctionnels : ils n'ont pas en général de topologie canonique. Par exemple, l'espace des applications de classe C^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} peut être muni de la topologie de la convergence uniforme définie par $d_0(f, g) = \sum |f(x) - g(x)|$, de la topologie C^1 définie par $d_1(f, g) = d_0(f, g) + d_0(f', g')$, de la topologie de convergence en moyenne définie par $d_m(f, g) = \int_0^1 |f - g|(t) dt$ ou en moyenne quadratique $d_q(f, g) = \sqrt{\int_0^1 |f - g|^2 dt}$. Montrer que ces différentes métriques donnent des topologies différentes est un exercice.

Lorsqu'on a affaire à des espaces métriques, la continuité peut être testée avec les $\varepsilon - \alpha$ de Cauchy : $f : X \rightarrow Y$ est continue si $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\forall y$ tel que $d(x, y) \leq \alpha$, on a $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.

7. Ensemble de Cantor et courbe de Péano

La topologie générale présente des pathologies peu intuitives. Un exemple est la courbe de Peano qui est une application continue surjective de $I = [0, 1]$ sur le cube $[0, 1]^2$.

Soit K l'espace métrique défini par (1) de la section précédente.

Fait 1 : K est homéomorphe à $K \times K$. Soit $D(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \varepsilon_3, \dots)(\varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots)$. D est l'homéomorphisme cherché.

Fait 2 : K est homéomorphe à l'ensemble de Cantor C de $[0, 1]$ dont le complémentaire est ouvert. $h : K \rightarrow I$ définie par

$$h(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_i}{3^i}$$

est l'application cherchée.

Fait 3 : il existe une application continue surjective φ de K (ou C) sur $[0, 1]$. $\varphi(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^i}$ est continue et surjective (développement dyadique).

Fait 4 : toute application continue k de C dans un convexe A de \mathbb{R}^n se prolonge une application continue de $[0, 1]$ dans A . Si $]\alpha, \beta[$ est un intervalle maximal du complémentaire, on définit

$$k(t\alpha + (1-t)\beta) = tk(\alpha) + (1-t)k(\beta).$$

Soit alors $J : C \rightarrow K \times K$ un homéomorphisme et $F : C \rightarrow [0, 1]^2$ définie par $G(t) = F \circ J$. Un prolongement de G à l'intervalle I fait l'affaire.

8. Théorème de d'Alembert

THÉORÈME 1.2. (d'Alembert-Gauss) Soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ un polynôme à coefficients complexes, alors P a un zéro complexe : il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) = 0$.

Preuve.—

Raisonnons par l'absurde : si P n'a pas de zéros, on peut définir pour $t \geq 0$, une application $f_t : S^1 \rightarrow S^1$ par :

$$f_t(e^{i\theta}) = \frac{P(te^{i\theta})}{|P(te^{i\theta})|}.$$

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, f_t converge uniformément vers $f_\infty(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$. On a ainsi fabriqué une homotopie entre $f_0 = Cte$ et f_∞ . Pour montrer que les deux applications ne sont pas homotopes, on introduit un *invariant* des applications continues de S^1 dans S^1 : le degré $d(f)$. Sans donner la construction précise, disons que $d(f)$ est un entier ($d(f) \in \mathbb{Z}$) qui mesure le nombre de tours que fait $f(e^{i\theta})$ lorsque $e^{i\theta}$ fait un tour de S^1 dans le sens trigonométrique. Autrement dit, si $f(e^{i\theta}) = e^{iF(\theta)}$ où $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, $d(f) = F(2\pi) - F(0)$. Il suffit maintenant de savoir que $d(f_0) = 0$, $d(f_\infty) = n$ et que $t \rightarrow d(f_t)$ est continue pour arriver à une contradiction.

□

9. Théorème de point fixe

THÉORÈME 1.3. Soit $f : B \rightarrow B$ continue où B est la boule de \mathbb{R}^n définie par :

$$B = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum x_i^2 \leq 1\} .$$

Alors f admet au moins un point fixe, ie il existe x_0 tel que $f(x_0) = x_0$.

Preuve.—

On va construire à partir d'un $f : D \rightarrow D$ sans points fixes une équivalence d'homotopie entre D et ∂D . Soit D_x la demi-droite de \mathbb{R}^n d'origine $f(x)$ et passant par x .

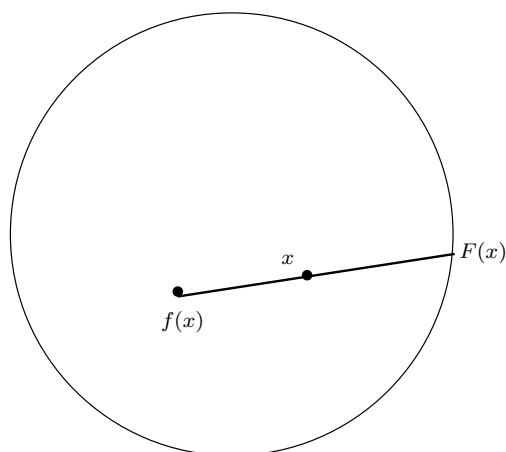


FIGURE 1. $f(x)$ et $F(x)$

D_x recoupe ∂D en un point $F(x)$. On vérifie que $x \rightarrow F(x)$ est une application continue de D dans ∂D qui vérifie $f(y) = y$ si $y \in \partial D$. Vérifions que F est une équivalence d'homotopie. Soit $G : \partial D \rightarrow D$ l'injection. $F \circ G = Id_{\partial D}$ alors que $G \circ F$ est l'application F vue comme une application de D dans D . On pose $F_t = tx + (1-t)F(x)$ qui est une application de D dans D pour $0 \leq t \leq 1$ (convexité de D) et $F_0 = F$, $F_1 = Id_D$. Maintenant il faut un invariant topologique stable par équivalence d'homotopie.

C'est facile dans le cas $n = 1$: le bord de l'intervalle $[-1, +1]$ n'est pas connexe, alors que l'intervalle l'est.

Dans le cas $n = 2$, le disque est simplement connexe (toute courbe fermée est homotope à une courbe constante) alors que le cercle ne l'est pas (théorie du degré vue à la section précédente).

En général, le nombre de Betti b_{n-1} fait l'affaire $b_{n-1}(D) = 0$, $b_{n-1}(\partial D) = 1$.

□

GRAPHES et COMPLEXES SIMPLICIAUX

1. Introduction

La topologie algébrique a pour but d'associer aux espaces topologiques des invariants algébriques permettant de les comparer. Les graphes fournissent le cadre le plus simple pour faire cela. À la donnée combinatoire d'un graphe G correspond un espace topologique \bar{G} . À partir de l'étude des courants électriques sur un graphe, on introduit l'invariant algébrique fondamental, le 1er nombre de Betti ou dimension de l'espace des cycles. On pourra consulter [BLW76] pour les articles originaux de Kirchoff et de ses successeurs. Il existe de nombreuses monographies sur les graphes, par exemple les livres [Ber67], [Big74]. Cette étude topologique des graphes est suivie de calculs de déterminants : la complexité d'un graphe est le nombre d'arbres maximaux de ce graphe ; elle se calcule au moyen d'un déterminant. Si G est un graphe planaire, un autre déterminant permet de calculer le nombre de recouvrements par des dimères, c'est la célèbre formule de Kasteleyn.

Les graphes sont les complexes simpliciaux de dimension 1. On introduit les complexes simpliciaux de dimension quelconque, puis leur cohomologie. La théorie de Hodge est présentée dans ce contexte élémentaire. La caractéristique d'Euler aussi, ainsi que les inégalités de type "Morse".

2. Graphes

DÉFINITION 2.1. *Un graphe (fini) $G = (V, E)$ est la donnée de 2 ensembles finis V l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes où E est un sous-ensemble de $\mathcal{P}_2(V)$, ensemble des parties à 2 éléments de V .*

On note souvent $V = \{1, \dots, N\}$ et $\{i, j\}$ l'arête qui joint les 2 sommets i et j .

On note $v = N$ le nombre de sommets et e le nombre d'arêtes.

Si v est un sommet, on note $d(v)$ et on appelle valence ou degré de v le nombre d'arêtes issues de v .

Les exemples classiques sont :

- Le *graphe complet* à N sommets noté K_N : V est un ensemble à N éléments et toutes les paires $\{i, j\}$ sont des arêtes.
- *Les arbres* : un arbre est un graphe qui peut être construit ainsi. On se donne une partition $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_n$ de l'ensemble des sommets. On suppose que V_0 est constitué d'un seul sommet appelé la *racine*. On suppose de plus que toutes les arêtes joignent un élément de V_i à un élément de V_{i+1} et que chaque élément de V_i avec $i \geq 1$ est joint à un unique élément de V_{i-1} appelé son *père*. On voit ainsi que $v = e + 1$.

Les arbres généalogiques sont des exemples.

- Le 1-squelette d'un polyèdre : les sommets et arêtes sont ceux du polyèdre.

On associe au graphe G un espace topologique \bar{G} qui peut être construit comme le sous-ensemble de \mathbb{R}^V qui est réunion des segments $[e_i, e_j]$ pour les $\{i, j\} \in E$, où e_i désigne la base canonique de \mathbb{R}^V . Autrement dit \bar{G} s'obtient en recollant e segments par leur extrémité en suivant le schéma donné par la combinatoire.

Un graphe est dit *planaire* si \bar{G} peut se réaliser comme un sous-espace topologique du plan ou de la sphère S^2 . Par exemple, K_4 est planaire, alors que K_5 ne l'est pas. Le graphe $K_{3,3}$ dont les 6 sommets sont les éléments de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et les arêtes données par $\{i, j\}$ tel que $i - j$ est impair, n'est pas non plus planaire.

3. Cycles d'un graphe

A un graphe $G = (V, E)$, on associe les espaces \mathbb{R}^V des 0-chainnes et $\mathbb{R}^{\bar{E}}$ des 1-chainnes. Ici \bar{E} est l'ensemble des arêtes munies d'une orientation : chaque arête $\{i, j\}$ admet 2 orientations notées (i, j) et (j, i) . Orienter le graphe consiste à choisir une orientation de chaque arête.

L'espace \mathbb{R}^V peut être interprété comme l'espace des *potentiels* et $\mathbb{R}^{\bar{E}}$ comme celui des *courants*.

On a un opérateur $d : \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{E}}$ défini par :

$$df((i, j)) = f(j) - f(i) ,$$

et son adjoint ∂ (bord) donné par

$$\partial g(i) = \sum_{(j,i) \in \bar{E}} g((j,i)) - \sum_{(i,k) \in \bar{E}} g((i,k)) .$$

Donc $\partial g(i)$ est la somme des courants qui arrivent au sommet i . Si on a choisi une orientation et les bases canoniques correspondantes de \mathbb{R}^V et $\mathbb{R}^{\bar{E}}$, la matrice de d s'appelle *matrice d'incidence* de G .

DÉFINITION 2.2. Les nombres de Betti de G sont $b_0(G) := \dim \ker d$ et $b_1(G) := \text{codim} d(\mathbb{R}^V) = \dim \ker \partial$.

On note aussi $\chi(G) = b_0(G) - b_1(G)$. $\chi(G)$ s'appelle la caractéristique d'Euler de G .

L'algèbre linéaire montre la formule

$$\chi(G) = v - e .$$

Calcul de b_0 :

b_0 est la dimension du noyau de d . Le noyau de d est formé des potentiels localement constants sur G . b_0 est donc le nombre de composantes connexes de G . Si G est connexe, c'est à dire si toute paire de sommets de G peut être jointe par un chemin, on a $b_0(G) = 1$.

Calcul de b_1 :

bien sûr, on peut calculer b_1 par la formule d'Euler:

$$b_1 = b_0 + e - v .$$

Il est agréable d'avoir une interprétation géométrique de $\ker \partial$ l'espace des cycles de dimension 1 dont la dimension est b_1 .

Appellons cycle géométrique une suite de sommets i_1, i_2, \dots, i_N ordonnée cycliquement telle que

$$\forall k = 1, 2, \dots, N, \{i_k, i_{k+1}\} \in E ,$$

avec la convention $i_{N+1} = i_1$.

A tout cycle géométrique, on associe un cycle algébrique, celui qui vaut 1 sur les (i_k, i_{k+1}) et 0 ailleurs.

Le résultat principal est que l'espace des cycles algébriques est engendré par les cycles géométriques.

En fait, on a un moyen de construire une base de tels cycles au moyen des arbres maximaux.

On a le :

LEMME 2.1. *Si T est un arbre, $b_1(T) = 0$.*

Preuve. –

Il suffit de raisonner, par l'absurde, sur le point le plus bas (plus grande génération) du support d'un cycle algébrique.

□

Si G est un graphe connexe, il contient des arbres maximaux ayant même ensemble de sommets que G .

Choisissons un de ces arbres T et à chaque arête α de G qui n'est pas arête de T , on associe un cycle géométrique c_α suivant le dessin ci-après:

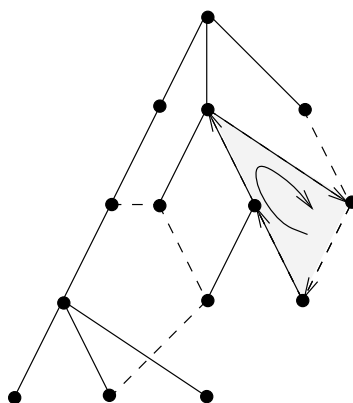


FIGURE 1. G et un arbre maximal

Il est alors facile de voir que ces cycles engendrent les cycles algébriques : soit c un cycle de G et considérons le cycle $c' = c - \sum c(\alpha)c_\alpha$. Il est clair que c' s'identifie à un cycle de T donc est nul. On en déduit $c = \sum c(\alpha)c_\alpha$.

Les cycles c_α sont indépendants car c_{α_0} vaut 1 sur α_0 et 0 sur les autres α .

On peut reformuler ceci en terme de la loi de Kirchhoff pour les courants: en effet la condition d'être un cycle algébrique se traduit en la loi de Kirchhoff et donc tout courant de Kirchhoff est combinaison linéaire de courants géométriques. Plus précisément :

PROPOSITION 2.1. *Si G est un graphe connexe et T un arbre maximal, on a $b_1(G) = \#(E(G) - E(T))$ et un courant qui vérifie les lois de Kirchhoff en tous les sommets est prescrit de façon unique par ses valeurs sur les arêtes de G qui ne sont pas des arêtes de T .*

Le cas des graphes planaires et application à la formule d'Euler.

Si G est planaire, on appelle *face* une composante connexe bornée du plan privé de \bar{G} . À chaque face, on associe un cycle : le bord de la face. Ces cycles forment une base de l'espace des cycles de G . Pour le voir, on part d'un arbre maximal et on associe à chaque face de G une arête de G qui n'est pas dans l'arbre maximal de la façon suivante : on construit un chemin qui joint un point de la face à l'infini du plan sans rencontrer l'arbre et qui rencontre chaque arête au plus une fois. On associe à cette face la première arête de G que ce chemin rencontre.

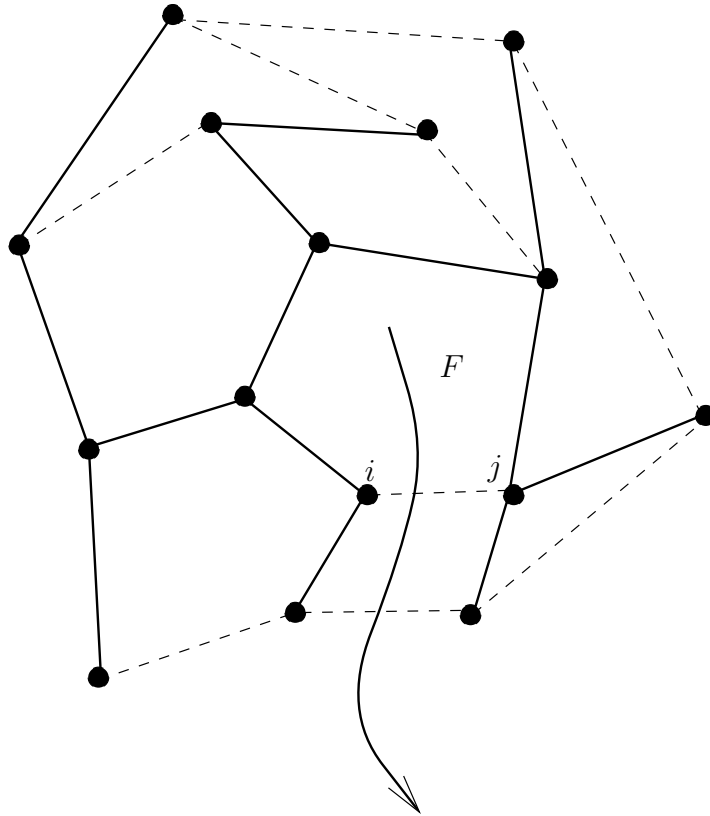


FIGURE 2. Faces et arbre maximal d'un graphe planaire

4. Topologie

Les nombres b_0 et b_1 ne dépendent que de la topologie de \bar{G} . En fait, on a :

THÉORÈME 2.1. $b_0(G)$ et $b_1(G)$ ne dépendent que du type d'homotopie de \bar{G} .

- $b_0(G)$ est le nombre de composantes connexes de \bar{G}
- Si G est connexe, \bar{G} a le type d'homotopie d'un bouquet de $b_1(G)$ cercles.

DÉFINITION 2.3. Un bouquet de n cercles est l'espace topologique obtenu en identifiant à un seul point un point sur chacun des n cercles.

5. Nombres chromatiques

Pour plus de détails sur cette section, on peut lire [Rin74].

DÉFINITION 2.4. *Le nombre chromatique $c(G)$ du graphe G est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier tous les sommets de G de façon que 2 sommets voisins n'aient pas la même couleur.*

Si X est une surface, le nombre chromatique de X est le sup des nombres chromatiques des graphes plongés dans X .

L'origine de ces nombres est le problème de coloriage des cartes : on souhaite colorier une carte du monde (dont on suppose les pays connexes) de façon que 2 pays voisins aient une couleur différente. On peut associer à cette carte un graphe dont les sommets sont les pays et les arêtes les couples de pays ayant une frontière commune. Ce graphe est plongé dans la sphère et il revient au même de colorier les pays ou le graphe associé.

On peut bien sûr se poser ce problème pour une topologie quelconque du globe terrestre.

Le théorème des 4 couleurs affirme que $c(S^2) = 4$. Ce théorème a été démontré dans les années 1975 au moyen de calculs sur ordinateur.

Nous allons prouver une majoration de $c(X)$ lorsque $\chi(X) \leq 1$ (toutes les surfaces sauf S^2).

THÉORÈME 2.2. *On a :*

$$c(X) \leq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(X)}}{2} ,$$

dès que $X \neq S^2$.

DÉFINITION 2.5. *Soit G un graphe, on dira que G est critique si, pour tout G' sous-graphe de G , $c(G') < c(G)$.*

Il est clair que tout graphe admet un sous-graphe critique de même nombre chromatique.

LEMME 2.2. *Si G est critique, tous ses sommets sont de valence $\geq c(G) - 1$.*

Preuve.—

Soit $v \in V$ tel que $d(v) \leq c(G) - 2$. On peut colorier $V \setminus v$ avec $c(G) - 1$ couleurs. Une de ces couleurs au moins n'est pas utilisée pour colorier les voisins de v . On peut donc utiliser cette couleur pour recolorier v et donc G avec $c(G) - 1$ couleurs.

□

LEMME 2.3. *Si G est connexe, a au moins 3 sommets et se plonge dans X et n'a pas d'arêtes multiples, on a :*

$$e \leq 3v - 3\chi(X) .$$

Preuve.—

$$\chi(X) = \chi(G) + \sum_{i=1}^n \chi(F_i) ,$$

où les F_i sont les composantes connexes du complémentaire de G . On a aussi $\chi(F_i) \leq 1$, car F_i est une surface connexe à bord et qu'on connaît la classification de ces surfaces : ce sont les surfaces sans bord privées d'un certain nombre de disques.

On a la majoration $3n \leq 2e$: en effet $2e$ est le nombre d'arêtes orientées et chaque domaine est bordé par au moins 3 de ces arêtes. S'il n'y en avait que 2 on aurait soit 2 arêtes joignant un même sommet soit G est constitué d'une seule arête.

On a donc :

$$\chi(X) \leq v - e + n$$

On multiplie par 3 et utilise $3n \leq 2e$, d'où

$$3\chi(X) \leq 3v - e$$

et donc

$$e \leq 3v - 3\chi(X) .$$

□

Preuve.—

(du théorème)

Des 2 lemmes et de $(c(G) - 1)v \leq 2e$, il suit :

$$c(G) - 1 \leq 6\left(1 - \frac{\chi(X)}{v}\right) .$$

A) $\chi(X) \leq 0$:

on utilise $c(G) \leq v$ et on suppose $c(G) \geq 7$, d'où :

$$c(G)(c(G) - 7) \leq -6\chi(X) .$$

B) $\chi(X) = 1$:

on utilise ici

$$c(G) - 1 < 6 .$$

□

Il se trouve que toutes ces bornes sont optimales, sauf pour la bouteille de Klein ou la borne est 6, mais c'est une autre affaire !! (voir le livre [Rin74]). On peut le vérifier directement pour les surfaces telles que $\chi(X) \geq 0$.

6. Arbres maximaux et complexité

Soit G un graphe fini connexe. On définit la complexité $\kappa(G)$ de G comme le nombre d'arbres maximaux de G . Ce nombre s'exprime comme un déterminant : si Δ_G est le laplacien sur G défini par $\Delta_G = \partial d$ ou encore

$$\Delta f(i) = \sum_{\{j,i\} \in E} (f(i) - f(j)) ,$$

on a le :

THÉORÈME 2.3. *Si $v_0 \in V$ et Δ_0 est la restriction de Δ aux fonctions nulles en v_0 , on a : $\det(\Delta_0) = \kappa(G)$.*

Si $d(v) = d$ est constante, le produit $\det'(\Delta)$ des valeurs propres > 0 de Δ est égal à $|V|\kappa(G)$.

Preuve.—

Voir [Big74]. La preuve utilise quelques lemmes simples.

LEMME 2.4. (formule de Cauchy-Binet) Soient A une matrice à m lignes et n colonnes avec $m \leq n$ et B une matrice du format transposé. On a alors :

$$\det(AB) = \sum_{\alpha} \det(A_{\alpha}B_{\alpha})$$

où α décrit les parties à m éléments de $\{1, \dots, n\}$ et A_{α} (resp. B_{α}) est la matrice obtenue en prenant uniquement les colonnes (resp. les lignes) indicées par α .

Ce lemme se montre par un développement brutal du 1er déterminant en regroupant les indices de sommations par paquets α .

LEMME 2.5. Soit $v_0 \in V$, et $F \subset E$ tel que $|F| = |V| - 1$. Soit $d_F : \mathbb{R}^{V \setminus v_0} \rightarrow \mathbb{R}^{\vec{E}}$ la restriction de la différentielle sur G . Alors $\det(d_F) = \pm 1$ ou 0 suivant que F est ou n'est pas l'ensemble des arêtes d'un arbre maximal de G .

Dans le second cas, il y a au moins 1 sommet de $V \setminus v_0$ qui n'est extrémité d'aucune arête de F et d_F n'est pas injective. Dans le premier, on peut orienter l'arbre à partir de la racine et paramétrer les arêtes de F par leur origine, ce qui rend les éléments diagonaux de d_F égaux à 1 et on peut ordonner les sommets de l'arbre de façon que si y est plus loin que x de la racine son numéro est supérieur. Ainsi d_F devient une matrice triangulaire.

La proposition est alors une application simple de la formule de Cauchy-Binet appliquée à $B = d_{v_0} : \mathbb{R}^{V \setminus v_0} \rightarrow \mathbb{R}^{\vec{E}}$ et $A = B^*$.

□

7. Dimères

Soit G un graphe, on appelle *dimère* sur G la donnée d'une involution $J : V \rightarrow V$ telle que $\{i, J(i)\}$ est une arête de G .

On peut compter le nombre de dimères pour un graphe planaire par un déterminant. Pour cela, on utilise une matrice d'incidence hermitienne à poids A'_G dont les entrées non nulles sont associées aux arêtes de G et les phases sont telles que le flux par face polygonale à N côtés soit $(N - 2)\frac{\pi}{2}$.

THÉORÈME 2.4. Si G est planaire et A'_G comme précédemment, on a :

$$|\{J\}| = |\det(A'_G)|^{\frac{1}{2}}.$$

Voir [Lie93] pour la démonstration.

8. Complexes simpliciaux

8.1. Définitions. Un complexe simplicial C est un objet combinatoire qui généralise les graphes.

DÉFINITION 2.6. Soit $X = V_0$ un ensemble fini. Un complexe simplicial dont V_0 est l'ensemble des sommets est une famille V de sous ensembles de V_0 ayant la propriété suivante : si $Y \in V$ et $X \subset Y$, $X \in V$.

On note V_i l'ensemble des éléments de V qui ont $i + 1$ éléments. Un élément de V_i sera appelé simplexe de dimension i . Les éléments de V_1 s'appellent les arêtes. Le couple (V_0, V_1) est un graphe appelé squelette de C .

La réalisation topologique \bar{C} d'un complexe simplicial est la réunion des enveloppes convexes des ensembles $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$, où $e_1, \dots, e_{\#V_0}$ est une base de \mathbb{R}^{V_0} , et où $\{i_1, \dots, i_k\}$ parcourt V . \bar{C} est ainsi obtenu en recollant des simplexes.

DÉFINITION 2.7. Une triangulation d'un espace topologique X est un homéomorphisme de X avec \bar{C} où C est un complexe simplicial.

8.2. Orientations. Si $X = \{i_1, \dots, i_k\}$ est un simplexe de C , une orientation est donnée par un ordre total sur X . Deux tels ordres définissent la même orientation si la bijection σ de X sur lui-même qui envoie un des ordres sur l'autre est paire : la signature $\varepsilon(\sigma)$ vaut $+1$.

Par exemple le simplexe $\{1, 2, 3\}$ admet les 2 orientations

$$(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$$

et

$$(2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1),$$

qui correspondent aux 2 sens de parcours du bord du triangle.

8.3. Nombres de Betti. On oriente chaque simplexe une fois pour toutes et on note \vec{V}_i les simplexes de dimension i avec l'orientation choisie. On note $\Omega_i = \mathbb{R}^{\vec{V}_i}$. On définit un opérateur

$$d_i : \Omega_i \rightarrow \Omega_{i+1}$$

comme suit : $d_i f(X) = \sum \pm f(X')$ où X' est X privé d'un sommet. \pm vaut $+1$ si $X = (1, 2, \dots, i+1)$ et $X' = (2, \dots, i+1)$ (à bijection près de X de signature paire) et -1 sinon. On réécrit cette formule :

$$\int_X df = \int_{\partial X} f$$

avec

$$\partial(1, 2, \dots, i+1) = (2, \dots, i+1) - (1, 3, \dots, i+1) + \dots$$

Par exemple :

$$\partial(1, 2, 3) = (2, 3) + (3, 1) + (1, 2).$$

On vérifie sans peine que $d_{i+1} \circ d_i = 0$ et donc $\text{Im} d_i \subset \ker d_{i+1}$.

DÉFINITION 2.8. On définit alors le i -ème nombre de Betti de C par $b_i(C) = \dim(\ker d_i / \text{Im} d_{i-1})$.

Les nombres de Betti sont des invariants topologiques de C : ils ne dépendent que de \bar{C} .

8.4. Théorie de Hodge. On aimerait avoir une description géométrique des quotients $\ker d_i / \text{Im} d_{i-1}$.

Pour cela, on suppose que chaque Ω_i est muni d'une structure euclidienne. On peut alors définir les adjoints d_i^* des d_i et les laplaciens $\Delta_i : \Omega_i \rightarrow \Omega_i$ par

$$\Delta_i = d_i^* d_i + d_{i-1} d_{i-1}^*$$

On dira que $\alpha \in \Omega_i$ est harmonique si $\Delta_i \alpha = 0$. On note $\mathcal{H}_i = \ker \Delta_i$.

On a alors :

- $\Omega_i = \text{Im } d_{i-1} \oplus \text{Im } d_i^* \oplus \mathcal{H}_i$ et cette somme est orthogonale.
- $\dim \mathcal{H}_i = b_i$
- $v_0 - v_1 + v_2 + \dots = b_0 - b_1 + b_2 + \dots$

Ce dernier nombre s'appelle la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de C .

Un ingrédient de base est de montrer que si $\alpha \in \Omega_i$, $d_i \alpha = 0$ et $d_{i-1}^* \alpha = 0$.
Cela vient de $\langle \Delta_i \alpha | \alpha \rangle = \|d_i \alpha\|^2 + \|d_{i-1}^* \alpha\|^2$.

Si on pose $n_i = \dim \text{Im } d_{i-1}$, on a :

$$v_i = b_i + n_i + n_{i+1} .$$

D'où les *inégalités de Morse* :

$$v_0 \geq b_0, \quad v_1 - v_0 \geq b_1 - b_0, \quad v_2 - v_1 + v_0 \geq b_2 - b_1 + b_0, \dots .$$

SURFACES

1. Introduction

La vision des surfaces par les mathématiciens a considérablement évolué au cours des temps de façon liée aux progrès dans la compréhension de l'univers physique.

La surface d'Euclide [Euc94] est le plan muni de la géométrie euclidienne de notre enfance : celle des droites, triangles, cercles.. Tout le monde connaît le fameux postulat d'Euclide sur les parallèles.

Gauß (1777-1855) est l'un des premiers à avoir l'idée d'une géométrie intrinsèque des surfaces (*Disquisitiones circa Superficies Curva*). Voir [Dom97]. C'est aussi la période de la découverte des géométries non euclidiennes (Bolyai, Lobatchevski).

Ces idées ont été présentées de façon claire par Riemann (1826-1866) dans son exposé : *Sur les principes qui servent de fondements à la géométrie*. Cet exposé contient la définition des variétés encore utilisée actuellement en géométrie différentielle. Les concepts introduits par Riemann serviront de support mathématique à la théorie de la relativité générale d'Einstein.

Le fondateur de la topologie moderne est Henri Poincaré (1854-1912) avec son *Analysis Situs* qui a juste 100 ans. On lui doit l'introduction des groupes d'homologies, du groupe fondamental (appelé aussi groupe de Poincaré) et aussi l'utilisation des méthodes topologiques en mécanique céleste. De nombreux problèmes déjà posés par Poincaré ne sont toujours pas résolus : citons par exemple la conjecture de Poincaré. Une variété compacte de dimension 3 simplement connexe est-elle homéomorphe à la sphère S^3 ? L'analogie en dimension 2 est facile. L'analogie de la conjecture de Poincaré en dimensions ≥ 5 a été prouvée par Smale dans les années 60 et en dimension 4 par Freedman en 85.

Dans ce chapitre, nous présentons surtout la dimension 2, i.e. le cas des surfaces. Nous étudierons les surfaces de différents points de vue

- Combinatoire (triangulations)
- Topologique (classification)
- Différentiable (connection, courbure)

2. La notion de surface selon Riemann

Voilà ce que Riemann propose comme définition d'une variété (topologique) de dimension n ; une variété de dimension 2 est une surface.

DÉFINITION 3.1. *Si X est un espace topologique, une carte de X est un triplet (U, V, ϕ) où U est un domaine ouvert de X , V un ouvert de \mathbb{R}^n et ϕ un homéomorphisme de U sur V .*

On peut noter (x_1, x_2, \dots, x_n) un point générique de V et si $m \in U \subset X$, $\phi(m) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ s'appellent *coordonnées locales* de m . Elles paramètrent continûment les points de U . On a une notion de changement de cartes : si on a 2 cartes (U_i, V_i, ϕ_i) , $i = 1, 2$, les points de $U_1 \cap U_2$ ont 2 systèmes de coordonnées locales. Le changement de cartes est la correspondance entre ces systèmes de coordonnées locales.

EXEMPLE 2.1. Si X est un ouvert de \mathbb{R}^n , on peut prendre comme $U = V = X$ et $\phi = Id$; mais d'autres choix sont possibles et peuvent être intéressants : les coordonnées polaires ou sphériques les coordonnées barycentriques, des coordonnées d'une autre base affine de \mathbb{R}^n , etc...

EXEMPLE 2.2. Si X est la sphère de rayon 1 de \mathbb{R}^3 , on peut prendre les coordonnées sphériques :

$$V_a = \{(\theta, \alpha) \mid a < \theta < a + 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\},$$

avec

$$\phi^{-1}(\theta, \alpha) = (\sin \alpha \cos \theta, \sin \alpha \sin \theta, \cos \alpha).$$

Dans ce cas, U_a est la sphère privée du méridien de longitude a .

Pour les besoins pratiques, on a essayé de trouver des cartes qui respectent une ou plusieurs structures géométriques : les angles, l'aire, la distance (voir [Ber77]).

Il existe des cartes préservant les angles : ce sont les projections stéréographiques ainsi que les projections de Mercator (qui transforment les méridiens et les parallèles en 2 familles de droites orthogonales).

Il y a aussi des cartes préservant les aires. Il n'existe pas de cartes préservant les distances : la sphère n'est pas localement isométrique au plan euclidien. On dit qu'elle n'est pas une surface développable.

DÉFINITION 3.2. Un atlas de X est la donnée d'une collection de cartes

$$(U_\alpha, V_\alpha, \phi_\alpha)$$

telle que X soit la réunion des U_α : tout point est intérieur à l'un des U_α ; cette carte est suffisante si on reste dans un petit voisinage de ce point. Les cartes se recouvrent largement !!

DÉFINITION 3.3. Si X admet un atlas, on dit que c'est une variété (topologique). En d'autres termes, une variété est un espace topologique localement homéomorphe à \mathbb{R}^n . Si c'est le même n pour toutes les cartes, n s'appelle la dimension de X .

Par exemple les sphères, les tores sont des variétés, mais aussi l'ensemble $P^{n-1}(\mathbb{R})$ des droites vectorielles de \mathbb{R}^n (espace projectif). Un cône de \mathbb{R}^3 n'est pas en général une variété.

EXEMPLE 2.3. Munissons l'espace projectif $P^{n-1}(\mathbb{R})$ d'un atlas. Soit $1 \leq i \leq n$, l'ouvert U_i est formé des droites d qui ne sont pas contenues dans le plan $x_i = 0$. Si x est le point d'intersection de d avec l'hyperplan $x_i = 1$, on associe à d les coordonnées $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ de x .

EXEMPLE 2.4. Le groupe $SO(3)$ des isométries linéaires directes de \mathbb{R}^3 est une variété de dimension 3. On peut en obtenir des cartes de la façon suivante : si A est une matrice antisymétrique, $\exp(A) \in SO(3)$. Soit V l'ouvert des matrices antisymétriques dont la norme est $< \pi$. Alors $A \rightarrow \exp(A)$ est une carte de $SO(3)$.

L'image est $SO(3)$ privé des rotations d'angle π . La carte $A \rightarrow R \exp(A)$ avec $R \in SO(3)$ recouvre un voisinage de R . On peut montrer en utilisant les quaternions que $SO(3)$ est homéomorphe au projectif de dimension 3.

EXEMPLE 2.5. Le groupe $SU(2)$ est aussi une variété de dimension 3. Montrer qu'il est homéomorphe à S^3 .

Les objets définis en termes de coordonnées locales doivent satisfaire des conditions de compatibilités pour être bien définis sur X .

Voir [BG87], [Dom97], [Mas77], [Pla73].

DÉFINITION 3.4. Une surface est une variété de dimension 2, donc un espace topologique localement homéomorphe à \mathbb{R}^2 .

Une structure différentiable (resp. affine, conforme, holomorphe) est la donnée d'un atlas tel que les changements de coordonnées soient différentiables (resp. affines, conformes, holomorphes).

3. Triangulations

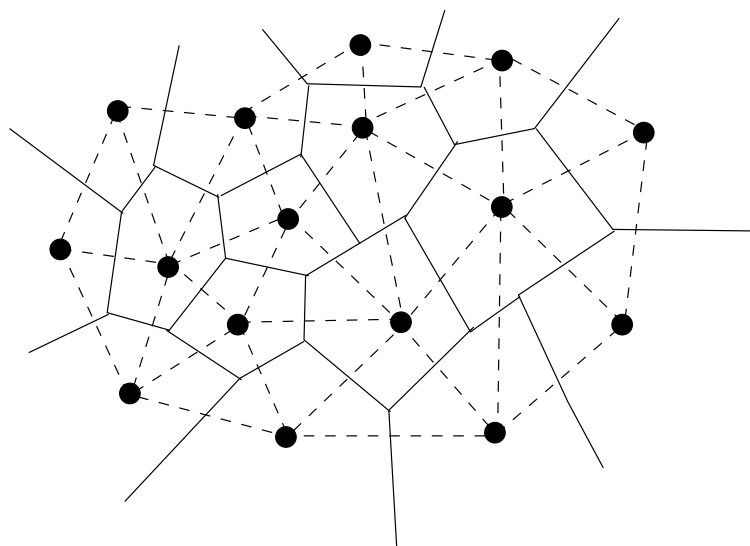


FIGURE 1. Triangulation à partir d'un nuage de points

DÉFINITION 3.5. Si X est une surface compacte, une triangulation de X est la donnée d'un complexe simplicial C et d'un homéomorphisme de \bar{C} avec X .

Toute surface admet une triangulation. Si X est munie d'une distance riemannienne, on part d'un nuage de points (un ensemble fini) assez dense auquel on associe la cellulation de Voronoï (regrouper avec chaque point ceux qui sont plus proches de ce point que des autres points). Si le nuage est générique, les sommets de la cellulation sont de degré 3 et le dual est une triangulation de X .

Si \mathcal{T} est une triangulation de X , on note V_0 l'ensemble des sommets, V_1 l'ensemble des arêtes et V_2 l'ensemble des faces.

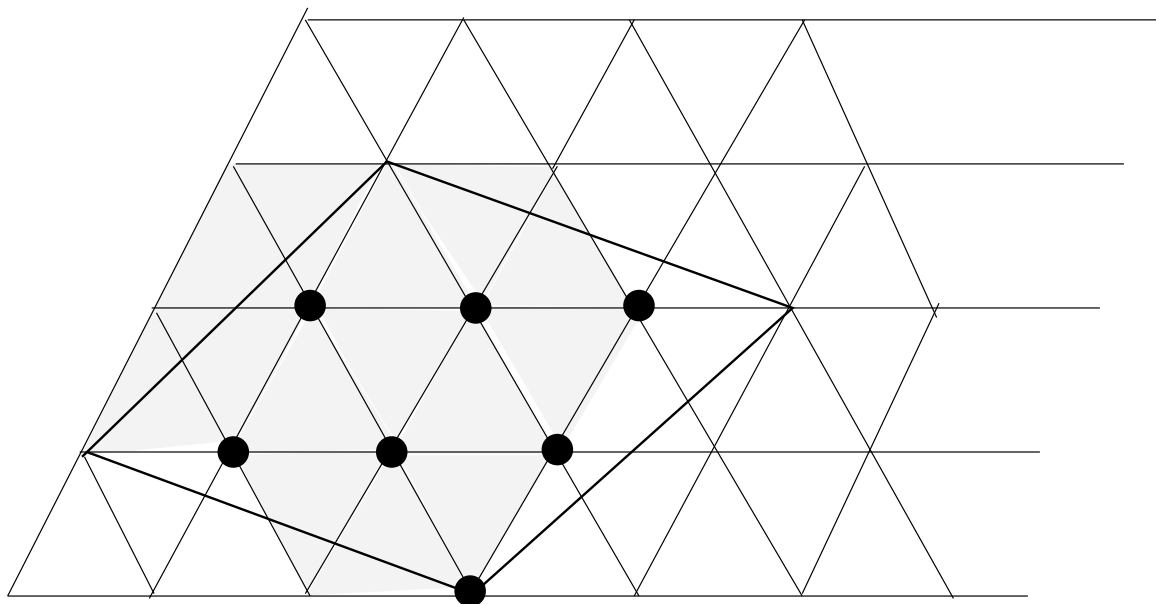


FIGURE 2. Triangulation du tore

4. Caractéristique d'Euler-Poincaré

Si T est une triangulation d'une surface compacte, on définit le nombre $\chi(T)$ par

$$\chi(T) = |V_0| - |V_1| + |V_2| .$$

THÉORÈME 3.1. *Le nombre $\chi(T)$ ne dépend pas de la triangulation choisie, c'est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface X . On la note $\chi(X)$.*

La démonstration générale est donnée dans la section 10.3.

Remarque : on peut aussi calculer $\chi(X)$ à partir d'une polygonisation : on remplace les triangles par des polygones homéomorphes au disque. On peut autoriser 2 polygones à se couper suivant une réunion quelconque de leurs sommets et arêtes. L'idée est qu'à partir d'une telle polygonisation on peut construire une triangulation par subdivision : ex du tore obtenu à partir d'un seul rectangle.

Il existe plusieurs preuves de l'invariance topologique de $\chi(T)$.

Donnons une preuve *géométrique* dans le cas de la sphère en supposant les triangles géodésiques.

LEMME 3.1. *L'aire d'un triangle géodésique sur la sphère unité dont les angles sont α, β, γ est $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.*

Preuve.—

Considérons les 8 triangles découpés sur la sphère par les 3 grands cercles que l'on peut regrouper par antipodie en 4 paires de 2 triangles égaux $(1, 1'), \dots, (4, 4')$, dont on note $A_i, A_{i'}$ les aires.

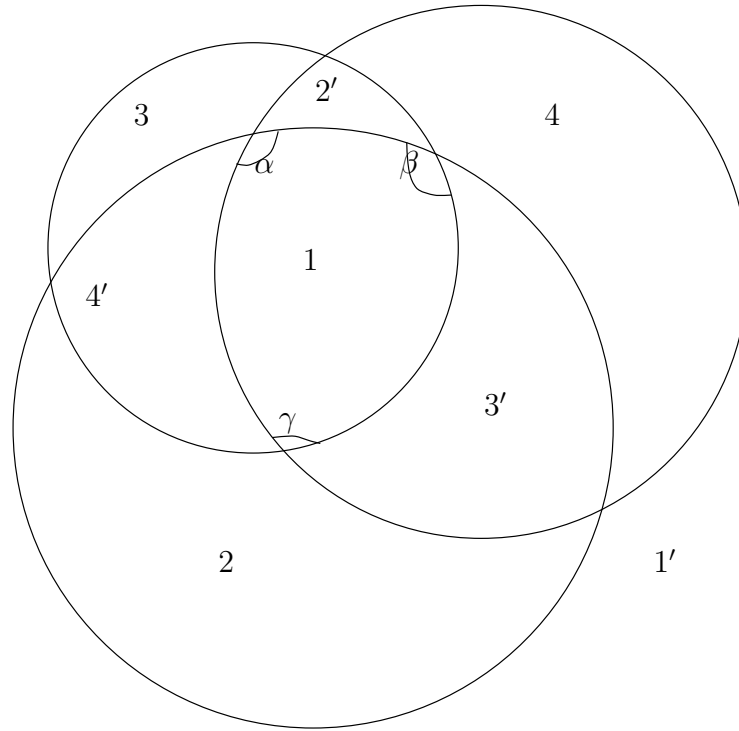


FIGURE 3. aire d'un triangle sphérique

On a :

$$A_1 + A_{2'} = 2\gamma, \quad A_1 + A_{3'} = 2\alpha, \quad A_1 + A_{4'} = 2\beta, \quad A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2\pi .$$

□

Ajoutant ces formules on trouve :

$$4\pi = -\pi|V_2| + 2\pi|V_0| .$$

Il reste à utiliser

$$3|V_2| = 2|V_1|$$

pour conclure que $\chi(T) = 2$.

La même démonstration marche pour le tore : dans ce cas les triangles sont euclidiens et la somme des angles vaut π . On trouve ainsi $\chi(\text{tore}) = 0$.

5. Géométrie des polyèdres de dimension 2

5.1. La formule de Gauß -Bonnet pour un polyèdre. Soit X une surface triangulée. On peut munir chaque triangle d'une métrique euclidienne pour en faire un triangle de la géométrie euclidienne ordinaire. On impose la condition que si 2 triangles partagent une arête elle ait la même longueur vue de chaque côté.

Ces données font de X un espace métrique (et même un espace de longueur).

En fait c'est une métrique riemannienne localement euclidienne avec des singularités uniquement aux sommets de X . La métrique intrinsèque est lisse et plate le long des arêtes.

Maintenant, on définit la courbure de chaque sommet $x \in V_0$ par la formule :

$$K(x) = 2\pi - \sum_i \alpha_i ,$$

où la somme porte sur les angles de sommet x .

On a alors la formule de Gauß -Bonnet :

$$\chi(X) = \frac{1}{2\pi} \sum_{x \in V_0} K(x) ,$$

qui dans le cas d'une métrique riemannienne arbitraire se transforme en une formule intégrale (voir section 10.3) :

$$\chi(X) = \frac{1}{2\pi} \int_X K d\sigma ,$$

où K est la courbure de Gauß de la métrique.

Ces formules ont connus de vastes généralisations connues sous le nom de théorèmes d'indices d'Atiyah-Singer.

5.2. Polyèdres réguliers. Un polyèdre X qui est une surface sera dit (p, q) régulier si chaque face a p côtés et chaque sommet est de degré q . Si on note $|V_1|$ le nombre d'arêtes, on a :

$$p|V_2| = 2|V_1| = q|V_0| ,$$

et donc :

$$\chi(X) = \left(\frac{2}{q} - 1 + \frac{2}{p}\right)|V_1| ,$$

d'où si $X = S^2$:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{|V_1|} .$$

Sachant que $p, q \geq 3$, cette équation n'admet que 5 solutions :

$$(3, 3, 6), (4, 3, 12), (3, 4, 12), (5, 3, 30), (3, 5, 30) ,$$

qui correspondent aux 5 solides platoniciens : tétraèdre, cube, octaèdre, icosaèdre, dodécaèdre, icosaèdre.

Bien sûr, si on change la topologie, il y en a d'autres ; par exemple, pour le tore, il y a une infinité de possibilités. On trouve 3 possibilités pour (p, q) qui laissent une infinité de possibilités pour $|V_1|$:

$$(p, q) = (4, 4), (3, 6), (6, 3) .$$

Chaque possibilité donne une infinité de polyèdres réguliers toriques correspondant à des réseaux carrés ou équilatéraux.

6. Classification des surfaces

On dispose d'une classification topologique des surfaces. Restreignons-nous aux surfaces compactes connexes.

On introduit les 2 invariants topologiques suivants des surfaces compactes connexes :

1) *la caractéristique d'Euler-Poincaré* $\chi(X)$.

2) *L'orientabilité* : la surface est orientable s'il existe un atlas dont les changements de cartes soient de jacobien > 0 ; si X n'est pas orientable, il existe un chemin fermé simple γ admettant une base de voisinages Ω tels que $\Omega \setminus \gamma$ soit connexe.

Si X est orientée, un observateur (bidimensionnel) qui se promène le long de γ a une notion de droite et de gauche bien définie.

Le théorème de classification des surfaces compactes est le suivant :

- Les surfaces compactes orientables sont à homéomorphisme près les tores à n trous X_n dont la caractéristique d'Euler prend les valeurs $2 - 2n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.
 X_0 est la sphère, X_1 est le tore, X_n est le tore à n trous.
- Les surfaces compactes non orientables sont les Y_n dont la caractéristique $\chi(Y_n) = 1 - n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.
 Y_0 est le plan projectif, Y_1 la bouteille de Klein, les autres sont obtenues en ajoutant des anses à Y_0 ou Y_1 .

EXEMPLE 6.1. *Surface quotient de polygones* : on se donne un polygone convexe P dans le plan et on accouple les côtés deux par deux avec une orientation. L'espace topologique obtenu est une surface si on a la condition de cycle suivante : si x_1 est un sommet du polygone qui s'identifie à l'ensemble $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ de sommets de P . On peut choisir l'ordre $1, \dots, k$ et les côtés $\{i, x_i\}$ et $\{i, y_i\}$ de façon que $\{i, y_i\}$ s'identifie (avec orientation) à $\{i+1, x_{i+1}\}$ pour $i = 1, \dots, n$ avec $n+1 = 1$. Cette condition garantit que x a dans le quotient un voisinage homéomorphe à un disque.

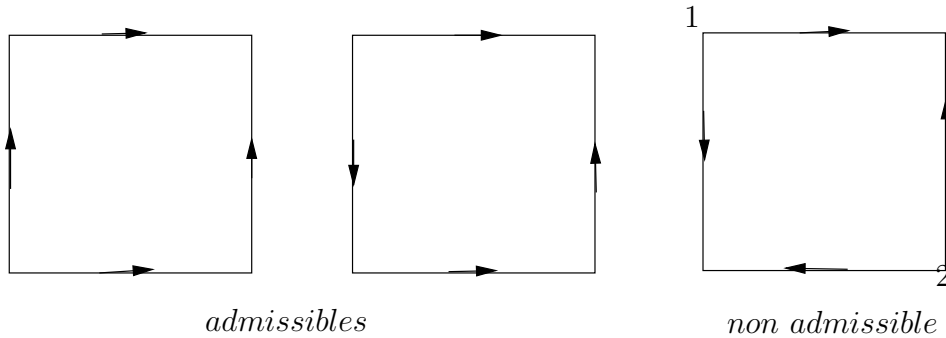


FIGURE 4. La condition de cycle pour un carré.

EXEMPLE 6.2. *Sphère S^2 , plan projectif P^2 , tore T^2 , bouteille de Klein K^2 .*

EXEMPLE 6.3. *Surfaces de Riemann, en particulier courbes algébriques lisses de $P^2(\mathbb{C})$.*

EXEMPLE 6.4. *Adjonction d'une anse* : soit D_1 et D_2 2 disques disjoints de X de bords C_1 et C_2 . Soit Y l'espace topologique obtenu en ôtant les intérieurs des 2 disques et en recollant un cylindre le long de C_1 et C_2 . Y est une surface et on dit que Y provient de X par adjonction d'une anse. Remarquer qu'il y a plusieurs façon de faire le recollement dont certaines donnent un Y non orientable.

EXEMPLE 6.5. *Éclatements* : soit X une surface et D un disque de X bordé par un cercle C . L'éclaté de X est la surface obtenu en enlevant l'intérieur de D et en identifiant les points diamétralement opposé de C . Cette nouvelle surface n'est pas orientable. Si on fait cette opération à partir de la sphère, on obtient le plan projectif.

Une surface triangulée est orientable si on peut orienter chaque triangle de façon que les deux orientations induites sur chaque arête par les 2 triangles adjacents soient opposées. Si une surface connexe est orientable, elle l'est de 2 façons. Chacune d'elle est une orientation de X . Etre orientable est une propriété topologique de X .

X n'est pas orientable si et seulement si il existe un chemin fermé qui change l'orientation : lorsqu'on suit ce chemin la droite se retrouve à gauche au bout d'un tour.

On peut engendrer toutes les surfaces à partir de S^2 par éclatement (diminue χ de 1) et adjonction d'anses (diminue χ de 2).

- Les surfaces orientables X_n , $n = 0, 1, \dots$ ont $\chi(S_g) = 2(1 - n)$. X_0 est la sphère, X_1 le tore, X_n le tore à n trous.
- Les surfaces non orientables Y_n , $\dots n = 0, 1, 2, \dots$ ont $\chi(Y_n) = 1 - n$. Y_0 est le plan projectif, Y_1 la bouteille de Klein.

L'adjonction d'une anse A vérifie

$$\chi(AX) = \chi(X) - 2$$

et préserve l'orientabilité si on choisit le bon recollement, alors que l'éclatement E vérifie :

$$\chi(EX) = \chi(X) - 1,$$

et EX n'est pas orientable.

Exercices :

1) Parmi les quotients d'un carré obtenu en identifiant des paires de côtés, lesquels sont des surfaces? Types topologiques possibles ?

4) Montrer que toute surface peut être obtenue à partir d'un polyèdre convexe et d'une identification de paires de côtés. Comment lire l'orientabilité et b_1 sur cette décomposition ?

Indication : choisir un arbre maximal dans le graphe dual d'une triangulation de X et couper suivant les arêtes qui ne rencontrent pas l'arbre maximal. Le polygone obtenu est 1-connexe (type d'homotopie d'un arbre) et peut donc être rendu convexe.

5) Soit $P(x, y, z)$ un polynôme homogène de degré n à coefficients complexes. On considère le sous-ensemble conique $P = 0$ de $\mathbb{C}^3 \setminus 0$ et son quotient X par les homothéties de $\mathbb{C} \setminus 0$. Si on suppose que P n'a pas de point critique sur $P = 0$, montrer que X est une surface orientable et calculer sa caractéristique d'Euler en fonction de n .

La preuve du théorème de classification se trouve dans [Mas77]. Donnons la stratégie dans le cas orientable :

1) On triangule la surface.

2) On coupe certaines arêtes de la triangulation de façon à obtenir un polygone homéomorphe au disque triangulé. On peut calculer $\chi(X)$ dans cette présentation :

$$\chi(X) = 1 - \#V_1 + \#V_0.$$

Preuve.—

On trace le graphe dual G de la triangulation qui donne la recette de recollement des triangles (ses sommets sont les triangles et il y a une arête lorsque les 2 triangles ont un côté commun. On choisit un arbre maximal T dans G et on recolle uniquement suivant les arêtes de T . Cela donne un polygone ayant les propriétés voulues.

□

On définit alors des opérations élémentaires de type *couper-coller* pour changer le polygone sans changer la surface associée.

T_1 : coller 2 côtés consécutifs qui sont identifiés dans la surface.

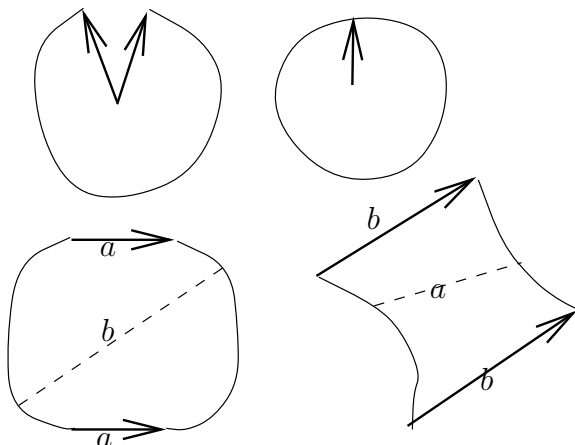


FIGURE 5. les opérations T_i .

T_2 : couper une diagonale qui sépare 2 côtés identifiés, puis identifier ces 2 côtés.

3) On utilise des transformations élémentaires de type T_1 et T_2 pour se ramener au cas où les sommets du polygone correspondent à un unique sommet de la surface.

4) On utilise T_1 et T_2 pour se ramener à la présentation canonique : le polygone est à $4k$ côtés qui correspondent aux courbes $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ sur la surface X et qui se suivent dans l'ordre $a_1, b_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, b_k$. On a alors $\chi(X) = 2(1-k)$.

Exercice : on considère le complexe simplicial X de dimension 2 à 9 sommets dont les triangles sont

124 236 134 246 367 347 469 459 698 678 457 259 289 578 358 125 238 135

et les arêtes celles des triangles.

Montrer que X est une surface. Laquelle ?

7. Degré

Soient X et Y 2 variétés compactes orientées de même dimensions et $f : X \rightarrow Y$ une application de classe C^1 , on va associer à f un entier algébrique $d(f)$ appelé degré de f . Intuitivement $d(f)$ est le nombre algébrique de solutions de $f(x) = y$ où y est donné. En particulier, $d(f) = 0$ si f n'est pas surjective.

On dit que y est une valeur *régulière* de f si $f'(x)$ est inversible pour tout $x \in f^{-1}(y)$. Presque toutes les valeurs de y sont régulières (Sard). On note alors $\varepsilon(x) = \pm 1$ suivant que f envoie l'orientation de X près de x sur celle de Y près de y ou non.

PROPOSITION 3.1. *Le nombre $d(f) = \sum_{f(x)=y} \varepsilon(x)$ est indépendant du choix de la valeur régulière y .*

DÉFINITION 3.6. *L'entier $d(f)$ s'appelle le degré de f .*

Si $F : Y \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$d(f) \int_Y F(y) dy = \int_X F \circ f(x) J(x) dx ,$$

où $J(x)$ est le jacobien de f en x .

EXEMPLE 7.1. *Application du cercle dans lui-même ; indice d'un zéro d'un champ de vecteurs.*

EXEMPLE 7.2. *Degré algébrique d'un polynôme.*

EXEMPLE 7.3. *Application de Gauß d'une surface de \mathbb{R}^3 dans la sphère S^2 .*

EXEMPLE 7.4. *Entrelacement de 2 courbes de \mathbb{R}^3 (voir chapitre 4).*

8. La courbure des surfaces : le point de vue des surfaces de l'espace à 3 dimensions

Dans cette section, X sera une surface de l'espace euclidien E de dimension 3. On supposera qu'on s'est donné sur X des cartes locales (ou coordonnées locales) différentiables. On notera ainsi

$$M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

où (u, v) parcourt un ouvert de \mathbb{R}^2 et on a choisi un système de coordonnées orthonormales (x, y, z) sur E . L'espace tangent à X au point de paramètres (u, v) admet comme base $(\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v})$. Le but est de décrire la géométrie de M en termes de quantités infinitésimales.

8.1. Les formes fondamentales. La *1ère forme fondamentale* est la forme quadratique sur l'espace tangent qui mesure le carré de la longueur du vecteur. On la note

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

où (du, dv) est la base duale de la base $(\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v})$ de l'espace tangent. On a ainsi

$$E = \left\langle \frac{\partial M}{\partial u} \middle| \frac{\partial M}{\partial u} \right\rangle, \dots$$

La 1ère forme fondamentale permet de calculer la longueur des courbes : si $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ est une courbe sur X , on a :

$$L(\gamma) = \int_a^b ds .$$

On en déduit la distance intrinsèque sur X par :

$$d(P, Q) = \inf L(\gamma)$$

où le inf est pris sur les courbes qui joignent P à Q .

La *2ème forme fondamentale* est aussi une forme quadratique sur l'espace tangent en $M_0 \in X$: c'est la hessienne de la fonction $M \rightarrow \langle \vec{N}_0, \vec{OM} \rangle$ où \vec{N}_0 est un des 2 vecteurs unitaires normaux à X en M_0 (on doit donc choisir une orientation de X).

On a donc

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

On peut réécrire

$$L = \langle \vec{N} | \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \rangle = - \langle \frac{\partial M}{\partial u} | \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} \rangle, \dots$$

(car $\frac{\partial}{\partial u} \langle \vec{N} | \frac{\partial M}{\partial u} \rangle = 0$).

8.2. Courbures. La *seconde forme fondamentale* mesure la courbure des courbes tracées sur X : si γ est l'intersection de X avec un plan normal en M_0 à X , la courbure de γ en M_0 est la valeur de II sur le vecteur tangent à γ supposée parcourue à vitesse 1. II est diagonalisable dans une b.o. de ds^2 avec 2 valeurs propres κ_1 et κ_2 appelées *courbures principales*.

PROPOSITION 3.2. *Les courbures principales sont les racines de l'équation du second degré :*

$$\det(II - \kappa I) = 0$$

où I est la matrice du ds^2 :

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Les courbures principales sont changées en leur opposées si on change l'orientation de X .

On définit la *courbure moyenne* par $H = \kappa_1 + \kappa_2$ et la *courbure totale* ou de *Gauß* par $k = \kappa_1 \cdot \kappa_2$. k est indépendant de l'orientation.

Exercice : calculer les courbures totales et moyenne de l'hélicoïde et du caténoïde.

L'équation $H = 0$ est l'équation d'Euler-Lagrange des *surfaces minimales*.

La courbure totale ne dépend que de I , c'est le fabuleux théorème de Gauß (*theorema egregium*) qui reste non trivial même aujourd'hui. Voir une démonstration dans la suite de ces notes basée sur l'idée suivante : la courbure totale est la courbure de la connection naturelle qui ne dépend que la 1ère forme fondamentale.

Une autre interprétation utile de la courbure de Gauß est la suivante : supposons la surface $X \subset \mathbb{R}^3$ orientée par la donnée d'un vecteur unitaire normal noté $G(x)$. G , l'application de Gauß, est une application de X dans la sphère S^2 et en tout point x les espaces tangents $T_x X$ et $T_{G(x)} S^2$ sont les mêmes. On peut donc parler du déterminant jacobien de G . Il est égal à la courbure de Gauß. le mieux est de retenir cette propriété sous la forme suivante où l'on voit $k|d\sigma|$ comme une "mesure":

PROPOSITION 3.3. *Si $G : X \rightarrow S^2$ est l'application de Gauß,*

$$\text{Aires}_{S^2}(G(D)) = \int_D k|d\sigma|.$$

On peut la vérifier simplement en prenant des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) telle que $x = (0, 0, 0)$ et le plan tangent en ce point est $x_3 = 0$. X admet alors l'équation locale $x_3 = f(x_1, x_2)$. On calcule la courbure de Gauß et le jacobien de l'application de Gauß en termes des dérivées secondes de f .

8.3. Surfaces minimales. Soit $X = X_0$ une surface de \mathbb{R}^3 et X_t une déformation de X_0 à support compact. Pour t petit, $X_t = \{x + tf(x)\vec{N}(x) + O(t^2) \mid x \in X\}$ avec f à support compact. Même si les aires des surfaces sont infinies, on peut calculer la variation de l'aire. On a

$$\frac{d}{dt}(A(t))|_{t=0} = - \int_X Hf(x)|d\sigma|.$$

DÉFINITION 3.7. *Une surface minimale est une surface de courbure moyenne nulle.*

Plusieurs surfaces minimales sont connues depuis longtemps : l'hélicoïde et le caténoïde. Grâce au lien avec la théorie des fonctions d'une variable complexe, Weierstrass a réussi à exhiber de nombreux exemples basé sur le fait que l'application de Gauß d'une surface minimale est conforme.

Le problème de Plateau : on se donne une courbe fermée simple de \mathbb{R}^3 et on cherche une surface d'aire minimale dont le bord est cette courbe. On sait que ce problème a toujours une solution, mais c'est relativement récent (environ 1930).

Les bulles de savon : on cherche une surface d'aire minimale englobant un domaine de topologie et de volume donnés. On voit facilement qu'une telle surface est à courbure moyenne constante. C'est le cas des sphères rondes.

Question de singularité : on peut élargir le problème en autorisant des singularités. On sait qu'il n'y a que 2 types de singularité possibles :

- 3 nappes de surfaces partagent le même bord et les 3 angles sont égaux à $2\pi/3$,
- 6 nappes de surfaces ont un point singulier et 4 arêtes communes, les angles étant ceux associés à un tétraèdre régulier dont le centre est joint aux 4 sommets, les 6 surfaces étant les triangles formés par une arête du tétraèdre et les 2 segment joignant le centre du tétraèdre aux extrémités de cette arête.

9. La courbure des surfaces : le point de vue des connections

9.1. Fibrés vectoriels. Un fibré vectoriel ($E \rightarrow X$) au-dessus d'un espace topologique X est la donnée pour chaque $x \in X$ d'un espace vectoriel E_x de façon que E_x dépende "continument" de x . Cette propriété demande à être précisée.

L'exemple le plus simple est celui où les E_x sont des sous-espaces d'un même espace vectoriel F . On demande alors qu'il y ait au voisinage de chaque $x \in X$ une base $(e_\alpha(x))$ de E_x où les e_α dépendent continument de x . Une telle base s'appelle une *trivialisatation du fibré*.

Plus généralement, la notion de fibré vectoriel est définie en termes de telles trivialisations et de leur compatibilité (changements de trivialisatation continu).

On définit aussi les fibrés différentiables en remplaçant continu par C^∞ .

Une section de $E \rightarrow X$ est la donnée pour chaque $x \in X$ de $s(x) \in E_x$. Au moyen des trivialisations, on peut définir les sections continues, différentiables.

La notion de fibré est une généralisation stricte de celle de produit. Si le fibré est dimension N et admet N sections globales partout indépendantes, le fibré est isomorphe à $X \times \mathbb{R}^N \rightarrow X$: on dit qu'il est (topologiquement) trivial.

Il y a de nombreux fibrés non triviaux. Le fibré tangent à une surface n'est trivial que si la surface est un tore. Une section du fibré tangent est un *champ de vecteurs*. Si la surface n'est pas orientable le fibré n'est déjà pas trivial le long d'une courbe qui désoriente la surface. Si la surface est orientable, il n'y a pas de sections partout non nulles du fibré tangent sauf dans le cas du tore : c'est une conséquence du théorème de Poincaré-Hopf (voir section 11).

9.2. Connections linéaires. On ne peut pas dériver de façon canonique les sections d'un fibré : il faut faire un choix qui permettent de comparer les fibres infinitésimalement voisines, c'est ce qu'on appelle une connection.

Si $E \rightarrow X$ est un fibré vectoriel différentiable, une *connection* ou *dérivée covariante* ∇ est la donnée pour chaque $V \in T_x X$ et chaque section s d'un élément $\nabla_V s \in E_x$ vérifiant :

- Linéarité en V
- Linéarité en s
- Règle de Leibniz : $\nabla_V f s = f \nabla_V s + df(V)s$

Exprimons la connexion ∇ en coordonnées locales : on se donne une carte avec des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_d)$ et un repère de trivialisations locales $(e_1(x), \dots, e_\alpha(x), \dots, e_N(x))$ de E . Utilisant les axiomes des connexions, il est clair qu'il suffit de se donner les sections locales $\nabla_{\partial_i} e_\alpha = \sum_\beta \Gamma_{i,\alpha}^\beta s_\beta$; les dN^2 fonctions $\Gamma_{i,\alpha}^\beta$ sont arbitraires et déterminent ∇ .

Si le fibré est muni d'une métrique hermitienne ou euclidienne, on demande souvent que ∇ soit compatible avec cette métrique au sens suivant ; pour toute paire de sections s, t de E , on a :

$$d_V \langle s | t \rangle = \langle \nabla_V s | t \rangle + \langle s | \nabla_V t \rangle .$$

Si $d = N = 2$ dans le cas euclidien, cela laisse 6 coefficients Γ .

9.3. Transport parallèle et holonomie. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un chemin différentiable et $e_a \in E_{\gamma(a)}$. Le transport parallèle le long de γ est une famille de vecteurs $e_t \in E_{\gamma(t)}$ tels que $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} e_t = 0$.

En toute rigueur on ne peut pas dériver e_t , mais une extension locale f de e_t et on montre que $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} f$ ne dépend pas du choix de cette extension..

On a existence et unicité.

Le cas le plus important est celui où γ est un lacet, c'est à dire $\gamma(a) = \gamma(b)$: l'endomorphisme $e_a \rightarrow e_b$ de $E_{\gamma(a)}$ est appelé *holonomie* de γ .

Si la connexion est hermitienne (resp. euclidienne), l'holonomie est unitaire (resp. isométrique).

Remarque : si le fibré E est trivial, l'holonomie est dans $GL_+(E)$.

9.4. Courbure d'une connexion. Si V et W sont 2 champs de vecteurs qui commutent, on définit

$$R(V, W)s = -[\nabla_V, \nabla_W]s .$$

On vérifie que R est un tenseur antisymétrique. Plus précisément, $R(V, W)s(x)$ ne dépend que des valeurs de V, W et s en x . L'application $s(x) \rightarrow R(V, W)s(x)$ est un endomorphisme linéaire de E_x .

La courbure est une version infinitésimale de l'holonomie : soit $P_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ le parallélogramme sur X image par M du rectangle donnée en coordonnées locales par : $(0, \varepsilon_1 \partial_u, \varepsilon_1 \partial_u + \varepsilon_2 \partial_v, \varepsilon_2 \partial_v)$. On a :

$$\text{Hol}(P_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = \text{Id} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 R\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) + o(\varepsilon_1 \varepsilon_2) .$$

On voit ainsi immédiatement que si ∇ est euclidienne (resp. hermitienne) $R(V, W)$ est antisymétrique (resp. antihermitienne).

En termes de Γ , on a :

$$R_{i,j} = \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x_i} + [\Gamma_j, \Gamma_i] ,$$

où le commutateur est celui des matrices. On voit ainsi que en général la courbure dépend de façon non linéaire de la connection.

la dépendance est linéaire dans la cas d'un fibré euclidien de dimension 2 ou d'un fibre hermitien de dimension 1, car $SO(2) = U(1)$ est commutatif.

Une connection de courbure nulle est dite *plate*. Si ∇ est plate, le transport parallèle est invariant par homotopie de chemins à extrémités fixées. Cela n'implique pas que le fibré soit trivial. par exemple la connection de Levi-Civita sur le ruban de Möbius euclidien est plate, mais le fibré tangent n'est pas triavial car le ruban de Möbius n'est pas orientable.

9.5. La connection dite de Berry et le théorème adiabatique. Si les E_x sont des sous-espaces d'un espace euclidien ou hermitien F , la *connection géométrique* ou *de Berry* est définie par

$$\nabla_X^B s(x) = \Pi_x ds(X)$$

où Π_x est la projection orthogonale de F sur E_x .

THÉOREME 3.2. (*Le théorème adiabatique*) *Supposons que la matrice hermitienne $A(t)$ admette sur $[0, T]$ une valeur propre $\lambda(t)$ lisse et de multiplicité constante. La solution $X_\varepsilon(t)$ de l'équation différentielle*

$$\varepsilon \frac{dX}{dt} = iA(t)X$$

où $X(0)$ est dans une espace propre de $A(0)$ associé à la valeur propre $\lambda(0)$ admet sur l'intervalle $[0, T]$ l'expression asymptotique :

$$X(t) = e^{i \int_0^t \lambda(u) du / \varepsilon} Y(t) + O(\varepsilon)$$

où $Y(t)$ est le transporté parallèle de $X(0)$ par la connection de Berry associée à l'espace propre $E(t) = \ker(A(t) - \lambda(t))$.

9.6. Le pendule de Foucault. ¹

On peut voir le pendule de Foucault comme un système adiabatique. Si (x, y, z) sont des coordonnées cartésiennes choisies de façon que $z = 0$ soit le plan tangent à la terre, les équations différentielles $x'' + \omega^2 x = 0$, $y'' + \omega^2 y = 0$, $z' = 0$ peuvent être réécrites $X' = iAX$ où $X = (\omega x, -ix', \omega y, -iy', z)$ et A est une matrice symétrique 5×5 ayant 2 espaces propres de dimension 2 associés aux valeurs propres $\pm\omega$. La rotation de la terre, lente par rapport aux oscillations du pendule, est donc donnée par une équation adiabatique :

$$\frac{dX}{dt} = iA(\varepsilon t)X$$

où la donnée initiale est dans la somme des 2 espaces propres de vp $\pm\omega$.

La connection géométrique a une holonomie égale à $\exp(i \int_D k d\sigma)$, où D est une des calotes sphériques limitées par le parallèle local, et donc la période associée est $T/\sin l$ où $T = 24 h$ et l est la latitude.

¹<http://membres.lycos.fr/pantheondeparis/pendule.html>

9.7. Calcul de la courbure dans le cas des surfaces. On va calculer la courbure de la connection de Berry d'une surface de \mathbb{R}^3 . On a, en notant Π la projection orthogonale sur l'espace tangent et \mathcal{X}, \mathcal{Y} 2 champs de vecteurs tangents à la surface X qui commutent :

$$\begin{aligned} K(\mathcal{X}, \mathcal{Y})s &= [\nabla_{\mathcal{Y}}, \nabla_{\mathcal{X}}]s = \Pi(d_{\mathcal{Y}}(d_{\mathcal{X}}s - \langle d_{\mathcal{X}}s | N \rangle N)) - \Pi(d_{\mathcal{X}}(d_{\mathcal{Y}}s - \langle d_{\mathcal{Y}}s | N \rangle N)) \\ &= - \langle d_{\mathcal{X}}s | N \rangle d_{\mathcal{Y}}N + \langle d_{\mathcal{Y}}s | N \rangle d_{\mathcal{X}}N \\ &= \langle s | d_{\mathcal{X}}N \rangle d_{\mathcal{Y}}N - \langle s | d_{\mathcal{Y}}N \rangle d_{\mathcal{X}}N \end{aligned}$$

Et donc

$$\langle K(\mathcal{X}, \mathcal{Y})s | s' \rangle = \langle d_{\mathcal{X}}N | s \rangle \langle d_{\mathcal{Y}}N | s' \rangle - \langle d_{\mathcal{Y}}N | s \rangle \langle d_{\mathcal{X}}N | s' \rangle$$

et en choisissant $s = \mathcal{U}, s' = \mathcal{V}$:

$$\langle K(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\mathcal{U} | \mathcal{V} \rangle = II(\mathcal{X}, \mathcal{U})II(\mathcal{Y}, \mathcal{V}) - II(\mathcal{X}, \mathcal{V})II(\mathcal{Y}, \mathcal{U}) .$$

Cette expression est antisymétrique en \mathcal{X}, \mathcal{Y} et en $\mathcal{U} | \mathcal{V}$, elle est symétrique par rapport à l'échange des 2 paires. On vérifie qu'un tel tenseur est proportionnel au produit des éléments d'aire $d\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{Y})d\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. La constante de proportionnalité se calcule en prenant 2 fois les 2 vecteurs d'une b.o..

En terme de la courbure de Gauß k (voir la section 8.2) et de la forme aire $d\sigma$, on a ainsi :

$$(2) \quad \langle K(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\mathcal{U} | \mathcal{V} \rangle = kd\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{Y})d\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{V}) .$$

et aussi

$$K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = kd\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{Y})J$$

où J est la rotation de $+\pi/2$.

9.8. Connection de Levi-Civita. Soit (M, ds^2) une surface munie d'une métrique riemannienne. Il existe une unique connection euclidienne sur le fibré tangent de M , notée ∇^{LC} , telle que

$$\nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Y} - \nabla_{\mathcal{Y}}\mathcal{X} = [\mathcal{X}, \mathcal{Y}] .$$

On l'appelle *connection de Levi-Civita* de la métrique ds^2 .

Voir une preuve dans [Mil65]. On sait que a priori il y a 6 coefficients à déterminer. La condition précédente appliquée avec les champs ∂_x et ∂_y donne 3 relations et la préservation de la métrique 3 autres. Il suffit de vérifier que ces 6 équations linéaires en les Γ sont indépendantes. Les Γ s'exprime en termes des 6 dérivées premières de E, F, G .

PROPOSITION 3.4. *Si $M \subset \mathbb{R}^3$ avec la métrique induite, la connection de Berry est égale à la connection de Levi-Civita :*

$$\nabla^B = \nabla^{LC} .$$

Il suffit de vérifier les 2 propriétés caractéristiques.

On en déduit que la connection de Berry d'une surface ne dépend que de la 1ère forme fondamentale et donc, d'après l'identification (2), le théorème de Gauß (*theorema egregium*) :

THÉORÈME 3.3. *La courbure de Gauß d'une surface ne dépend que de la 1ère forme fondamentale.*

Ce théorème admet des réciproques partielles : si la courbure est constante égale à 0 (resp. $+1$, -1), la surface est localement isométrique au plan euclidien (resp. à la sphère de rayon 1, au demi-plan de Poincaré).

Par exemple, une surface est dite *développable* si elle est localement isométrique au plan euclidien. Il suffit donc qu'elle soit de courbure de Gauß nulle, ce qui donne l'équation aux dérivées partielles $rt - s^2 = 0$ pour une surface $z = f(x, y)$ où r, s, t sont les dérivées secondes de f . Outre les cônes et les cylindres, on peut obtenir une surface développable en prenant la réunion des tangentes à une courbe C de \mathbb{R}^3 privé de cette courbe. si $\gamma(u)$ est cet arc de courbe paramétré par la longueur, on a $M(u, v) = \gamma(u) + vT(u)$ et $ds^2 = (1 + v^2k^2(u))du^2 + 2dudv + dv^2$ qui ne dépend que de $k(s)$ et peut donc être réalisé par une courbe plane.

Une version discrète du théorème de Gauß : on suppose que X est un polyèdre convexe de \mathbb{R}^3 . La courbure totale et la courbure intrinsèque sont des mesures de Dirac localisées en les sommets.

- La courbure intrinsèque en m_0 est $2\pi - \sum \alpha_j$ où les α_j sont les angles des faces en m_0 .
- La courbure totale est l'aire sur la sphère de l'image par l'application de Gauß d'un lissage convexe du polyèdre près de m_0 .

L'égalité entre les 2 se déduit de la formule suivante où C est un cône convexe de sommet 0 et C^* son dual:

$$\text{longueur}(C \cap S^2) = 2\pi - \text{aire}(C^* \cap S^2)$$

Cette formule équivaut à la formule de Crofton dans la sphère...

On peut démontrer le théorème de Gauß par approximations par des polyèdres et convergence des mesures précédentes vers leurs analogues lisses. En tout cas, cela confirme, si nécessaire, la non trivialité du résultat de Gauß.

9.9. La Formule de Crofton sphérique. Soit G l'ensemble des géodésiques de la sphère (les grands cercles non orientés). G peut être identifié à $S^2/\pm \text{Id} = P^2$ en associant à chaque grand cercle son axe. G est donc muni d'une mesure naturelle dg de masse totale 2π . Soit S une section de Poincaré du flot géodésique de vitesse 1. S est munie d'une mesure donnée par la restriction de la forme de Liouville $dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$. Cela donne une expression locale de la mesure μ . Si on prend la section de Poincaré donnée par les éléments (m, V) où m parcourt un arc de courbe C et V est transverse à C de longueur 1, cette mesure s'écrit $|dg| = \cos\theta|d\theta ds|$ où θ est l'angle de V avec la normale à la courbe. On en déduit que, si C borde un domaine convexe D de S^2 , on a la formule de Crofton sphérique :

$$dg(\{\gamma \mid \gamma \cap D \neq \emptyset\}) = \text{Longueur}(C) .$$

9.10. Le fibré tangent d'une surface riemannienne comme fibré hermitien complexe de rang 1. Si E est un espace euclidien orienté de dimension 2, on peut munir "canoniquement" E d'une structure d'espace vectoriel complexe de dimension 1 : la multiplication par le complexe $i = \sqrt{-1}$ est la rotation de $+\pi/2$. L'action d'une matrice antisymétrique s'identifie à une multiplication par un imaginaire pur. La structure euclidienne donne ainsi lieu à une structure hermitienne dont elle est la partie réelle.

La fibré tangent d'une surface riemannienne orientable peut ainsi être vu comme un fibré hermitien complexe de rang 1 ce qui facilite la vie... En particulier, la

connection de Levi-Civita est une connection hermitienne et sa courbure s'identifie à une 2-forme à valeurs imaginaires pures :

$$K = ikd\sigma .$$

9.11. Champs magnétiques et potentiels magnétiques. Considérons un fibré en droites complexes $L = U \times \mathbb{C}$ au-dessus d'un ouvert U de \mathbb{R}^2 . Munissons L de la structure hermitienne canonique de \mathbb{C} . Une connection ∇ sur L compatible avec cette structure est de la forme $\nabla_V s = ds(V) - iA(u, v)(V)s$ où $A(u, v)$ est une forme linéaire à valeurs réelles $A = \alpha du + \beta dv$. La courbure K de ∇ est la 2-forme $idA = i(\frac{\partial\beta}{\partial u} - \frac{\partial\alpha}{\partial uv})du \wedge dv$. Le champ magnétique associé au potentiel magnétique A s'interprète donc comme la courbure du fibré L . Comme il est connu les effets magnétiques ne sont pas du uniquement au champ, mais au fibré lui-même (effet Aharonov-Bohm).

Soit γ un lacet dans U qui borde un domaine D , on a la formule suivante pour l'holonomie de γ :

$$\text{Hol}(\gamma) = e^{i \int_{\gamma} A}$$

et, en appliquant Stokes :

$$(3) \quad \text{Hol}(\gamma) = e^{\int_D K} .$$

10. La formule de Gauß-Bonnet

10.1. Géodésiques et distance.

DÉFINITION 3.8. Une courbe $\gamma : I \rightarrow X$ est une géodésique si elle vérifie l'équation d'Euler-Lagrange pour l'énergie

$$\mathcal{E}(\gamma) = \int \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt ,$$

autrement dit si la dérivée

$$\frac{d}{du} \mathcal{E}(\gamma_u)|_{u=0} = 0$$

pour toute variation à support compact γ_u de $\gamma = \gamma_0$.

PROPOSITION 3.5. Les géodésiques sont les solutions de l'équation différentielle du second ordre

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$$

Preuve. –

Plaçons-nous pour simplifier dans le cas où X est une surface dans un espace euclidien. Soit $t \rightarrow \gamma_u(t)$ une variation de γ à support dans $[a, b]$. On a :

$$\frac{d}{du}_{u=0} \mathcal{E}(\gamma_u) = 2 \int_a^b \langle \dot{Y} | \dot{\gamma} \rangle dt ,$$

où $Y = \frac{\partial}{\partial u} \gamma$; soit, en intégrant par parties :

$$\frac{d}{du}_{u=0} \mathcal{E}(\gamma_u) = -2 \int_a^b \langle Y | \gamma'' \rangle dt .$$

Comme cela doit être nul pour tout champ de vecteurs tangent à X le long de γ , cela oblige $\gamma''(t)$ à être orthogonal à $T_{\gamma(t)}X$ et donc

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 .$$

□

On définit la distance *intrinsèque* sur une surface à l'aide de la longueur des courbes : si $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ est C^1 , la longueur des γ est $L(\gamma) = \int_a^b ds$. Elle est indépendante du paramétrage de γ .

La distance d'un point A à un point B tous 2 situés sur X est donnée par

$$d_X(A, B) = \inf L(\gamma)$$

où le inf est pris sur les courbes qui joignent A à B en restant sur X .

Existe-t-il toujours une courbe réalisant le minimum ? la réponse est NON.

EXEMPLE 10.1. X est le demi-plan $y > 0$ et $ds^2 = y(dx^2 + dy^2)$. Cet exemple vient des surfaces minimas de révolution.

On a cependant le

THÉORÈME 3.4. Si X est une surface fermée de \mathbb{R}^3 euclidien avec la métrique induite, il existe entre 2 points A et B de X au moins une courbe γ qui réalise la distance et cette courbe paramétrée à vitesse constante est une géodésique.

Transport parallèle le long d'une géodésique : à cause de la proposition 3.5, le vecteur tangent à la géodésique de transporte parallèlement le long de celle-ci. Comme le transport parallèle est isométrique, il conserve l'angle du vecteur avec la géodésique.

10.2. La formule de Gauß-Bonnet locale.

THÉORÈME 3.5. Soit $T = ABC$ un triangle géodésique dont l'intérieur D est homéomorphe au disque, alors on a :

$$\int_D k|d\sigma| = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

où α, β, γ sont les angles ($\in]0, \pi[$) de T .

Preuve.-

On identifie le fibré tangent de X au-dessus du triangle à un fibré hermitien en droites complexes. La connection de Levi-Civita devient dans cette identification une connection hermitienne : elle est \mathbb{C} -linéaire, car compatible avec la métrique. Sa courbure est $ikd\sigma$ d'après la formule (2). On a ainsi, par la formule (3)

$$\text{Hol}(\partial T) = e^{i \int_D k|d\sigma|} .$$

Montrons directement que l'holonomie vaut

$$e^{i(\alpha+\beta+\gamma-\pi)} .$$

Utilisant que le transport parallèle le long d'une géodésique préserve l'angle, il suffit de calculer la contribution de chaque sommet ; celle du sommet A est $\alpha - \pi, \dots$

Donc la formule cherchée est vraie à un multiple de 2π près. Il est clair que ce multiple est nul pour un petit triangle et donc la formule par déformation.

□

COROLLAIRE 3.1. *Si X est à courbure constante k_0 , on a, pour tout triangle géodésique T d'angles α, β, γ :*

$$k_0 \text{aire}(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi .$$

Le cas euclidien correspond à $k_0 = 0$, le cas de la sphère à $k_0 = +1$ et le cas hyperbolique à $k_0 = -1$.

10.3. La caractéristique d'Euler et la formule de Gauß-Bonnet globale. On considère maintenant une surface compacte orientée munie d'une triangulation T ; ajoutant les formules locales précédentes, on obtient :

THÉORÈME 3.6.

$$|V_2| - |V_1| + |V_0| = \frac{1}{2\pi} \int_X k d\sigma .$$

En particulier l'expression de gauche ne dépend pas de la triangulation et celle de droite pas de la métrique. La valeur de ces expressions est $\chi(X)$.

Si X est une surface compacte orientée de \mathbb{R}^3 , l'application de Gauß $G : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ est de degré $\chi(X)/2$

En effet

$$\int_X G^*(d\sigma_{S^2}) = \int_X k d\sigma$$

(relation entre k et le jacobien de G vue à la section 8.2) et le membre de gauche vaut aussi

$$4\pi \text{degre}(G) .$$

11. Singularités des champs de vecteurs

On peut retrouver la caractéristique d'Euler à partir des *champs de vecteurs sur la surface*.

Un champ de vecteurs V sur X est la donnée pour chaque point m de X d'un vecteur tangent $V(m)$ à X en m dépendant continûment de m ; en coordonnées locales, on a :

$$V(u, v) = a(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + b(u, v) \frac{\partial}{\partial v} ,$$

cette écriture rejoint l'intuition qu'on a une notion de dérivée d'une fonction dans une direction tangente à X .

Si $V(m_0) = 0$, on dit que m_0 est un zéro de V .

À tout zéro isolé on associe un nombre entier appelé l'indice du zéro :

si on parcourt un petit cercle (topologique) autour de m_0 on regarde le nombre de tours que fait $V(m)$; ce nombre est indépendant des choix d'orientation. Si le champ linéarisé en m_0 est non singulier, cet indice est donné par le signe du déterminant de la matrice. Cet indice est aussi le degré d'une application du cercle dans lui-même (voir section 7).

Ces indices ont une propriété d'invariance topologique intéressante, donnée par le *théorème de Poincaré-Hopf* :

THÉORÈME 3.7. *Si X est une surface compacte et V un champ de vecteurs n'ayant que des zéros isolés, la somme des indices de tous les zéros est égale à $\chi(X)$.*

En particulier, on retrouve que les seules surfaces compactes qui possèdent des champs de vecteurs partout non nuls sont le tore et la bouteille de Klein.

Dans le cas d'un champ dans le plan n'ayant qu'un nombre fini de zéros, on peut définir un indice à l'infini (en comptant l'opposé du nombre de tours fait par le champ sur un grand cercle) et la somme totale vaut 2 :

En fait Thurston [Thu97] donne une définition purement combinatoire de l'indice d'un champ de vecteurs sur une surface et l'utilise pour donner une preuve de la formule de Poincaré-Hopf et donc de l'invariance topologique de la caractéristique d'Euler.

Donnons 2 démonstrations :

• *Preuve.* –

Soit V_0 et V_1 2 champs de vecteurs n'ayant que des zéros isolés. On va admettre le :

LEMME 3.2. *Il existe un champ de vecteurs V_t ($0 \leq t \leq 1$) dépendant continument de t et n'ayant que des zéros isolés.*

En fait, dans [Arn84] page 252-254, un résultat plus fort est montré (théorème de Chochitaïchvili).

On en déduit que la somme des indices des points singuliers est la même pour V_0 et V_1 . (à faire)

Il reste à identifier cette somme à la caractéristique d'Euler et pour cela on construit un champ de vecteurs adapté à la triangulation.

□

• *Preuve.* –

Soit D un domaine compact à bord lisse Σ de \mathbb{R}^3 et V un champ de vecteurs dans D n'ayant que des singularités isolées et strictement sortant au bord de D . Alors on a :

$$\sum_x \text{Indice}_x(V) = \frac{1}{2} \chi(\Sigma) .$$

On ôte de petits disques au voisinage de chaque singularité et on calcule l'intégrale sur le bord de D privé de ces disques de $K^*(d\sigma_{S^2})$ où $K = V/\|V\|$ de 2 façons :

- Par Stokes, on trouve 0.
- L'intégrale vaut 4π fois le degré de K . On déforme K en l'application de Gauß sans changer le degré.

On applique la formule précédente de la façon suivante : La surface X est plongé dans \mathbb{R}^3 . D est un petit domaine obtenu en épaississant X de ε . Son bord est donc formé de 2 composantes difféomorphes à X . On étend le champ de vecteurs V défini sur X de la façon suivante : D est difféomorphe à $\Sigma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ et on pose $W = V \oplus t \frac{\partial}{\partial t}$. On applique la formule précédente après avoir vérifié que les points singuliers de W sont ceux de V avec les mêmes indices.

□

12. Théorie de Morse

On retrouve la caractéristique d'Euler d'une autre façon ; si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur X , on peut classer les points critiques (ceux où $df = 0$) supposés non dégénérés suivant leur indice qui vaut 0 pour un minimum local, 1 pour un col et 2 pour un maximum local. Alors la théorie de Morse donne l'égalité :

$$\chi(X) = n_0 - n_1 + n_2 ,$$

où n_i est le nombre de points critiques d'indice i .

Par exemple, il n'y a pas de fonctions sur le tore ayant seulement un maximum et un minimum ; il y a forcément 2 points cols s'ils sont non dégénérés.

La preuve utilise la formule de Poincaré-Hopf que l'on applique à un champ de gradient de f .

CHAPITRE 4

NOEUDS

Ce chapitre est une introduction à un domaine actuellement très actif des mathématiques et très lié à la physique : la théorie des noeuds. Un *noeud* est modélisé mathématiquement par une application injective, différentiable et dont la vitesse ne s'annule pas, du cercle dans l'espace orienté de dimension 3. Un problème central est de pouvoir décider de façon calculable si le noeud est trivial (peut se défaire sans couper la ficelle...) ou non. Ce problème n'est pas résolu. On associe au noeud des objets mathématiques calculables (polynômes, nombres) appelés *invariants du noeud* et qui sont insensibles à une déformation du noeud ; si l'invariant n'est pas égal à celui du noeud trivial, on est sûr que le noeud n'est pas trivial. Le problème est donc de trouver des invariants assez fins. On en décrira 2 : le *nombre d'entrelacement* (de 2 noeuds) dû à Gauss et qui intervient en électromagnétisme et le *polynôme de Jones* (introduit dans les années 85 par Vaughan Jones (voir [Jon85])), médaille Fields 90, qui est assez subtil pour distinguer par exemple le noeud de trèfle droit du gauche. On décrira aussi une classe générale d'invariants : les invariants de type fini ou de Vassiliev. Ces invariants définis de façon assez peu constructive sont peut-être des invariants complets, mais on ne le sait pas à ce jour.

On décrira le nombre d'entrelacement de 2 noeuds comme un invariant combinatoire calculable à partir d'un diagramme des noeuds. On écrira ensuite la formule intégrale classique liée au magnétisme (Gauss) pour le calculer. On fera alors un petit détour par la géométrie différentielle globale des courbes de \mathbb{R}^3 pour montrer la formule de White qui relie 3 invariants géométriques associés à un ruban.

On décrira ensuite les nouveaux invariants polynomiaux [Jon85] d'un point de vue combinatoire (voir [Kau91]). Le point de vue *intégrales de Feynman* [Wit89] sera évoqué.

Vassiliev a introduit une famille générale d'invariants qui contient la plupart des invariants connus et dont on peut dire qu'ils sont de type fini ; on en décrira le principe.

Les 2 livres de base sont [BM94] et [Kau91], voir aussi [BZ85].

1. Il y a une mathématique des noeuds

1.1. Historique rapide. Une des contributions les plus anciennes est celle de Gauss dans le cadre du magnétisme (nombre d'entrelacement de 2 noeuds).

En 1867, Lord Kelvin propose un modèle pour les atomes : associer un noeud à chaque atome qui serait ainsi un vortex d'un fluide. Tait développe ensuite le début d'une théorie mathématique et fait les premières tables de noeuds.

Il faut noter vers les années 1920-1930 les contributions d'Alexander (polynôme d'Alexander), de Reidemeister (mouvements élémentaires) et d'Artin (groupe des tresses).

La théorie mathématique des noeuds se développe alors pendant une cinquantaine d'années et était un peu tombée en désuétude lors du coup de tonnerre de la découverte par Jones en 1984 d'un nouvel invariant des noeuds (le polynôme de Jones). La découverte de Jones est assez exemplaire du point de vue scientifique et peut donner lieu à méditation sur l'organisation actuelle de la science. Jones n'était pas du tout un spécialiste des noeuds. Il s'intéressait à la classification des facteurs dans les algèbres de Von Neumann (analyse fonctionnelle). Il a obtenu des algèbres de matrices dont les relations de commutation (équations de Yang-Baxter) étaient proches des relations du groupe de tresses ; des tresses aux noeuds, il n'y a qu'un pas qu'il a franchi avec l'aide de Joan Birman qui est une spécialiste des noeuds.

On assiste ensuite à une explosion de découvertes : version purement combinatoire, nouveaux polynômes, etc.. En 1989, Witten montre que le polynôme de Jones peut être obtenu à partir de la théorie quantique des champs au moyen d'une intégrale de Feynman, donnant ainsi la première définition n'utilisant pas les projections planes du noeud. D'une certaine façon la théorie de Jones-Witten est une extension *non commutative* du travail de Gauss. Le groupe de Lie qui intervient en magnétisme est $U(1)$, alors que l'invariant de Witten est une intégrale de Feynman sur un espace de $SU(2)$ -connections.

En 1990, à Kyoto, Jones et Witten ont tous les 2 reçus la médaille Fields.

Vassiliev a introduit une classe d'invariants assez générale pour contenir les autres invariants de type Jones.

1.2. Qu'est ce qu'un noeud pour un mathématicien ? Il faut imaginer une ficelle dont on noue les 2 bouts, formant ainsi un cercle topologique plongé dans l'espace de dimension 3. On étudie à homéomorphisme près les sous-espaces de \mathbb{R}^3 homéomorphes au cercle. En fait, il faut éviter des courbes trop *sauvages*, c'est pourquoi on se restreint aux noeuds de classe C^1 , i.e. image du cercle par une application de classe C^1 à vitesse partout non nulle.

On pose la :

DÉFINITION 4.1. *Un noeud est une application injective, continument dérivable et dont la vitesse ne s'annule pas de S^1 dans l'espace orienté de dimension 3.*

Si on suppose le noeud C^2 , il existe un petit tube de largeur $\varepsilon > 0$ autour du noeud que l'on peut ainsi épaissir, recouvrant l'intuition physique d'une ficelle qui a une épaisseur non nulle.

On munit l'ensemble \mathcal{N} des noeuds de la *topologie* C^1 : une suite $\gamma_n : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de noeuds converge vers un noeud γ_∞ si les γ_n convergent uniformément ainsi que leurs dérivées vers γ_∞ et sa dérivée. Si on ne prenait que la topologie C^0 tout noeud serait trivial.

2 noeuds sont équivalents si on peut les déformer continument (c'est-à-dire sans utiliser de ciseaux...) l'un dans l'autre. De façon plus formelle :

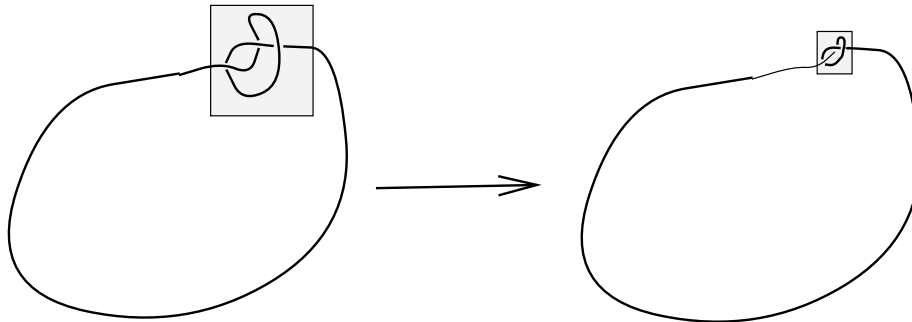
DÉFINITION 4.2. *Deux noeuds γ_1 et γ_2 sont équivalents s'il existe une application continue*

$$F : [1, 2] \rightarrow \mathcal{N}$$

telle que $F(1) = \gamma_1$ et $F(2) = \gamma_2$.

F est une courbe dans l'espace des courbes.

La théorie des noeuds est ainsi une branche de la topologie, ou plus précisément de la topologie différentielle : la différentiabilité permet d'éviter les pathologies

FIGURE 1. On peut défaire un noeud si on prend la topologie C^0

(courbe de Peano, noeuds sauvages). Elle permet aussi d'utiliser les outils du calcul différentiel (linéarisation, formule de Stokes, etc...)

Que veut-on faire ? On veut d'abord représenter un noeud, le **coder** de façon non ambiguë (par un dessin ou une matrice). On veut ensuite pouvoir **décider** si 2 représentations correspondent ou non au même noeud. Pour cela on introduit des **invariants** : un invariant attache à chaque représentation d'un noeud un objet mathématique (nombre, polynôme, groupe, etc..) *calculable* avec la propriété que 2 représentations du même noeud donnent la même valeur à l'invariant. Donc, si l'invariant a une valeur différente pour les 2 représentations, le noeud n'est pas le même ; sinon, on ne peut pas conclure !! La calculabilité est essentielle, car on ne peut pas faire grand chose d'un invariant défini par $I(\gamma) = 0$ si γ est trivial et $I(\gamma) = 1$ si γ ne l'est pas ou même d'un invariant du type $J(\gamma)$ qui est défini comme le nombre minimum de croisements d'une bonne projection de γ . La calculabilité signifie que l'on peut décrire un algorithme (un programme d'ordinateur) qui donne en un temps fini la valeur de l'invariant d'un noeud donné.

Un invariant est dit *complet* s'il sépare les noeuds : si un tel invariant à la même valeur sur 2 noeuds, ils sont équivalents.

On ne connaît pas, à ce jour, d'invariants complets des noeuds. Il est possible que les invariants de Vassiliev le soient.

On connaît des invariants complets pour certains problèmes de topologie (classification des surfaces (voir le chapitre 3), réseaux électriques planaires, voir les articles [Col94], [Col96]). On sait aussi que certains problèmes de topologie sont trop compliqués pour avoir des invariants complets, par exemple les variétés compactes de dimension 4. On montre qu'avoir des invariants complets pour les variétés compactes de dimension 4 donnerait une solution au problème des mots. le problème des mots est celui de savoir décider si 2 groupes donnés par générateurs et relations son isomorphes. On sait par ailleurs que ce problème est insoluble.

2. Représentation planaire et codage des noeuds

On suppose que le noeud est dans \mathbb{R}^3 orienté. On s'intéresse aux projections de ce noeud sur le plan $z = 0$.

Il est clair intuitivement (et l'on peut démontrer, exercice !!) que l'on peut toujours supposer que le noeud n'a aucune tangente verticale et que les points de croisements sont seulement doubles et transversaux. Une telle projection sera

appelée *bonne projection*. La courbe projetée a donc partout une tangente, la projection de la tangente au noeud, n'a pas de points multiples d'ordre ≥ 3 et des points doubles à croisements transverses.

On indique alors à chaque point de croisement quel est le brin qui passe au-dessus de l'autre. Un tel dessin représente un noeud de façon non ambiguë : on dit qu'on a un *diagramme de noeud*. On peut imaginer le noeud comme situé dans le plan $z = 0$ à l'exception de petits voisinages de points doubles.

Bien sûr, deux noeuds équivalents ont des bonnes projections qui donnent des diagrammes de noeuds différents en général. Il est donc important de pouvoir lire l'équivalence de 2 noeuds directement sur leurs diagrammes.

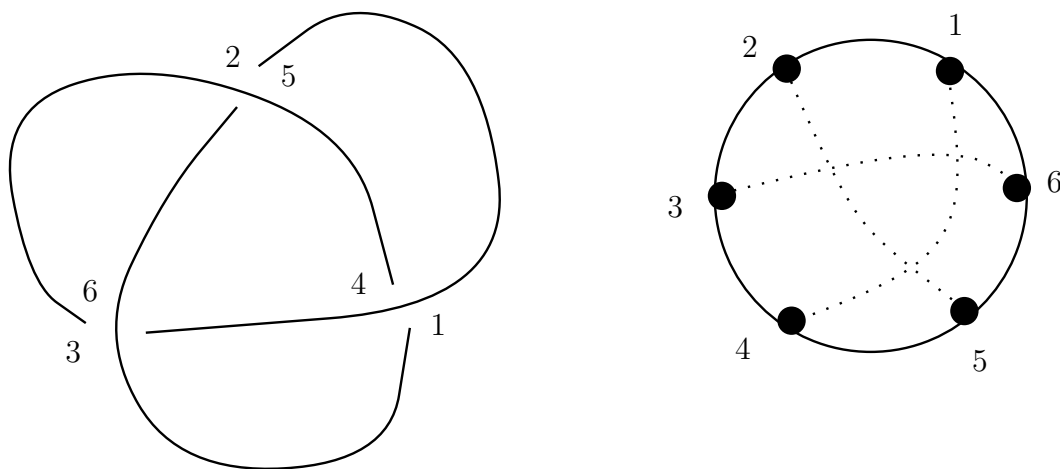


FIGURE 2. Un diagramme du noeud de trèfle droit.

Comme un dessin n'est pas forcément facile à transmettre, ni à mettre dans un ordinateur, on peut aussi donner un codage du diagramme du noeud par une matrice à coefficients entiers à 3 lignes et dont le nombre de colonnes est égal au nombre de points doubles.

On numérote les $2n$ points de croisements sur la courbe fermée (cercle) dans l'ordre où ils arrivent. On remarque alors que les paires sont toutes formées d'un nombre pair et d'un nombre impair. On fabrique alors les 2 premières lignes de la matrice en mettant dans chaque colonne les 2 numéros donnant la même projection : les impairs sur la 1ère ligne, les pairs sur la seconde. On ajoute alors à chaque colonne un ± 1 qui indique l'orientation relative des 2 brins (orientés) (+1 si celui de dessous traverse de droite à gauche quand on parcourt celui de dessus, -1 sinon). Par exemple la matrice associée au noeud de trèfle de la figure 2 est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \\ + & + & + \end{pmatrix} .$$

2 projections de même matrice sont presque les mêmes (elles sont les mêmes sur la sphère de Riemann), en tout cas les noeuds obtenus sont équivalents. Il faut

une information sur le choix de la face de l'infini, par exemple la suite ordonnée de ses sommets, ici : $\{1, 2, 3\}$.

Faire des TP !! La plupart des matrices ne correspondent à aucun diagramme de noeud, mais à un dessin sur une surface plus compliquée ! Etudier ce problème. Ce type de codage est étudié plus en détail dans [Cha94].

Dans la suite, on va calculer les invariants à partir d'un diagramme et non à partir de la matrice. On va remplacer les déformations continues dans l'espace par des déformations continues dans le plan (ce qui est très intuitif) et des déformations combinatoires des diagrammes qui seront locales. On pourra donc calculer directement en utilisant les diagrammes comme symboles du calcul, de même qu'on utilise les chiffres pour représenter les nombres (représentation décimale ou dyadique) et qu'on a des algorithmes pour la somme, le produit, la division, etc... qu'on apprend dans l'enseignement élémentaire.

3. Mouvements de Reidemeister

3.1. Notion de codimension. Si E est un espace vectoriel réel, un sous-espace F de codimension k de E est un sous-espace qui peut être défini par k équations linéaires indépendantes

$$F = \cap_{i=1}^k L_i^{-1}(a_i)$$

où les $L_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ sont des formes linéaires indépendantes. Cette définition ne suppose pas que E soit de dimension finie. Par exemple, si $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, $F = \{f \in E | f(0) = f(1) = 0\}$ est de codimension 2. On étend ceci au cadre non linéaire. Si E est un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert, et $\varphi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des applications C^1 dont les différentielles sont partout indépendantes, si $Z \subset \cap_{i=1}^k \varphi_i^{-1}(0)$, alors Z est de codimension $\geq k$. Exemple : 1) Si $E = C^1([0, 1], \mathbb{R}^2)$ et $Z = \{f \in E | \exists 0 < a < 1, f(a) = 0\}$ est de codimension 2.

2) Si $E = C^2([0, 1], \mathbb{R}^2)$, $Z = \{f \in E | \exists 0 < a < 1, f'(a) = 0\}$ est de codimension 2.

On a le :

THÉORÈME 4.1. *Soit $Z \subset X$ de codimension ≥ 2 . Soient $a, b \in X \setminus Z$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin C^1 tel que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. Il existe un chemin γ_1 qui vérifie $\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = b$ et*

$$\forall t \in [0, 1], \gamma_1(t) \notin Z .$$

3.2. Les mouvements de Reidemeister. Il s'agit d'opérations sur les diagrammes de noeuds qui ne modifient pas le noeud. Il y en a 3, notée R_i , $i = 1, 2, 3$.

Reidemeister a montré que, si on a 2 bonnes projections du même noeud, on peut passer de l'une à l'autre par des mouvements élémentaires R_i ; bien sûr, on ne sait pas combien a priori.

L'idée est la suivante, on fait dans l'espace la déformation d'un noeud à l'autre et si la projection de la déformation fait apparaître d'autres mouvements on déforme la déformation.

Plus précisément, soit \mathcal{N} est l'espace topologique de tous les noeuds, ie

$$\mathcal{N} = \{F : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3\}$$

telles que F est C^1 , injective et à vitesse ne s'annulant pas. Soit p la projection orthogonale de \mathbb{R}^3 sur \mathbb{R}^2 identifié au plan $z = 0$. Soit $\Omega \subset \mathcal{N}$ l'ensemble des noeuds qui se projettent bien (ouvert dense de \mathcal{N}). Le complémentaire de Ω est compliqué,

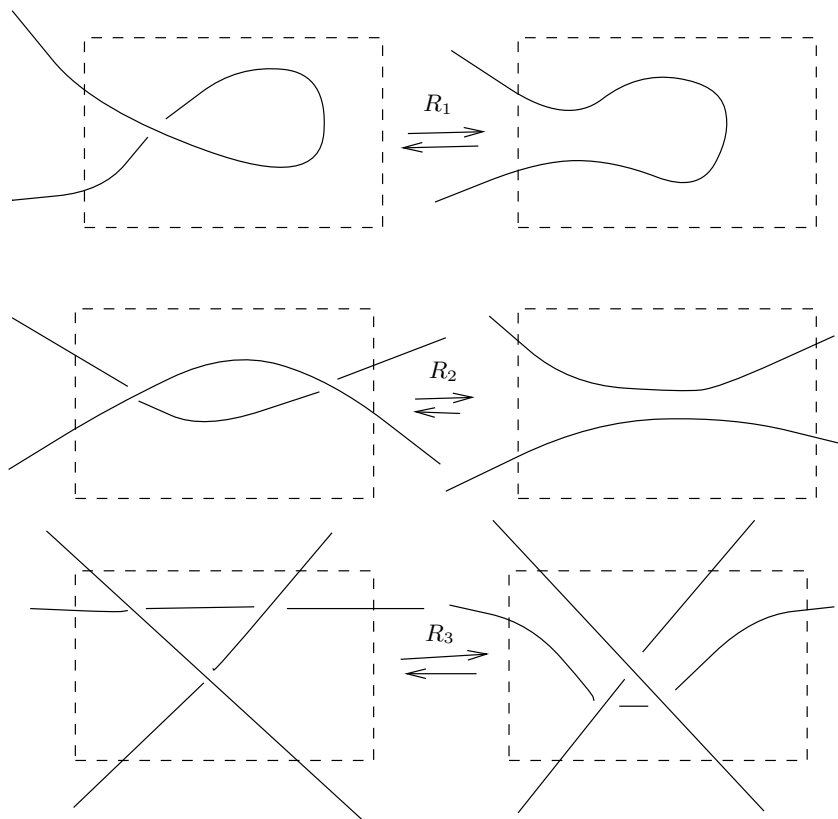


FIGURE 3. Les 3 mouvements de Reidemeister.

mais les parties vraiment compliquées sont de codimension ≥ 2 : plus précisément, $\mathcal{N} \setminus \Omega$ est la réunion de 3 variétés de codimension 1 Z_i , $i = 1, 2, 3$ et d'un ensemble W de codimension 2.

Z_1 est l'ensemble des f ayant une tangente verticale en un point isolé (avec f'' non verticale),

Z_2 est l'ensemble des f dont la projection a 2 brins tangents en 1 point de courbure différente,

Z_3 est l'ensemble des f dont la projection a un croisement triple transversal.

Soit maintenant, γ_1 et γ_2 2 noeuds équivalents et F une homotopie entre eux. On peut déformer F pour qu'elle ne rencontre pas W et croise les Z_i transversalement. Les instants correspondant à ces croisements donnent lieu à des mouvements de Reidemeister pour les diagrammes projetés.

Attention, même pour un noeud trivial, l'équivalence peut utiliser des diagrammes dont le nombre de croisements est très élevé, il n'y a pas de borne a priori sur le nombre des R_i qu'il faut utiliser en fonction de la complexité des diagrammes initiaux.

Figure : exemple de noeud trivial pour lequel aucun mouvement de Reidemeister ne diminue le nombre de croisements. (cf [BZ85] p10).

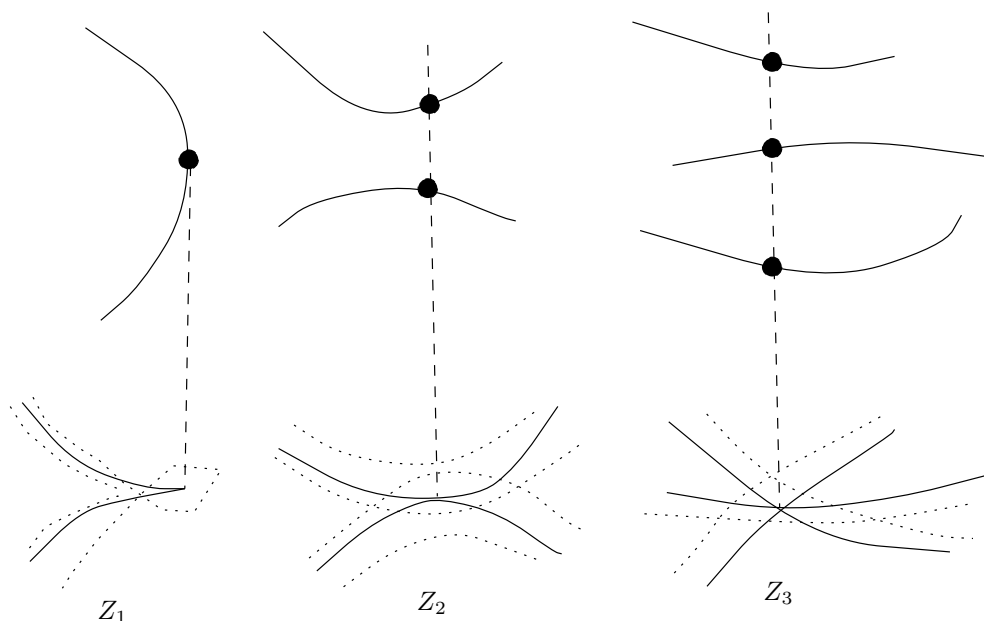
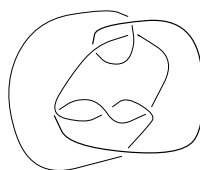
FIGURE 4. Les mauvaises projections des $\gamma \in Z_i$.

FIGURE 5. Ce noeud est trivial, mais les mouvements de Reidemeister augmentent le nombre de croisements

4. Un exemple : le 3-coloriage d'un diagramme de noeud

Coloriage admissible : on choisit 3 couleurs Bleu, Vert et Rouge par exemple et on doit colorier chaque arc du diagramme de façon qu'à chaque croisement on ait soit 3 couleurs distinctes, soit une seule couleur.

DÉFINITION 4.3. On attache alors au diagramme D de noeud le nombre $\nu(D) = 0$ ou 1 suivant qu'il existe ou non un 3-coloriage non trivial.

On voit facilement que $\nu(D) = \nu(D')$ si on passe de D à D' par un mouvement de Reidemeister.

$\nu(D)$ définit donc un invariant du noeud. Calculons $\nu(T)$ où T est le noeud de trèfle. Le diagramme standard admet un coloriage non trivial et donc $\nu(T) = 1$. Donc

PROPOSITION 4.1. *Le noeud de trèfle n'est pas trivial.*

On peut raffiner cet invariant en comptant le nombre de coloriage admissibles. On note $C(D)$ ce nombre qui est un invariant plus fin que $\nu(D)$.

5. Nombre d'entrelacement de 2 noeuds : combinatoire

On décrit le nombre d'entrelacement de 2 noeuds orientés à partir de diagrammes et de l'invariance par les mouvements de Reidemeister.

Soit C_1 et C_2 2 noeuds orientés ne se rencontrant pas et D_1, D_2 un diagramme de cet entrelacs.

On suppose \mathbb{R}^3 orienté et donc le plan des diagrammes de noeuds aussi car on a choisi le dessus et le dessous.

On définit un entier $Lk(D_1, D_2)$ par $Lk(D_1, D_2) = \sum \varepsilon(x)$ où la somme est sur les croisements x où D_2 est au-dessus de D_1 et $\varepsilon(x) = \pm 1$ suivant que D_1 va de droite vers la gauche ou le contraire lorsque que l'on se met sur D_2 orienté, i.e. suivant l'orientation d'un repère (V_2, V_1) où V_i sont les vitesses en x .

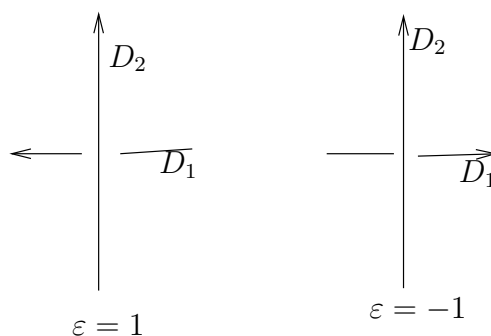


FIGURE 6. Calcul de $\varepsilon(x)$.

On vérifie que $Lk(D_1, D_2)$ est invariant par les mouvements de Reidemeister, que $Lk(D_2, D_1) = Lk(D_1, D_2)$ (non trivial) et que Lk change de signe si on change l'orientation d'un brin. Si on peut faire une homotopie qui sépare les 2 noeuds, il y a un diagramme de l'entrelacs sans croisements des 2 composantes et donc $Lk = 0$. La réciproque est fautive : l'entrelacs de Whitehead a $Lk(W) = 0$. La non trivialité de cet entrelacs sera prouvée avec le polynôme de Jones.

6. Formule de Gauss

On va donner une interprétation topologique directe de $Lk(C_1, C_2)$. Pour cela on considère l'application $G : C_1 \times C_2 \rightarrow S^2$ définie par :

$$(4) \quad G(x_1, x_2) = \frac{x_1 \vec{x}_2}{\|x_1 \vec{x}_2\|} .$$

Alors

PROPOSITION 4.2. $Lk(C_1, C_2) = \text{degré}(G)$.

Preuve.—

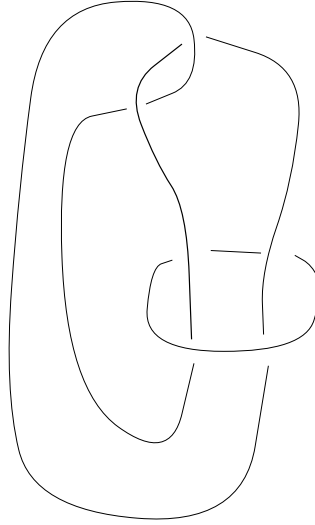


FIGURE 7. L'entrelacs de Whitehead

On suppose que les C_j sont presque contenues dans le plan des diagrammes. On compte le nombre de solutions de $G(x_1, x_2) = N$ où N est le pôle nord. Cela correspond aux croisements des deux diagrammes avec D_2 au-dessus. Il suffit de vérifier que le signe du jacobien est le bon.

□

On peut alors donner une formule intégrale pour $Lk(C_1, C_2)$:

$$(5) \quad Lk(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{\det(dx_1, dx_2, x_1 \vec{x}_2)}{\|x_1 \vec{x}_2\|^{3/2}} .$$

Preuve.—

Soit Ω la forme angle solide de \mathbb{R}^3 . La formule se réécrit :

$$\int_{C_1 \times C_2} G^*(\Omega) = \text{degré}(G) \int_{S^2} \Omega .$$

□

On peut voir cette formule intégrale autrement. Pour $v \in S^2$, on considère la projection de l'entrelacs sur le plan perpendiculaire à V . Pour presque tout v , on a un diagramme d'entrelacs et le nombre $d(v)$ qui donne la formule pour $lk(D_1, D_2)$ dans le plan perpendiculaire à v est constant. On peut alors calculer sa moyenne par rapport à n'importe quelle mesure qui donne encore le nombre d'entrelacement.

7. Auto-entrelacement d'un ruban et formule de White

Soit $C = \{\gamma(s)\}$ un noeud. On se donne un champ de vecteur V de longueur 1 le long de C qui soit en tout point normal à C . Pour $a > 0$ petit, la surface parcourue par les points $\gamma(s) + tV(s)$, $0 \leq t \leq a$ est un ruban R dont l'un des bords est C et l'autre un noeud parallèle C' (et isotope) à C .

On associe à ces données 3 nombres :

le nombre $Lk(C, C')$ d'entrelacement des courbes C et C' ,
la torsion totale $To(R)$ qui mesure l'angle dont tourne V autour de C quand
on parcourt C et qui est donné par

$$To(R) = \frac{1}{2\pi} \int_C \langle \dot{V} | V_1 \rangle ds$$

où V_1 est tel que (\dot{C}, V, V_1) est un repère orthonormé positif,
et le nombre moyen de croisements (whrite) du noeud (indépendant du ruban)
 $W(C)$ donné par

$$W(C) = \frac{1}{4\pi} \int_{C \times C} G^*(\Omega) .$$

où $G(x, y) = \vec{x}\vec{y}$ et Ω est l'angle solide dans \mathbb{R}^3 . $W(C)$ n'est pas un invariant
topologique du noeud.

Remarque : lien avec la connection de Berry. le fibré normal à la courbe étant
un sous-fibré de \mathbb{R}^3 admet une connection naturelle (ou de Berry) introduite dans
le chapitre 3. L'holonomie de cette connection est égale à $\exp(-2i\pi To(R))$.

On a la formule suivante :

THÉORÈME 4.2.

$$Lk(C, C') = To(R) + W(C) ,$$

qui est la formule de White [Poh80].

Dans cette formule, on peut penser $To(R)$ comme une énergie de torsion du
noeud. On peut relaxer la torsion au prix d'une augmentation de W . *Preuve.*–

Cette formule se démontre par application de la formule de Stokes.
Soit Ω l'angle solide dans $\mathbb{R}^3 \setminus 0$. Soit, pour $a > \varepsilon > 0$,

$$D_\varepsilon = \{(s_0, s_1, t) \mid s_0, s_1 \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}, 0 \leq t \leq a, (s_0 - s_1)^2 + t^2 \geq \varepsilon^2\} .$$

On oriente D_ε par $ds_0 \wedge ds_1 \wedge dt$. Soit $F : D_\varepsilon \rightarrow (\mathbb{R}^3)^2$ donnée par
 $F(s_0, s_1, t) = (\gamma(s_0), \gamma(s_1) + tV(s_1))$, $H = G \circ F$ et $\omega = H^*(\Omega)$.
On a :

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_{D_\varepsilon} d\omega .$$

Le bord de D_ε s'écrit $\partial D_\varepsilon = X_0(\varepsilon) \cup X_1 \cup X_2(\varepsilon)$ avec $X_0(\varepsilon) =$
 $\{(s_0, s_1, 0) \mid |s_0 - s_1| \geq \varepsilon\}$, $X_1 = \{(s_0, s_1, a)\}$ et $X_2(\varepsilon) = \{(s, s +$
 $\varepsilon(\cos \theta T(s) + \sin \theta V(s))\}$ avec les orientations données respective-
ment par $ds_0 \wedge ds_1$, $-ds_0 \wedge ds_1$ et $ds_0 \wedge d\theta$.

On a donc

$$(6) \quad \int_{X_1} \omega = - \int_{X_2(\varepsilon)} \omega - \int_{X_0(\varepsilon)} \omega .$$

Les 2 intégrales du membre de droite ont des limites lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$- \int_{X_0(\varepsilon)} \omega \rightarrow \int_{C \times C} \omega = 4\pi W(C). \quad \int_{X_2(\varepsilon)} \omega \rightarrow \int_0^T ds \int_0^\pi d\theta \det(K, \frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial K}{\partial \theta}).$$

On vérifie que $\det(K, \frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial K}{\partial \theta}) = -\sin \theta$ et donc

$$- \int_{X_2(\varepsilon)} \omega \rightarrow 2 \int_0^T \langle \dot{V}(s) | V_1(s) \rangle ds = 4\pi To(C) .$$

□

DÉFINITION 4.4. *Le ruban R est dit plat si $\langle \dot{V} | V_1 \rangle = 0$. Cela équivaut à dire que la section V du fibré normal est parallèle pour la connection de Berry, i.e.: $\nabla^B V = 0$.*

Si le ruban est plat, on a $Lk(C, C') = W(C) \in \mathbb{Z}$. Réciproquement :

PROPOSITION 4.3. 1) *Le ruban est plat si la métrique induite par celle de \mathbb{R}^3 sur R est localement euclidienne (le ruban est dit aussi développable).*

2) *C étant donnée, il existe un ruban plat s'appuyant sur C ssi $W(C) \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, on les obtient tous en faisant tourner l'un d'eux d'un angle constant.*

Preuve.—

Si on pose $\dot{V} = \alpha T + \beta V_1$ où $T = \dot{\gamma}$, la métrique induite g est donnée par

$$g = ((1 + t\alpha)^2 + t^2\beta^2)ds^2 + dt^2$$

qui est plate ssi $\beta = 0$. □

Dans le cas d'un noeud presque planaire et de la parallélisation planaire, on a $To \sim 0$. De plus $Lk(C, C') = W(C)$ se calcule de façon combinatoire.

8. Le polynôme de Jones

La construction combinatoire est très simple. Soit D un diagramme de noeud ou d'entrelacs orienté. Un *état* de D est obtenu en remplaçant chaque croisement par 2 brins qui ne se croisent pas, cela est possible de 2 façons possibles notées A et B suivant la figure ci-dessous.

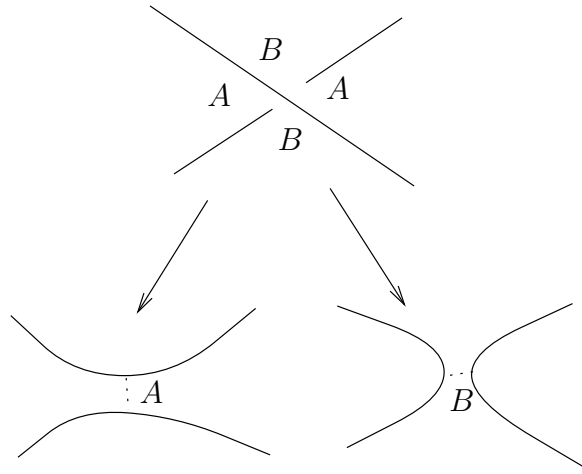


FIGURE 8. A et B

Etant donné un diagramme D à p croisements, il y a donc 2^p états S . On note i_S, j_S le nombre de A et de B de l'état S et $|S|$ le nombre de cercles obtenus. On définit le crochet de Kauffman de D par :

$$(7) \quad \langle D \rangle = \sum_S A^{i_S} B^{j_S} d^{|S|-1} .$$

Par exemple pour le noeud de trèfle

$$\langle T \rangle = 3A^2B + (A^3 + 3AB^2)d + B^3d^2 .$$

On peut calculer $\langle D \rangle$ récursivement par la formule donnée dans la figure 9.

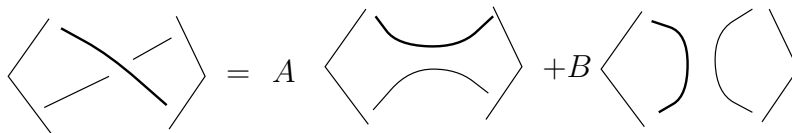


FIGURE 9. Formule récursive pour le $\langle D \rangle$.

La formule donnée dans la figure 9 exprime la variation de $\langle D \rangle$ lorsqu'on fait disparaître un croisement. C'est une sorte de différentielle de $\langle D \rangle$ (au sens variation infinitésimale si le nombre de croisements est considéré comme grand). Le crochet $\langle D \rangle$ qui est une somme de $2^p \gg 1$ termes est lui l'analogie d'une intégrale. La théorie de Vassiliev considère des invariants de type polynôme au sens de ce calculus et une formule de Taylor est donnée par l'intégrale de Kontsevich.

Le crochet $\langle D \rangle$ n'est pas un invariant. On montre que, si on a les relations : $B = A^{-1}$ et $d = -A^2 - A^{-2}$, $\langle D \rangle$ qui peut s'écrire en terme de A seulement est invariant par les mouvements de Reidemeister R_2 et R_3 . On pose alors

$$\mathcal{V}_D(A) = (-A^3)^{-W(D)} \langle D \rangle$$

qui est un polynôme de A seulement. Il faut remarquer que dans cette formule $\langle D \rangle$ ne dépend pas des orientations. Seul $W(D)$ en dépend lorsqu'il y a plusieurs composantes. Dans le cas d'un noeud, \mathcal{V}_D ne dépend donc pas de l'orientation.

THÉORÈME 4.3. \mathcal{V}_D est invariant par les 3 mouvements de Reidemeister et définit donc un invariant de l'entrelacs appelé polynôme de Jones.

9. Propriétés du polynôme de Jones

9.1. Chiralité. Désignons par K^* l'entrelacs obtenu comme image miroir de K . Un diagramme possible de K^* est obtenu en changeant le dessus en dessous pour tous les croisements du diagramme. On a :

PROPOSITION 4.4. Pour tout entrelacs orienté K , $\mathcal{V}_{K^*}(A) = \mathcal{V}_K(A^{-1})$.

En effet $W(K^*) = -W(K)$ et $\langle K^* \rangle (A, B, d) = \langle K \rangle (B, A, d)$.

9.2. Orientation. Soit K un entrelacs orienté et \bar{K} l'entrelacs obtenu en changeant l'orientation de toutes les composantes de K . On a la :

PROPOSITION 4.5. $\mathcal{V}_{\bar{K}} = \mathcal{V}_K$ et si $K = K_1 \cup K_2$ où les K_j sont des entrelacs non entrelacés entre eux, $\mathcal{V}_{K_1 \cup K_2} = A^{12 \text{ Lk}(K_1, K_2)} \mathcal{V}_{K_1} \mathcal{V}_{K_2}$.

Cette proposition résulte de la relation

$$W(K_1, \bar{K}_2) = W(K_1, K_2) - 4\text{lk}(K_1, K_2) .$$

9.3. Réunion disjointe. Soient K_1 et K_2 2 entrelacs disjoints, alors :

PROPOSITION 4.6.

$$\mathcal{V}_{K_1 \cup K_2} = d \cdot \mathcal{V}_{K_1} \mathcal{V}_{K_2} .$$

9.4. Relation de Skein. On a la relation suivante

$$(8) \quad A^4 \mathcal{V}_{K_+} - A^{-4} \mathcal{V}_{K_-} = -(A^2 - A^{-2}) \mathcal{V}_{K_0}$$

où K_{\pm} et K_0 sont donnés par la figure 10.

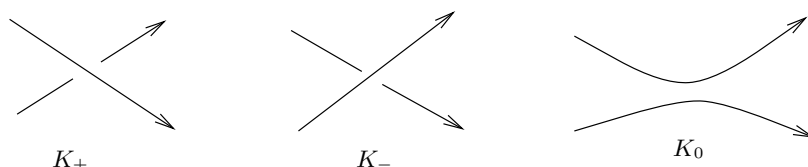


FIGURE 10. Relation skein

Cette relation est importante, car si on a un invariant d'entrelac qui vérifie une relation *skein* et qui est connue sur le noeud trivial, cet invariant est uniquement déterminé. En particulier, cela permet d'identifier $\mathcal{V}_K(A)$ au polynôme de Jones original $\mathcal{V}_K(t)$ qui est obtenu en posant $t = A^{-4}$. Une relation *skein* avait déjà été trouvée par Conway dans les années 70 pour le polynôme classique d'Alexander $\nabla_K(z)$ qui lui date des années 20 :

$$(9) \quad \nabla_{K_+} - \nabla_{K_-} = z \nabla_{K_0} .$$

Elle est aussi importante pour le calcul pratique ainsi que pour voir que les invariants de Vassiliev sont plus fins que le polynôme de Jones.

En fait on peut calculer le polynôme de Jones (ou d'Alexander ou HOMFLY) à partir d'une relation skein et de la valeur pour le noeud trivial. En effet, par application au huit on trouve la valeur de l'invariant pour l'entrelacs trivial à 2, puis un nombre quelconques de composantes. On raisonne ensuite par récurrence sur le nombre de croisements d'un diagramme de l'entrelacs : il suffit de connaître l'invariant pour un entrelacs trivial de même projection, en effet le changement de passage à un croisement s'exprime par la relation skein en terme de l'invariant sur des diagrammes avec moins de croisements. Par contre la relation skein ne prouve pas l'existence de l'invariant.

9.5. Entrelacs. Soit $K = (K_1, \dots, K_l)$ un entrelacs formé de l noeuds. Il est facile de calculer le polynôme de Jones lorsque les noeuds sont séparés (contenus dans des cubes disjoints) ; on a alors :

$$(10) \quad \mathcal{V}_K(A) = (-A^2 - A^{-2})^{l-1} \mathcal{V}_{K_1}(A) \cdots \mathcal{V}_{K_l}(A)$$

On en déduit un test pour savoir si un entrelacs est entrelacé : c'est le cas si les 2 membres de l'équation précédente sont différents.

On peut ainsi tester les entrelacs *Bo* et *Wh*.

10. Exemples

1) Pour le noeud de trèfle *Tr*, on a :

$$\mathcal{L}(Tr) = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16} ,$$

alors que, pour son image miroir, il faut changer A en A^{-1} qui donne un polynôme différent. Le noeud de trèfle n'est donc pas équivalent à son image miroir.

2) Pour l'exemple de la figure 7, on trouve

$$\mathcal{L}(Wh) = A^8 - 2A^4 + 1 - 2A^{-4} + A^{-8} - A^{-12} .$$

Cela prouve que les 2 composantes sont nouées, car chacune est triviale.

3) Calculer $\mathcal{L}(Bo)$ où Bo est donné sur la figure 11.

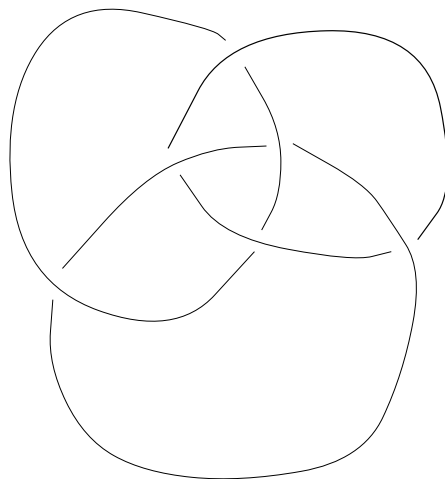


FIGURE 11. L'entrelacs borroméen.

4) Calculer $\mathcal{L}(Hu)$ où Hu est le noeud de 8. Vérifier que $\mathcal{L}(Hu) = \mathcal{L}(Hu^*)$ et vérifier directement que $Hu = Hu^*$.

11. Lien avec la mécanique statistique

11.1. Le modèle de Potts. Soit $G = (V, E)$ un graphe fini. Un état e de G est une fonction de V à valeurs dans l'ensemble à q éléments $S_q = \{1, \dots, q\}$. On définit l'énergie de e par

$$\mathcal{E}(e) = \sum_{\{i,j\} \in E} \delta(e(i), e(j))$$

où δ est le symbole de Kronecker, et la fonction de partition

$$Z_G(q, T) = \sum_{e \in S_q^V} e^{-\frac{1}{kT} \mathcal{E}(e)} .$$

Remarquons que lorsque la température T est nulle, la fonction de partition $Z_G(q, O^+)$ est onnée par le nombre d'états d'énergie nulle qu'on peut interpréter des coloriations *admissibles* de G avec q couleurs (admissible signifie que 2 sommets voisins ont des couleurs distinctes).

Le cas $q = 2$ est le fameux modèle d'Ising.

11.2. Les polynômes chromatiques et dichromatiques d'un graphe.

Le polynôme dichromatique du graphe G peut être défini par la relation de récurrence suivante : si $G = (V, E)$ est un graphe et $\{1, 2\} \in E$, on définit les graphes $R_{1,2}(G) = (V, E \setminus \{1, 2\})$ (ôter l'arête $\{1, 2\}$) et $C_{1,2}(G) = (V', E')$ (contracter l'arête $\{1, 2\}$) où V' est le quotient de V par l'identification des sommets 1 et 2 et E' est la projection de E dans le quotient précédent.

DÉFINITION 4.5. *Le polynôme dichromatique $Z_G(q, v)$ est caractérisé par les relations :*

- 1) $Z_\bullet = q$,
- 2) $Z_{\cup G} = qZ_G$,
- 3) $Z_G = Z_{R_{1,2}(G)} + vZ_{C_{1,2}(G)}$. *Le polynôme $Z_G(q, -1) = C_G(q)$ s'appelle le polynôme chromatique de G .*

Si on pose $v = e^{-1/kT} - 1$, la fonction de partition du modèle de Potts s'identifie au polynôme dichromatique. Le polynôme chromatique correspond à $T = 0$: dans ce cas une configuration d'énergie minimale correspond à un coloriage admissible de G avec q couleurs. $C_G(q)$ est le nombre de coloriages admissibles de G avec q couleurs.

11.3. Graphe médial et noeuds alternés. Soit G un graphe planaire connexe, on lui associe son graphe médial dont les sommets sont les milieux des arêtes de G et les arêtes joignent les sommets consécutifs de chaque face de G . On colorie en noir une région sur 2 de façon que la région non bornée ne soit pas noircie. On peut inverser l'opération à partir d'une projection d'entrelacs connexe. On associe le diagramme alterné obtenu en mettant des A sur les angles noirs.

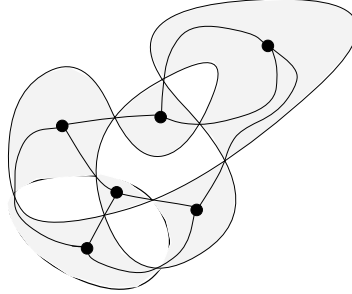


FIGURE 12. Le graphe médial et le diagramme alterné associé

11.4. Du crochet de Kauffman d'un noeud alterné au polynôme dichromatique de son graphe médial. On peut retraduire le polynôme dichromatique d'un graphe planaire G en terme d'un polynôme crochet pour le graphe médial de G .

PROPOSITION 4.7. *Soit $N = |V|$, on a :*

$$(11) \quad Z_G(q, v) = q^{\frac{N+1}{2}} \langle q^{-1/2}v, 1, q^{1/2} \rangle$$

où $\langle A, B, d \rangle$ est le crochet de Kauffman du diagramme alterné associé à G , défini par la formule 7.

Preuve.—

Un choix S de A et B en chaque sommet du médial est appelé un état de D . On considère le régionnement obtenu à partir des régions noires du graphe médial en coupant les connections B et en élargissant les connections A . Soit S un état, $\|S\|$ le nombre de régions noires obtenues, $i(S)$ le nombre de A , $|S|$ le nombre de circuits. Il résulte de la formule d'Euler que

$$2\|S\| = N - i(S) + |S| .$$

On part alors de :

$$Z_G(q, v) = \sum_S q^{\|S\|} v^{i(S)} .$$

□

11.5. Les réseaux électriques planaires. L'utilisation du graphe médial dans la théorie des réseaux électriques planaires se révèle un outil intéressant : on peut retraduire les lois d'Ohm et de Kirchoff sur le graphe médial. Les transformations électriques élémentaires (parallèle, série, étoile-triangle) se traduisent en termes de mouvements de type Reidemeister pour le graphe médial. Tout ceci est traité dans [Col96].

11.5.1. *Le graphe médial d'un REP.* Soit $G = (V, V_0, E)$ un graphe planaire avec $V_0 \subset V$ l'ensemble des terminaux. On supposera que le graphe est tracé dans un disque et que les sommets terminaux sont sur le bord. On notera $\rho_{i,j} > 0$ la conductance de l'arête $\{i, j\}$. On note x_i , $i \in V$ les valeurs du potentiel électriques et $J_{i,j}$ le courant dans l'arête $\{i, j\}$ orientée de i vers j . On a les lois d'Ohm :

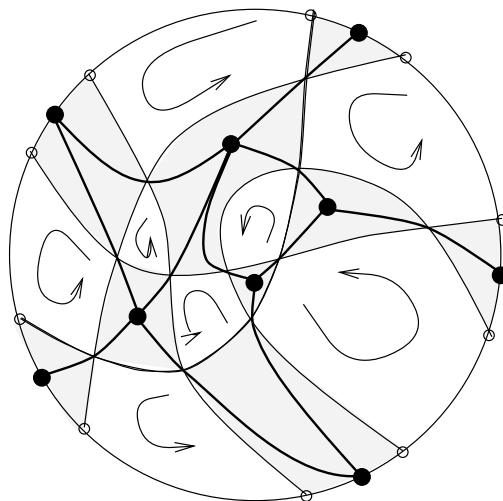


FIGURE 13. Un réseau électrique planaire et son graphe médial

$$I_{i,j} = \rho_{i,j}(x_i - x_j)$$

et de Kirchoff pour les sommets intérieurs :

$$\forall i \in V \setminus V_0, \sum_{i,j} I_{i,j} = 0 .$$

La donnée de $x \in \mathbb{R}^{V_0}$ détermine de façon unique les potentiels et courants à l'intérieur. On appelle réponse du réseau l'application R qui, à $x \in \mathbb{R}^{V_0}$, associe les courants sortants par les terminaux $I \in \mathbb{R}^{V_0}$. Il est facile de voir que l'application R est symétrique.

DÉFINITION 4.6. *Deux réseaux ayant même ensemble V_0 de terminaux seront dits électriquement équivalents s'ils ont même réponse.*

On introduit le graphe médial $M(G)$ de G . Les arêtes de G correspondent aux sommets de $M(G)$ qui sont donc affectés de la conductance correspondante. On colorie les régions de façon à colorier en noir les régions contenant un sommet de G et en blanc les autres. Considérons une configuration d'équilibre électrique, chaque région noire est affectée du potentiel du sommet de G qui y est ; le courant électrique se décompose en une somme de courants I_c affectés aux cycles qui sont en bijection avec les régions blanches. La loi d'Ohm prend alors une forme symétrique entre courants et potentiels. En chaque sommet de $M(G)$, on a :

$$I_c - I_{c'} = \rho_{i,j}(x_i - x_j)$$

où c et c' sont les 2 cycles qui contiennent l'arête $\{i, j\}$.

11.5.2. Représentation par des pavages. La figure 14 montre une façon d'associer à la donnée d'un réseau électrique planaire à 2 terminaux et d'une donnée d'un équilibre électrique dessus un pavage d'un rectangle. On en déduit le joli résultat suivant : si un rectangle admet un pavage par des carrés (de côtés arbitraires) le rapport de ses côtés est rationnel. Cela résulte du fait que la résistance globale d'un réseau dont toute les résistances élémentaires valent 1 est rationnelle.

11.5.3. Les transformations électriques. On voit sur la figure 15 la correspondance entre les transformations électriques élémentaires et des mouvements de type Reidemeister pour le graphe médial.

11.5.4. Equivalence de réseaux électriques. On définit 2 notions d'équivalence pour des réseaux électriques. L'*équivalence électrique* donnée par la définition 4.6 et l'*équivalence géométrique* donnée par

DÉFINITION 4.7. *2 réseaux électriques sont géométriquement équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par des transformations électriques élémentaires*

En fait pour des réseaux planaires les 2 notions sont équivalentes ainsi que nous l'avons montré dans [Col96]. La démonstration utilise de façon essentielle la représentation par le graphe médial et donne aussi pour chaque classe d'équivalence les réseaux minimaux (au sens d'avoir un nombre minimum d'arêtes) de cette classe ; ils sont caractérisés par le fait que leurs graphes médial est tendu, i.e. il n'admet pas de composante fermée et 2 cordes quelconques se coupent en au plus un point.

12. La formule de Witten

E. Witten a donné une expression du polynôme de Jones sans recourir aux diagrammes bidimensionnels. E. Witten exprime le polynôme de Jones comme la fonction de partition d'un système quantique dont il donne le lagrangien. Soit A

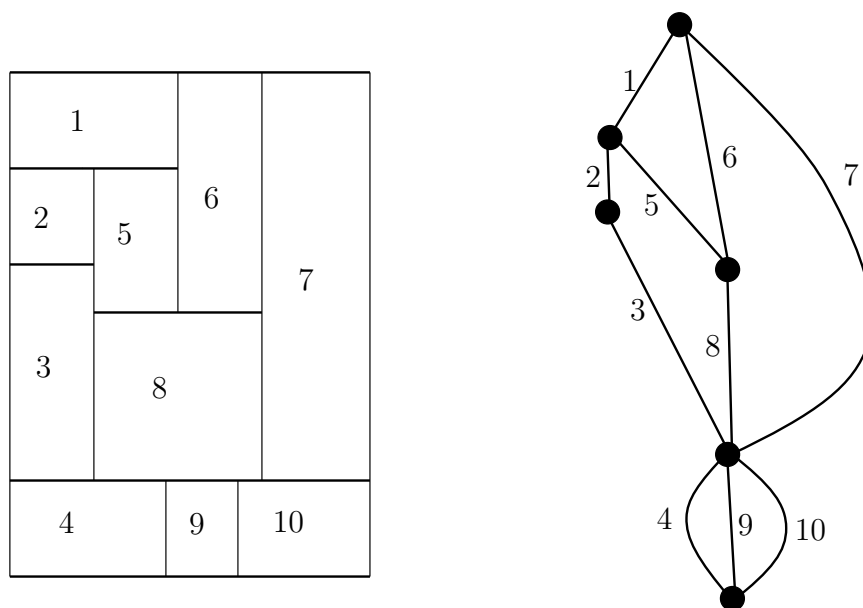


FIGURE 14. Réseaux électriques et pavage associé

une 1-forme sur \mathbb{R}^3 nulle à l'infini et à valeurs dans l'algèbre de Lie de $SU(2)$. On définit le lagrangien de Chern-Simons par :

$$CS(A) = \int_{\mathbb{R}^3} \text{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) .$$

On définit aussi les holonomies des lacets γ par $h_\gamma(A) \in SU(2)$ et les *lacets de Wilson* $W_\gamma(A)$ qui sont les traces des $h_\gamma(A)$. On définit alors :

$$(12) \quad Z(K) = \int e^{\frac{ik}{4\pi} CS(A)} |dA|$$

(c'est une intégrale fonctionnelle sur les connexions) et, pour un entrelacs $K = \{\gamma_i\}$,

$$(13) \quad \mathcal{L}_K(k) = \frac{1}{Z(K)} \int \prod W_{\gamma_i}(A) e^{\frac{ik}{4\pi} CS(A)} |dA| .$$

On a alors :

$$\mathcal{L}_K(k) = V_K(e^{\frac{2i\pi}{k+2}}) .$$

13. Les invariants de Vassiliev

Vassiliev a introduit dans les années 90 une classe générale d'invariants (voir [Vas90] et aussi [Bir93]) qu'on peut aussi appeler *invariants de type fini*. L'idée est d'étendre un invariant de noeuds

$$I : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

en un invariant des noeuds avec un nombre fini de points doubles transversaux.

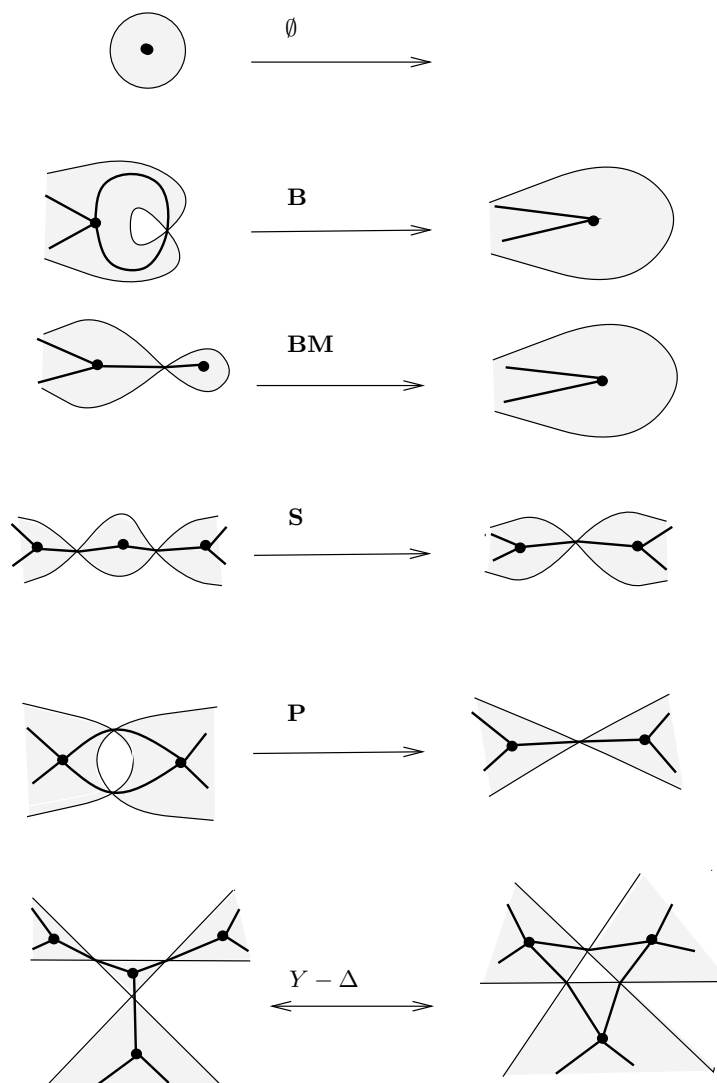


FIGURE 15. Les transformations électriques élémentaires

13.1. Noeuds avec n points doubles et leurs diagrammes de cordes.

DÉFINITION 4.8. *Un diagramme de cordes à n cordes est la donnée de n paires de points distincts sur le cercle S^1 . On représente un tel diagramme au moyen de traits pointillés qui joignent les points qui se correspondent (voir figure 16). On note D_n l'ensemble fini des diagrammes à n cordes.*

DÉFINITION 4.9. *On note \mathcal{N}_n l'ensemble des applications C^1 de S^1 dans \mathbb{R}^3 dont la vitesse ne s'annule pas et qui ont exactement n points doubles avec des croisements transverses. En particulier $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$.*

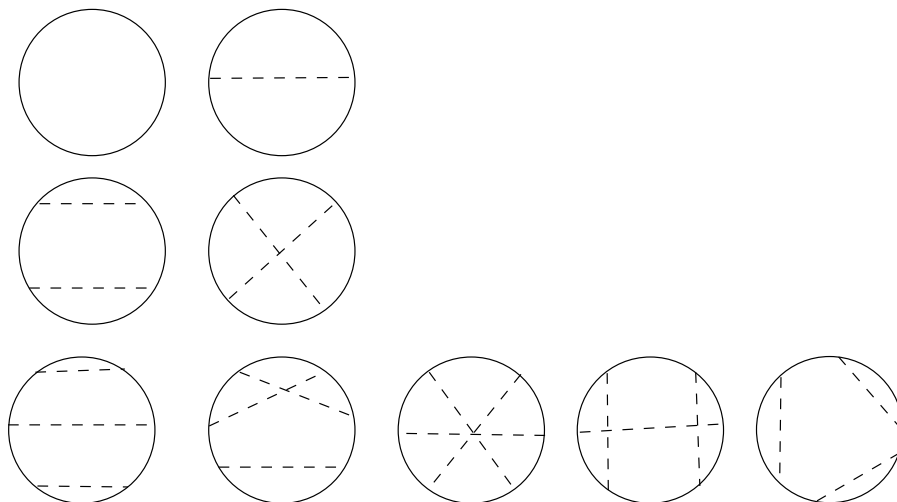


FIGURE 16. Les diagrammes de cordes à 0, 1, 2 et 3 cordes

On a une application naturelle $\gamma \rightarrow [\gamma]$ de \mathcal{N}_n dans D_n en marquant les points doubles sur le cercle au fur et à mesure de leur apparition et en reliant les points dont l'image est la même.

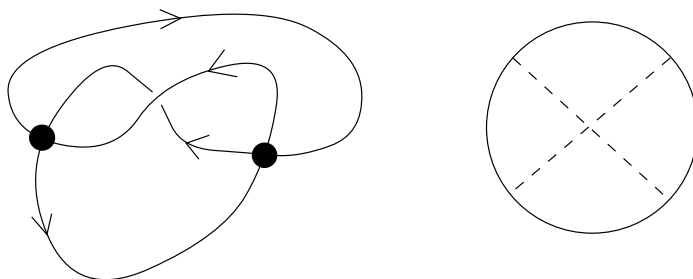


FIGURE 17. Diagramme associé à un noeud à 2 points doubles

Le lemme suivant sera crucial :

LEMME 4.1. *Si γ et γ' sont dans \mathcal{N}_n et si $[\gamma] = [\gamma']$, il existe une homotopie γ_t de γ à γ' (pour la topologie C^1) qui est telle que $\gamma_t \in \mathcal{N}_n \cup \mathcal{N}_{n+1}$.*

13.2. Extension des invariants de noeuds aux noeuds avec des points doubles. Soit $\gamma \in \mathcal{N}_n$ et $z_0 \in \mathbb{R}^3$ un point double de γ , il existe 2 lacets $\gamma_+(z_0)$ et $\gamma_-(z_0)$ proches de γ , qui sont dans \mathcal{N}_{n-1} et tels que $\gamma_+ - \gamma_-$ soit une boucle orientée positivement autour de γ près de z_0 .

On a la proposition de base suivante :

PROPOSITION 4.8. *Soit $I : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une unique extension de I (notée encore I) aux \mathcal{N}_n qui vérifie pour toute désingularisation*

$$I(\gamma_+(z_0)) - I(\gamma_-(z_0)) = I(\gamma) .$$

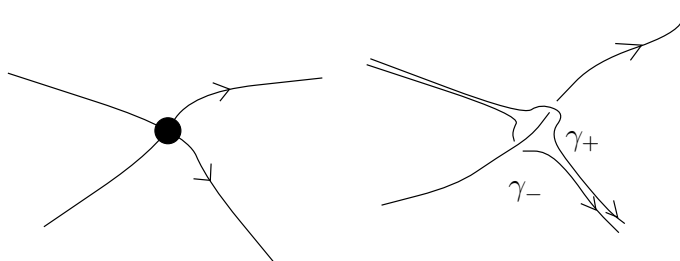


FIGURE 18. Désingularisation d'un noeud

13.3. Les invariants de Vassiliev.

DÉFINITION 4.10. Soit I un invariant de noeuds (et son extension aux noeuds singuliers), on dit que I est un invariant de Vassiliev de degré n si I ne s'annule pas identiquement sur \mathcal{N}_n et s'annule sur les \mathcal{N}_p dès que $p > n$. On note V_n l'espace des invariants de Vassiliev de degré $\leq n$.

On définit aussi le symbole :

DÉFINITION 4.11. Si $I \in V_n$, $[I] : D_n \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par

$$[I](d) = I(\gamma)$$

où $\gamma \in \mathcal{N}_n$ est tel que $[\gamma] = d$.

C'est bien défini à cause du lemme et l'application linéaire

$$[] : V_n \rightarrow \mathcal{F}(D_n, \mathbb{R})$$

a pour noyau V_{n-1} . On en déduit que la dimension de V_n est finie. Plus précisément

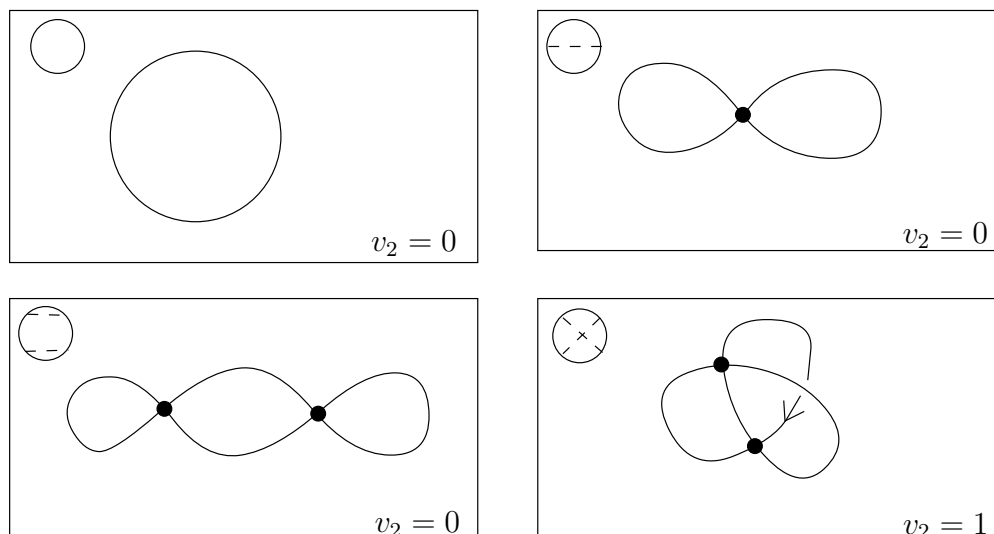
$$v_n = \dim V_n \leq |D_0| + |D_1| + \dots + |D_n|.$$

En fait la suite des premiers v_i est connue et vaut $0, 0, 1, 2, 5, 9, 18, 32, \dots$.

13.4. L'invariant v_2 . Le premier espace non trivial est V_2 qui est de dimension 1. Pour se donner un élément de V_2 on se donne pour chaque diagramme de D_0 , D_1 ou D_2 un noeud ayant ce symbole et la valeur de v_2 sur ces 3 noeuds (elle n'est pas arbitraire). Une fois connue la valeur pour ces 3 noeuds l'invariant est connu pour tous. En effet par des homotopies dans $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ on ramène tout noeud de \mathcal{N}_1 au noeud de la table et de même par des homotopies à valeurs dans $\mathcal{N}_0 \cup \mathcal{N}_1$ on ramène tout noeud au noeud trivial. On peut s'exercer et calculer v_2 pour le noeud de trèfle à partir de la table.

13.5. Le polynôme de Jones et les invariants de Vassiliev. Le polynôme de Jones est déterminé par les invariants de Vassiliev. Soit $\mathcal{V}_L(t)$ le polynôme de Jones de L . On pose $t = e^u$ et on écrit la relation de skein. Elle montre que $\mathcal{V}_{L_+}(e^u) - \mathcal{V}_{L_-}(e^u)$ est divisible par u . On en déduit que le coefficient de u^n dans $\mathcal{V}_L(e^u)$ est un invariant de Vassiliev d'ordre $\leq n$. En particulier, $\mathcal{V}_L(1) = 1$ et $\mathcal{V}'_L(1) = 0$ pour tout noeud alors que $\mathcal{V}''_L(1) \in V_2$.

On considère comme plausible que les invariants de Vassiliev forment un système complet d'invariants...

FIGURE 19. Table pour v_2

13.6. L'intégrale de Kontsevich. Si on a un invariant de Vassiliev de degré n , il y a des relations linéaires entre les valeurs de son symbole sur les diagrammes de cordes. Ce sont les relations dites à 1 terme (1T) et à 4 termes (4T) qui traduisent pour les diagrammes de cordes les mouvements de Reidemeister. Par exemple, on

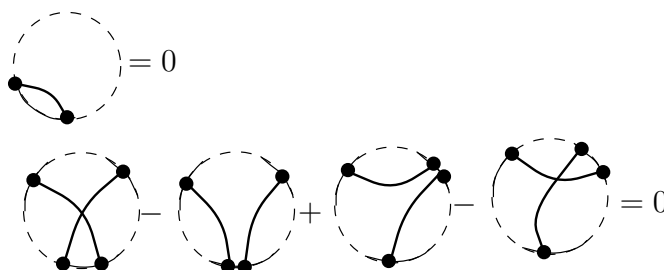


FIGURE 20. Les relations 1T et 4T

n'a qu'un diagramme à 3 cordes modulo les relations (1T) et (4T) : voir figure 21. Kontsevich a montré que ce sont les seules relations : pour tout symbole satisfaisant ces relations il existe un invariant ayant ce symbole donné explicitement par l'intégrale de Kontsevich qui est une généralisation de l'intégrale de Gauss (voir la section 6) qui correspond au diagramme de cordes de la figure 22.

Si on considère 2 noeuds K_1 et K_2 , leur nombre d'entrelacement est donné par

$$(14) \quad lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_W \frac{dz_1 - dz_2}{z_1 - z_2}$$

où z_j sont les projections horizontales des K_j et W est l'ensemble des paires de points qui sont à même altitude.

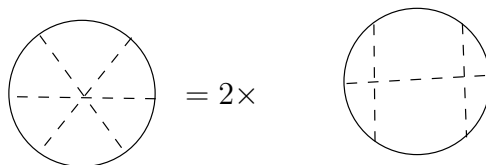


FIGURE 21. La relation entre les 2 diagrammes à 3 cordes non triviaux

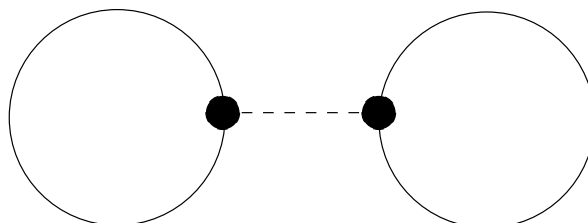


FIGURE 22. Le diagramme de cordes qui donne le nombre d'entrelacement

L'intégrale de Kontsevich pour l'invariant de Vassiliev de degré 2 peut s'écrire de la façon suivante. On écrit $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ et on note (z, t) le point générique de \mathbb{R}^3 . On considère alors un noeud K tel que $t : K \rightarrow \mathbb{R}$ n'a que des points critiques isolés non dégénérés (maximas ou minimas locaux). On pose alors

$$(15) \quad v(K) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\{t_- < t_1 < t_2 < t_+\}} \sum_{\{z, z'\}} \varepsilon \frac{dz_1 - dz'_1}{z_1 - z'_1} \wedge \frac{dz_2 - dz'_2}{z_2 - z'_2} + \frac{1}{48} c(K)$$

où

- t_{\pm} sont le maximum et le minimum de t sur K
- la somme est sur tous les choix de paires $(t_i, z_i), (t_i, z'_i)$, $i = 1, 2$ sur K tels que les 2 paires donnent lieu au diagramme à 2 cordes non trivial sur S^1
- ε est le produit des orientations comparées de K et celle donnée par t .
- $c(K)$ est le nombre de points critiques de t .

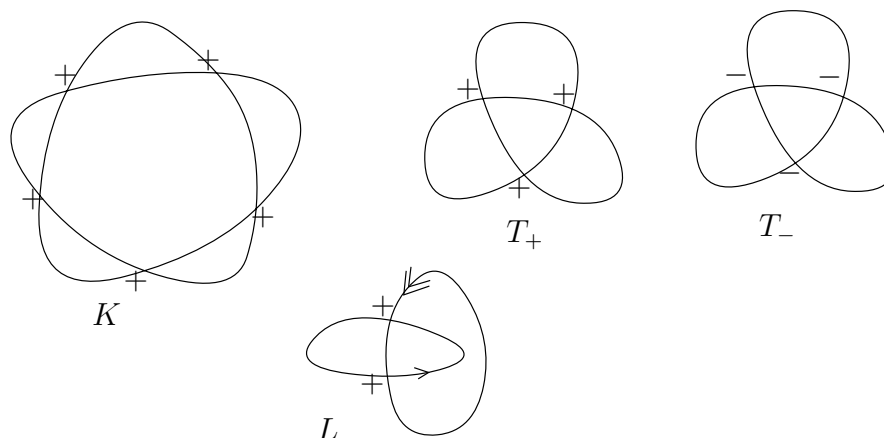
La preuve que c'est un invariant utilise essentiellement la formule de Stokes et l'identité

$$(16) \quad \frac{dz_1 - dz_2}{z_1 - z_2} \wedge \frac{dz_2 - dz_3}{z_2 - z_3} + \frac{dz_2 - dz_3}{z_2 - z_3} \wedge \frac{dz_3 - dz_1}{z_3 - z_1} + \frac{dz_3 - dz_1}{z_3 - z_1} \wedge \frac{dz_1 - dz_2}{z_1 - z_2} = 0.$$

14. Problème d'examen

On considère les 3 noeuds K , T_+ , T_- et l'entrelacs L de la figure 23. Les signes \pm réfèrent à la convention habituelle pour la désingularisation des noeuds dans la théorie de Vassiliev.

- 1) Calculer w de ces noeuds et de cet entrelacs.
- 2) On note $V_Z(t)$ le polynôme de Jones du noeud ou de l'entrelacs Z (obtenu en faisant $t = A^{-4}$ dans la construction de Kauffman. Calculer $V_{T_{\pm}}(t)$ et $V_L(t)$.
- 3) Calculer alors $V_K(t)$ à l'aide de la relation skein.

FIGURE 23. les noeuds T_{\pm} et K et l'entrelacs L

4) Vérifier le calcul précédent à partir du calcul direct du crochet $\langle K \rangle (A, B, d)$ (montrer qu'il existe seulement 8 états à considérer en utilisant la symétrie cyclique de K).

5) Est ce que K est équivalent à son image miroir ?

6) Vérifier que $V_{T_{\pm}}(1) = V_K(1) = 1$ et que $V'_{T_{\pm}}(1) = V'_K(1) = 0$.

7) On pose $\alpha(Z) = V''_Z(1)$. Calculer $\alpha(T_{\pm})$ et $\alpha(K)$.

8) Soit β l'invariant de Vassiliev de degré 2 qui vaut 0 sur le noeud trivial et 1 sur tout noeud à 2 points doubles dont le diagramme est \otimes . Calculer $\beta(T_{\pm})$ et $\beta(K)$.

9) Vérifier qu'il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $\alpha(T_{\pm}) = k\beta(T_{\pm})$ et $\alpha(K) = k\beta(K)$. Est ce que l'on a, pour tout noeud W , $\alpha(W) = k\beta(W)$?

GEOMETRIE HYPERBOLIQUE

1. Introduction

Notre but est la description d'un exemple de géométrie plane non-euclidienne, c'est à dire ne satisfaisant pas le *postulat d'Euclide* :

Étant donné une droite D et un point A non situé sur cette droite, il passe par ce point une unique droite D' ne rencontrant pas D .

Depuis les éléments d'Euclide (300 avant JC), de nombreuses tentatives ont été faites pour prouver le postulat d'Euclide, elles ont toutes avorté, et pour cause, au début du 19ème siècle, l'existence de géométries ne satisfaisant pas ce postulat a été prouvée indépendamment par Bolyai et Lobatchevsky. Gauss lui-même dit qu'il s'était persuadé de l'existence de telles géométries.

Nous allons décrire dans ce chapitre un modèle de la géométrie hyperbolique en dimension 2 introduit par Poincaré. Ce modèle est interne à la géométrie euclidienne, en ce sens que les théorèmes qu'on y prouve peuvent être retraduits de façon purement euclidienne.

On montre que toutes les géométries à courbure -1 du plan sont en fait les mêmes. Ce modèle de Poincaré est le plus accessible, certains calculs nécessitent cependant la connaissance des autres modèles que l'on trouvera par exemple dans [Ber77].

Avant de continuer, je ne résiste pas à citer Poincaré ([Poi32] p. 67) :

Dès lors que doit-on penser de la question : "la géométrie euclidienne est-elle vraie ?"

Elle n'a aucun sens... Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre, elle peut seulement être plus commode.

Je ne m'attarde pas plus sur les aspects historiques et philosophiques sur lesquels je suis incompetent, l'auditeur intéressé pourra lire avec plaisir le livre [Poi32], et aussi [Gre74].

2. Le demi-plan de Poincaré et son homogénéité

Dans le modèle de Poincaré, les *points* sont les points du demi-plan $y > 0$ de \mathbb{R}^2 , qu'on pourra identifier à une partie du plan complexe C :

$$H = \{z = x + iy | y > 0\} .$$

Les *droites* de H sont les demi-cercles (euclidiens) centrés sur l'axe $y = 0$ et les demi-droites orthogonales à cet axe.

La construction géométrique ci-dessous montre que par deux points distincts de H passe une droite et une seule.

Le postulat d'Euclide n'est évidemment pas satisfait : étant donné un point A de H et une droite D ne contenant pas ce point, il passe par A une infinité de droites ne rencontrant pas D . Ces droites remplissent un secteur qui est hachuré dans la figure ci-dessous.

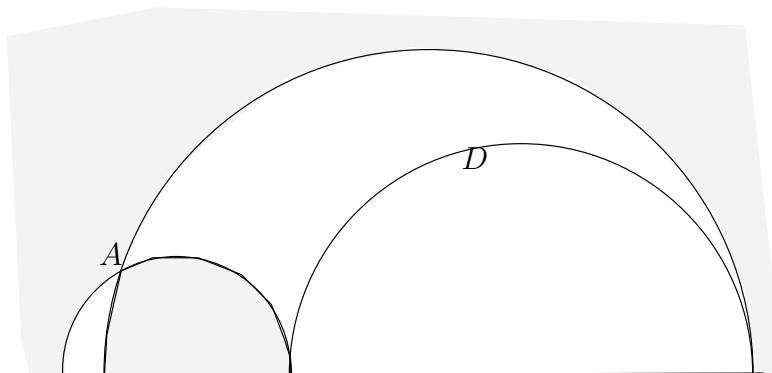


FIGURE 1. Des droites de H

Une géométrie plane n'est pas uniquement faite de points et de droites, on doit aussi préciser dans quel cas deux figures sont égales : c'est à dire qu'on doit avoir un groupe G de déplacements précisant l'homogénéité (lorsqu'on introduira une distance, on demandera que ces déplacements soient des isométries).

3. Description de G

On considère les transformations de la forme :

$$z \mapsto T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc = 1$.

Ces transformations qui sont des homographies de la droite réelle $y = 0$ (qu'on appellera droite à l'infini de H en lui adjoignant un point noté ∞ , qui sert d'image à $\frac{-d}{c}$ et dont l'image est $\frac{a}{c}$) préserve H : ce sont même des bijections de H sur lui-même. On vérifie en effet la formule :

$$\Im(T(z)) = \frac{\Im(z)}{|cz + d|^2}.$$

G est un groupe de transformations de H dont on peut décrire la structure : soit $SL_2(\mathbb{R})$ le groupe des matrices 2×2 , à coefficients réels, de déterminant 1. L'application naturelle qui à une matrice

$$(17) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

associe la transformation $T_{a,b,c,d}$ précédente est un homomorphisme surjectif : au produit usuel des matrices correspond la composition des transformations de G .

En restriction à la droite à l'infini, $T_{a,b,c,d}$ est la transformation projective associée à la transformation linéaire de matrice correspondante, comme le suggère la figure ci-dessous :

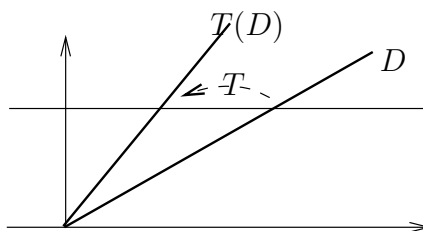


FIGURE 2. Transformation linéaire et homographie associée

Un instrument utile dans la suite est la décomposition de T comme composée de transformations plus simples :

LEMME 5.1. *Tout élément $T \in G$ est composé de translations (euclidiennes) : $z \rightarrow z + A$ avec A réel, d'homothéties (euclidiennes) de centre 0 et de rapport > 0 , et de la transformation $J(z) = \frac{1}{z}$.*

On déduit de ce lemme que T préserve les droites de H (le seul problème est pour J qui est à peu de choses près une inversion par rapport au cercle de centre 0 et de rayon 1).

À partir de là, on montre que H est isotrope au sens qu'étant donné une droite D et un point $A \in D$, il existe $T \in G$ telle que $T(A) = i$ et $T(D) = \{x = 0\}$. Un tel T est même unique si on a orienté D et qu'on veut que D orientée s'envoie par T sur l'axe Oy orienté positivement.

Pour cela, si α et ω sont les points à l'infini de D , il existe une homographie T_0 telle que $T_0(0) = \alpha$ et $T_0(\infty) = \omega$. T_0^{-1} transforme D en $x = 0$. Pour envoyer A sur i , il suffit de composer avec une homothétie de centre 0.

4. La distance et les géodésiques

En géométrie euclidienne, on ne se contente pas des points et des droites ; on a aussi la distance pour laquelle les droites sont les géodésiques, au sens suivant : parmi les courbes joignant deux points A et B , il en existe une de longueur minimale, c'est le segment de la droite définie par A et B compris entre A et B .

On va définir une distance, ou plus précisément une famille de distances sur H , pour lesquelles les droites non-euclidiennes introduites précédemment sont géodésiques. Le groupe G est alors le groupe des déplacements (isométries préservant l'orientation de H).

5. Birapport

Si z_1, z_2, z_3 et z_4 sont 4 complexes 2 à 2 distincts, on pose :

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} .$$

Si un des points est infini, on prend la convention $\frac{\infty}{\infty} = 1$.

Ce nombre s'appelle *birapport* de z_1, z_2, z_3, z_4 . Par exemple $[0, \infty, a, b] = \frac{a}{b}$. Si on permute z_1 et z_2 ou z_3 et z_4 , le birapport est changé en son inverse. On a la propriété fondamentale suivante :

PROPOSITION 5.1. *Si T est une homographie (à coefficients complexes),*

$$[T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4] .$$

La preuve se fait en décomposant l'homographie en transformations élémentaires comme plus haut.

Si z, z' sont deux points de H , et si α et ω sont les extrémités (points à l'infini) de la droite joignant ces points, le birapport $[z, z', \alpha, \omega]$ est réel, car les deux quotients qui interviennent dans sa définition sont imaginaires purs (angles droits). Il est même réel positif.

On pose donc la :

DÉFINITION 5.1. *Pour z, z' dans H , et k un réel > 0 ,*

$$d_k(z, z') = k \cdot \left| \log ([z, z', \alpha, \omega]) \right| .$$

Remarque : dans le cas euclidien, les distances $d_k = k \cdot d_1$, où d_1 est la distance euclidienne définissent des espaces isométriques, l'homothétie h de rapport k vérifie :

$$d_1(h(m), h(m')) = d_k(m, m') ,$$

pour tout couple m, m' .

Dans le cas hyperbolique, il n'en est pas du tout de même : les distances d_k définissent des espaces non isométriques, il n'y a pas de dilatations analogues aux homothéties.

Par exemple $d_k(it, it') = k \cdot \left| \log\left(\frac{t}{t'}\right) \right|$ est la distance transportée de la distance euclidienne usuelle sur la droite réelle par l'application $s \rightarrow i \cdot e^s$.

Il n'est pas évident que d_k est une distance : seuls les axiomes de symétrie et de positivité sont évidents. L'inégalité triangulaire ne l'est pas.

Il est clair que, si $T \in G$, $d_k(T(z), T(z')) = d_k(z, z')$ à cause de l'invariance du birapport par homographie.

On va en fait montrer que cette distance peut être définie à partir de la longueur des courbes, c'est ce que Gromov (un des plus grands géomètres contemporains) appelle un *espace de longueurs*.

Pour cela, commençons par calculer un équivalent de $d_k(z, z')$ lorsque $z' \rightarrow z$. Posons $z' = z + u$ (u petit), on a :

$$[z + u, z, \alpha, \omega] = 1 + \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \omega} \right) u + o(u) = 1 + \frac{\alpha - \omega}{(z - \alpha)(z - \omega)} u + o(u) .$$

Prenant le log et se rappelant que le birapport est réel, il vient :

$$d_k(z, z + u) \sim K \cdot \frac{|\alpha - \omega|}{|z - \alpha| \cdot |z - \omega|} |u| ,$$

ou encore, en tenant compte de la relation (triangle rectangle)

$$y \cdot |\alpha - \omega| = |z - \alpha| \cdot |z - \omega| : d_k(z, z + u) \sim k \frac{|u|}{y}.$$

La distance d_k est donc infinitésimalement égale à la distance euclidienne multipliée par le facteur $\frac{1}{y}$.

Définissons donc la longueur $L_k(\gamma)$ (non-euclidienne) d'une courbe paramétrée γ de classe C^1 par morceaux de $H : \gamma(t) = (x(t), y(t))$, ($a \leq t \leq b$) par

$$L(\gamma) = k \cdot \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} \cdot dt.$$

Cette longueur est invariante par G , comme on le vérifie à partir de la formule de changement de variable dans l'intégrale.

À partir de cette longueur, on définit une distance δ_k par la formule :

$$\delta_k(z, z') = \inf L_k(\gamma),$$

où le inf porte sur toute les courbes de classe C^1 dans H joignant z à z' . Il est clair que δ_k vérifie l'inégalité triangulaire comme on le voit par recollement de courbes joignant z à z' et z' à z'' .

En fait, on va montrer que $d_k = \delta_k$.

À cause de l'invariance par G , on peut se contenter de le montrer pour $z = i$ et $z' = iu$ (u réel).

Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 1$ est une courbe joignant i à iu , on a :

$$d_k(i, iu) = k \cdot \left| \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right| \varepsilon k \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt,$$

les cas d'égalités sont faciles à traiter : $x(t)$ doit être identiquement 0 et $y(t)$ monotone.

On a donc montré que : $d_k = \delta_k$, et par suite que (H, d_k) est un espace de longueurs. Si on appelle *géodésique* toute courbe de H telle que la distance de deux points quelconque de celle-ci, soit donnée par la longueur du segment qu'ils délimitent, on a en fait prouvé que les géodésiques de (H, d_k) sont les droites définies au § 1.

Remarque : l'espace hyperbolique (H, d_k) a donc les deux propriétés suivantes :

- (i) la distance est infinitésimalement euclidienne ;
- (ii) c'est un espace de longueurs.

(ii) n'est pas conséquence de (i), il suffit de penser à la restriction de la distance euclidienne sur \mathbb{R} à une surface non plane (la distance riemannienne intrinsèque est différente (plus grande) que la distance induite).

La conjonction de ces deux propriétés définit une métrique riemannienne.

Notons quelques propriétés qualitatives de cette distance qui la distingue fortement de la distance euclidienne.

Si deux géodésiques ont une extrémité commune à l'infini, elles se rapprochent exponentiellement l'une de l'autre, par exemple si $M(t) = it$ et $P(t) = 1 + it$, on a $d_k(M(t), P(t)) \sim \frac{k}{t}$, qui est à décroissance exponentielle par rapport à $d_k(i, M(t))$.

Au contraire deux droites issues d'un même point divergent exponentiellement.

En résumé, deux droites peuvent être sécantes, asymptotes à une extrémité ou être divergentes aux deux extrémités auquel cas, il y a un couple de points sur celles-ci qui réalise le minimum de la distance.

On peut aussi noter qu'étant donné deux points distincts à l'infini, il existe une droite qui joint ceux-ci : en géométrie euclidienne ceci est notoirement faux. La situation est moins souple !

G est le groupe des déplacements pour d_k .

Il est clair par construction que les transformations T de G sont des isométries pour les distances d_k . De plus elles préservent l'orientation car les homographies de G ont un jacobien qui vaut :

$$\text{jacobien } (T)(z) = \frac{1}{|cz + d|^2},$$

qui est > 0 .

On peut démontrer sans trop de mal qu'il n'y a pas d'autres déplacements.

6. Classification des déplacements

Les éléments de G peuvent être classés suivant leurs points fixes dans l'action sur $H \cup$ la droite à l'infini.

6.1. Rotations. Si $|a + d| < 2$, T admet un point fixe dans H , c'est une rotation autour de ce point, analogue aux rotations euclidiennes.

6.2. Translations hyperboliques. Si $|a + d| > 2$, T admet deux points fixes distincts sur la droite à l'infini. Alors T préserve la géodésique joignant ces deux points, opère sur celle-ci par translation et préserve les courbes situées à distance constante de celle-ci (qui ne sont pas des géodésiques, contrairement au cas euclidien). Cette géodésique est l'ensemble des points qui minimisent $d_k(z, T(z))$.

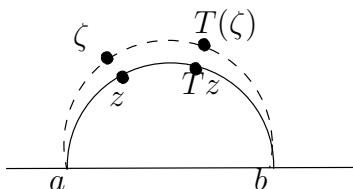


FIGURE 3. Une translation hyperbolique

6.3. Translations paraboliques. Si $|a + d| = 2$, T admet un seul point fixe à l'infini. T est conjuguée à $z \rightarrow z + 1$ dans G .

7. Angles et triangles ; aire

Les déplacements $T \in G$ préservent les angles euclidiens : ce sont des transformations *conformes*. Cela résulte du fait que la différentielle $T'(z_0)$ de T en un point z_0 est la similitude associée au nombre complexe $\frac{1}{(cz_0 + d)^2}$.

On définit donc l'angle en un point z_0 de H de deux courbes passant par ce point comme l'angle euclidien des vecteurs tangents à ces courbes en ce point. Cette notion d'angle est raisonnable car invariante par G .

On peut aussi définir une notion d'*aire*, la distance infinitésimale calculée plus haut donne envie d'attribuer aux petits carrés euclidiens proches du point z comme aire non-euclidienne, leur aire euclidienne multipliée par $\frac{k^2}{y^2}$. Autrement dit, on va poser, pour une région bornée D (au sens de d_k) de H :

$$\text{aire}_k(D) = k^2 \int \int_D \frac{dx dy}{y^2} .$$

On s'intéresse maintenant à l'aire des triangles hyperboliques. On considérera aussi des triangles dont un ou plusieurs des sommets sont sur la droite de l'infini, comme sur la figure ci-dessous :

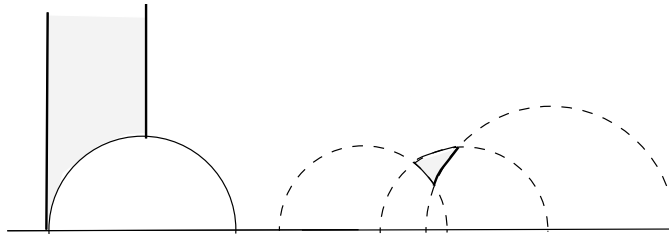


FIGURE 4. Quelques triangle

On a en vue le

THÉORÈME 5.1. *L'aire d'un triangle hyperbolique est donnée par :*

$$\text{aire}_k(\mathcal{T}) = k^2 \cdot (\pi - \alpha - \beta - \gamma) ,$$

où α, β, γ sont les angles de \mathcal{T} (éventuellement nuls pour les sommets à l'infini).

Preuve.—

1. L'aire des triangles ayant des sommets à l'infini est finie.

Il suffit de le montrer pour un seul sommet et donc que la bande $B = [0, 1] \times [1, +\infty[$ est d'aire finie :

$$\int \int_B \frac{dx dy}{y^2} < \infty ,$$

ce qui est évidemment vrai.

2. L'aire des triangles ayant leurs trois sommets à l'infini est $\pi \cdot k^2$.

Par homogénéité, il suffit de la prouver pour le triangle \mathcal{T}_0 ayant pour sommets $(-1, +1, \infty)$, c'est à dire de calculer l'intégrale double :

$$\int_{-1}^{+1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2},$$

ce qui ne pose pas de problème particulier.

3. Preuve purement géométrique de la formule (on suppose ici $k = 1$).

Il est clair, par homogénéité que tous les triangles de sommet z , ayant deux sommets à l'infini et d'ouverture α ont même aire A_α .

On voit facilement (figure) que, si $\alpha + \beta \leq \pi$,

$$A_\alpha + A_\beta = A_{\alpha+\beta} + \pi.$$

Donc $\alpha \rightarrow A_\alpha - \pi$ est additive sur $]0, \pi]$ et bornée, ce qui entraîne $A_\alpha = \pi + C\alpha$. Mais $A_\pi = 0$ (ce qui se déduit de $A_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$), donc $A_\alpha = \pi - \alpha$.

On considère les six triangles $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma, S_{\alpha'}, S_{\beta'}, S_{\gamma'}$, qui ont chacun deux sommets à l'infini (figure).

Leur réunion est l'hexagone ayant ses six sommets à l'infini : $\mathcal{H} = (A'A''B'B''C'C'')$, dans lequel T est recouvert trois fois et $\mathcal{H} \setminus T$ une seule. On a donc, en notant $|D|$ l'aire de D :

$$|S_\alpha| + |S_\beta| + |S_\gamma| + |S_{\alpha'}| + |S_{\beta'}| + |S_{\gamma'}| = |\mathcal{H}| + 2|T|,$$

et $|\mathcal{H}| = 4\pi$ (découpage en quatre triangles ayant leurs trois sommets à l'infini). On en déduit le résultat

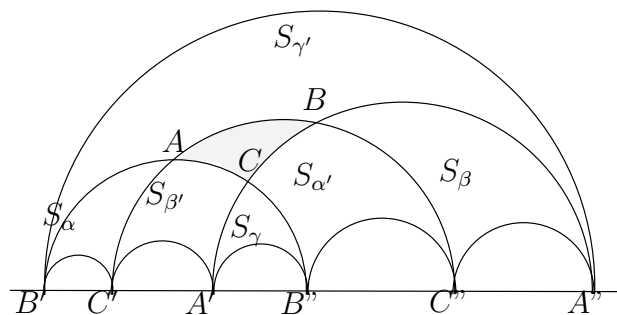


FIGURE 5. l'aire d'un triangle

□

7.1. Application à la construction de triangles d'angles donnés. À partir de là, on peut montrer qu'étant donné trois réels positifs ou nuls, α, β, γ dont la somme vérifie :

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

il existe un triangle géodésique unique à isométrie près ayant ces angles.

L'*unicité* se montre ainsi : on peut par un déplacement supposer $A = A'$ et que les demi-droites AB et AB' (resp. AC et AC') sont confondues. Si les droites CB et $C'B'$ se coupent en P sans être confondues, le triangle $BB'P$ ou $CC'P$ est non dégénéré et a une somme d'angles $> \pi$.

Si ces deux droites ne se coupent pas, les aires de ABC et de $AB'C'$ sont inégales ; ce qui contredit la relation entre somme des angles et aire.

L'*existence* se montre par continuité : soient D, D' deux demi-droites faisant en A un angle α . Il existe sur D un point B tel que la droite passant par B et faisant avec D un angle β est asymptote à D' . Soit $M(t)$ le point de la demi-droite D situé entre A et B telle que la distance de A à $M(t)$ soit t . Soit $P(t)$ l'intersection de la droite faisant en $M(t)$ un angle β avec D . Lorsque t varie de 0 à $d(A, B)$, l'angle $\gamma(t)$ en $P(t)$ du triangle $AM(t)P(t)$ varie de $\pi - \alpha - \beta$ à 0 continûment et donc prend toute valeur γ telle que $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

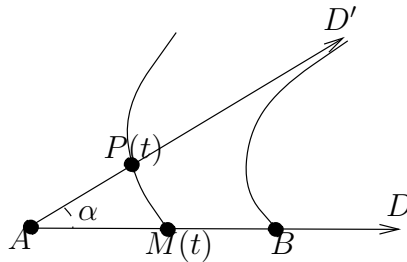


FIGURE 6. Existence d'un triangle d'angles α, β, γ .

7.2. Trigonométrie hyperbolique. On a des formules de trigonométrie hyperbolique qui ont un air de famille avec celles de la trigonométrie euclidienne ; si T est un triangle hyperbolique (pour d_k) de sommets A, B, C , de côtés a, b, c et d'angles α, β, γ , on a les formules suivantes :

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a/k} = \frac{\sin \beta}{\sinh b/k} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c/k}$$

$$\cosh \frac{c}{k} \sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \cos \gamma$$

$$\cosh \frac{c}{k} = \cosh \frac{a}{k} \cdot \cosh \frac{b}{k} - \sinh \frac{a}{k} \cdot \sinh \frac{b}{k} \cdot \cos \gamma,$$

qui permettent de résoudre les triangles hyperboliques.

8. La courbure

La courbure de Gauss d'une surface de \mathbb{R}^3 .

Soit M_0 un point d'une surface S de \mathbb{R}^3 ; si nous coupons S par un plan P normal à S en M_0 , nous obtenons une courbe plane γ_P dont le centre de courbure a pour abscisse r_P sur la normale à S en M_0 en prenant l'origine en $M_0 \cdot k_P = \frac{1}{r_P}$

est la courbure algébrique de cette courbe. Soit $k_+ = \sup k_P$ et $k_- = \inf k_P$. On pose $K(M_0) = k_+ \cdot k_-$. C'est la courbure de Gauss de la surface S en M_0 .

C'est un résultat extraordinaire de Gauss qui si deux surfaces S_1 et S_2 sont isométriques pour la distance géodésique leurs courbures de Gauss sont les mêmes (théorème egregium).

On doit donc pouvoir calculer la courbure de Gauss uniquement à partir de la distance infinitésimale. C'est effectivement ce que Gauss fait. La formule la plus simple est la suivante : soit $\ell(r)$ la longueur du cercle géodésique de centre M_0 et de rayon r . On a un développement limité de $\ell(r)$ lorsque $r \rightarrow 0$:

$$\ell(r) = 2\pi r \left(1 - \frac{K(M_0)}{6} \cdot r^2 + O(r^3) \right) .$$

Cela donnerait le résultat cherché si on avait une expression explicite de $\ell(r)$, en fait on peut montrer que : $\ell(r) = 2\pi k \sinh\left(\frac{r}{k}\right)$. Donc la courbure de (H, d_k) est $\frac{-1}{k^2}$.

On aurait pu préférer trouver une surface de \mathbb{R}^3 isométrique à (H, d_k) . Une telle surface n'existe pas (Hilbert).

On peut seulement trouver une surface isométrique localement à (H, d_k) . Il suffit évidemment de le faire pour $k = 1$, car une surface homothétique de rapport k de cette surface fera l'affaire pour d_k .

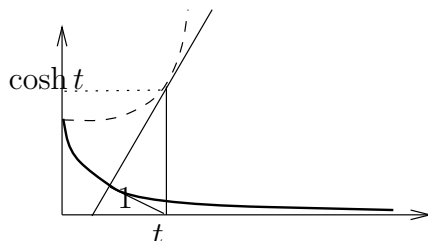


FIGURE 7. Tractrice

On considère la surface S obtenue par rotation de la tractrice autour de l'axe des x . La tractrice admet comme équations paramétriques :

$$x(t) = t - \tanh t, y = \frac{1}{\cosh t}, (t > 0).$$

On en déduit les équations paramétriques de S :

$$x = t - \tanh t, y = \frac{1}{\cosh t} \cos \theta, z = \frac{1}{\cosh t} \sin \theta .$$

D'où l'expression de la métrique infinitésimale :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \tanh^2 t \cdot dt^2 + \frac{1}{\cosh^2 t} d\theta^2 .$$

Soit en posant $\xi = \theta$, $\eta = \cosh t$, $ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{\eta^2}$, qui est bien l'expression infinitésimale de d_1 .

Le calcul de la courbure de Gauss résulte des propriétés géométriques de la tractrice : les rayons de courbure R_1 et R_2 indiqués sur la courbure ont un produit égal à -1 .

9. La géométrie euclidienne comme limite de géométries hyperboliques

Nous avons déjà plusieurs indices de la convergence lorsque $k \rightarrow \infty$ de la géométrie de (H, d_k) vers la géométrie euclidienne du plan. Par exemple la formule de l'aire d'un triangle : un triangle de (H, d_k) dont les côtés ont des longueurs fixées a une aire bornée lorsque $k \rightarrow \infty$, comme cela résulte des formules de l'aire : par exemple l'aire d'un disque de rayon R est $2\pi k^2(\cosh \frac{R}{k} - 1)$. On en déduit que la somme des angles tend vers π .

Il y a d'autres indices, si l'on regarde les formules trigonométriques. Par exemple la formule :

$$\cosh \frac{c}{k} = \cosh \frac{a}{k} \cdot \cosh \frac{b}{k} - \sinh \frac{a}{k} \cdot \sinh \frac{b}{k} \cdot \cos \gamma .$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$ avec a, b, c fixés, cette formule devient la formule connue en géométrie euclidienne :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma .$$

On peut donner un sens précis à la notion de suite d'espaces métriques convergent vers un espace métrique, c'est ce qui est fait par exemple dans [Gro81].

Les espaces étant non bornés, on s'intéresse à la convergence d'espaces pointés, c'est à dire avec un point origine marqué. Ici les espaces étant homogènes, on peut choisir ce point arbitrairement. On prendra une origine O dans le plan euclidien et i comme origine dans les demi-plans hyperboliques.

On considère les applications φ_k de \mathbb{R}^2 dans H définies par $\varphi_k(u) = i + \frac{u}{k}$. Pour u fixé, φ_k est définie pour k assez grand et surjective. Si u, u' sont fixés dans le plan \mathbb{R}^2 , on a :

$$\lim d_k(\varphi_k(u), \varphi_k(u')) = d_{\text{eucl}}(u, u') .$$

Cela résulte du développement limité de d_1 près de i fait plus haut.

10. Pavages hyperboliques

À tout sous-groupe discret Γ (i.e. dont les orbites sont localement finies) du groupe des isométries du demi-plan de Poincaré, on associe des pavages de la façon suivante. On considère un domaine fondamental D de Γ , c'est à dire une région de H telle que la réunion des images $\gamma(D)$ soit H et que deux images quelconques se rencontrent sur un ensemble de mesure nulle (union finie de courbes). Les domaines $D_\gamma = \gamma(D)$ ($\gamma \in \Gamma$) pavent H . Donnons quelques exemples de tels pavages :

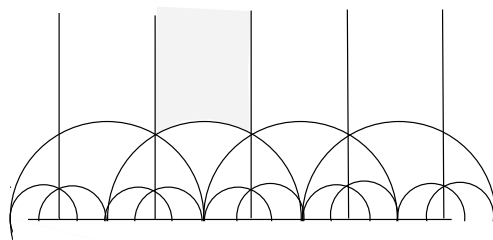
1) Le groupe $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$ des matrices à coefficients entiers de déterminant 1 est d'une importance fondamentale en théorie des nombres. Il est engendré comme groupe par les rotations S d'angle π autour de i et U d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de j , qui sont définies par :

$$S(z) = \frac{-1}{z}, U(z) = \frac{-1}{z+1} .$$

Un domaine fondamental possible est :

$$D = \{z \in H \mid -1 \leq x \leq +1, |z| \leq 1\} .$$

2) Si p, q, r sont trois entiers ≥ 2 tels que la somme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, il existe un triangle d'angles $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$. Le groupe engendré par les symétries autour des côtés de ce triangle est un groupe discret noté $\Gamma_{p,q,r}$. Si on prend comme domaine fondamental le triangle en question, on a un pavage par des triangles tous isométriques.

FIGURE 8. Pavage pour $SL_2(\mathbb{Z})$

3) Les groupes précédents sont rigides, mais on peut en trouver des familles déformables : les *groupes de surfaces*.

Ce sont des analogues hyperboliques des groupes engendrés par deux translations indépendantes du plan euclidien. Si on prend alors comme domaine fondamental un parallélogramme engendré par ces deux translations, l'identification des bords par le groupe donne lieu à une surface qu'on appelle un tore.

Dans le cas hyperbolique, on obtient des surfaces plus compliquées : les tores à plusieurs trous. L'exemple le plus simple s'obtient à partir d'un octogone $ABCDEFGH$ dont la somme des angles vaut 2π et vérifiant les relations :

$$d(A, B) = d(C, D) ; d(B, C) = d(D, E) ; d(E, F) = d(G, H) ; d(F, G) = d(H, A),$$

en identifiant les côtés de même longueurs (orientation deux à deux opposées par rapport au sens trigonométrique sur le bord de l'octogone) par des translations hyperboliques. Il y a une famille à huit paramètres de tels octogones à isométrie près, donnant lieu à une famille à six paramètres de groupes. La surface associée est un tore à deux trous qui admet donc une métrique riemannienne à courbure -1 .

11. Applications de la géométrie hyperbolique

La géométrie hyperbolique a de nombreuses applications à la fois à l'intérieur des mathématiques et aux autres sciences.

Par exemple, la théorie des pavages hyperboliques et des groupes de ces pavages a des applications à la théorie des équations différentielles, à la théorie analytique des nombres.

Les géodésiques sur les surfaces localement isométriques au plan hyperbolique donne l'exemple le plus simple de système dynamique chaotique. Les physiciens se sont intéressés à ces modèles pour cette raison et en particulier pour mieux cerner le problème du chaos au niveau de la mécanique quantique.

La géométrie hyperbolique n'est qu'un cas particulier des géométries riemanniennes. La relativité généralisée est une théorie géométrique de l'espace-temps, interprétant la gravitation comme un effet de la courbure de l'espace. La géométrie de la relativité est très semblable à la géométrie riemannienne : au lieu d'avoir un

espace infinitésimalement euclidien, il est infinitésimalement lorentzien, au sens que le produit scalaire n'est pas défini positif.

Il y a d'autres généralisations plus récentes. Si on s'intéresse non plus aux propriétés à courtes distances mais à longues distances de l'espace hyperbolique. Gromov a introduit une notion très vaste d'hyperbolicité qui permet de traiter des objets beaucoup plus généraux : par exemple cette notion a des applications à la théorie des groupes discrets infinis définis par générateurs et relations. Cette idée de traiter les groupes comme des objets géométriques est actuellement la source d'une grande activité.

Une autre question intéressante et encore très ouverte est l'étude des pavages de l'espace hyperbolique de dimension 3. Ces questions sont reliées d'une part à des questions de géométrie euclidienne élémentaire comme les empilements de cercles (théorèmes d'existence et de rigidité de Andreev, Thurston, Sullivan et l'auteur), d'autre part à l'étude très active des variétés de dimension 3.

LES FORMES DIFFÉRENTIELLES

1. Motivations

De nombreuses intégrales utilisées en physique utilisent des structures inutiles qui parasitent les calculs : par exemple le travail d'une force le long d'une courbe s'écrit

$$W = \int_0^T \vec{F} \cdot d\vec{M} ,$$

qui utilise le champ de vecteurs \vec{F} et le produit scalaire euclidien. Il est préférable de considérer l'expression plus intrinsèque $\vec{F} \cdot d\vec{M}$ comme une forme différentielle susceptible d'être intégrée sur une courbe orientée sans donnée supplémentaire. Il en est de même pour le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface que l'on voit comme intégrale d'une 2 forme. L'intuition est de voir une k -forme différentielle comme une co-chaine de dimension k infinitésimale, c'est à dire qu'elle peut être évaluée sur un simplexe de dimension k de l'espace tangent. On gagne ainsi une présentation unifiée des opérations vectorielles *div*, *rot*, *grad* qui sont des cas particuliers de la différentielle extérieure ainsi qu'un formalisme unique pour la géométrie riemannienne, le formalisme hamiltonien, la thermodynamique et les théories de jauge. On s'est inspiré à plusieurs endroits de l'excellent livre [BS90].

2. Formes différentielles dans \mathbb{R}^n

2.1. Algèbre linéaire et tensorielle. Soit $E = \mathbb{R}^n$ vu comme un espace vectoriel de dimension finie n , on note $(\frac{\partial}{\partial x_i})$, $i = 1, \dots, n$ la base canonique de E . Un élément de E est un vecteur noté $\sum a^i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Il lui correspond une dérivation des fonctions (un opérateur différentiel). Le dual E^* de E admet la base duale de la précédente notée dx^i avec $dx^i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_j^i$.

On introduit aussi les espaces de tenseurs, en particulier les $\Lambda^k E^*$:

DÉFINITION 6.1. *Un élément ω de $\Lambda^k E^*$ est une application k -linéaire antisymétrique de $E \times \dots \times E$ dans \mathbb{R} .*

Une base de $\Lambda^k E^*$ est formée des $\omega^I = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ avec $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ définis par

$$\omega^I(V_1, \dots, V_k) = \det(V_I)$$

où V_I est la matrice carrée obtenue en sélectionnant dans la matrice des coordonnées des V_i les lignes correspondant à I .

$\Lambda^k E^*$ est réduit à 0 pour $k > n$ et sinon

$$\dim \Lambda^k E^* = C_n^k$$

On définit le produit extérieur

$$\wedge : \Lambda^k \times \Lambda^l \rightarrow \Lambda^{k+l}$$

par antisymétrisation du produit stupide :

$$\alpha \wedge \beta (V_1, \dots, V_k, V_{k+1}, \dots, V_{k+l}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \alpha(V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(k)}) \beta(V_{\sigma(k+1)}, \dots, V_{\sigma(k+l)}).$$

On a :

$$\omega_I \wedge \omega_J = 0$$

si $I \cap J \neq \emptyset$,

$$\omega_I \wedge \omega_J = \pm \omega_{I \cup J}$$

sinon, où la règle des signes est donnée par la signature de la permutation qui envoie la suite $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ sur la même suite ordonnée de façon croissante.

Ce produit fait de la somme directe des Λ^k une algèbre associative et anticommutative : si $\alpha \in \Lambda^k E^*$ et $\beta \in \Lambda^l E^*$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha.$$

2.2. Ecriture des formes différentielles. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n = E$, une forme différentielle ω de degré k dans U s'écrit sous la forme

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

où les $a_{i_1, \dots, i_k}(x)$ sont C^∞ dans U .

2.3. Le cas de \mathbb{R}^3 . Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 supposé orienté. On a alors des identifications canoniques :

$$\Lambda^0 E^* = \mathbb{R}$$

(toujours vrai)

$$\Lambda^1 E^* = E$$

donné par le produit euclidien,

$$\Lambda^2 E^* = E$$

donné par le produit intérieur avec le déterminant,

$$\Lambda^3 E^* = \mathbb{R}$$

donné par le déterminant par rapport à une base orthonormée positive. Le produit

$$\wedge : \Lambda^1 E^* \times \Lambda^1 E^* \rightarrow \Lambda^2 E^* = E$$

est alors le produit vectoriel.

2.4. Le cas de \mathbb{R}^4 . Le cas des formes de degré $\neq 2$ est similaire au cas de \mathbb{R}^3 . $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ est de dimension 6. Si (t, x^1, x^2, x^3) sont les coordonnées de \mathbb{R}^4 vu comme l'espace-temps, toute forme F de degré 2 s'écrit de façon unique

$$F = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx_3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 + (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) \wedge dt$$

qui est le champ *électromagnétique* fabriqué à partir des champs magnétique \vec{B} et électrique \vec{E} .

3. Exemples tirés de la physique

3.1. Forces. Un champ de force est une 1–forme qui est d’habitude identifiée à un champ de vecteurs au moyen de la structure euclidienne ambiante.

3.2. Champ électrique. Le champ électrique est une 1–forme.

3.3. Magnétisme. Un champ magnétique est une 2–forme identifiée dans \mathbb{R}^2 à un champ scalaire et dans \mathbb{R}^3 à un champ de vecteurs. Le potentiel magnétique est une 1–forme.

3.4. Thermodynamique. dQ est une 1–forme ainsi que dS .

3.5. Formalisme hamiltonien. La structure symplectique de l’espace des phases en mécanique classique est une 2–forme.

4. Produit extérieur

Le produit extérieur de $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^l(U)$, noté $\alpha \wedge \beta$, est défini en prenant le produit extérieur en chaque point

$$(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x) .$$

C’est une opération *tensorielle*, i.e. la produit extérieur au point x ne dépend que des valeurs de α et β en ce point, mais pas de leur dérivées. Le produit extérieur des formes différentielles vérifie les mêmes propriétés d’associativité et d’anticommutativité que la produit des formes multilinéaires antisymétriques.

5. Produit intérieur

Soit V un champ de vecteurs dans U : $V = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, on définit, pour $\alpha \in \Omega^k(U)$, $k \geq 1$, le produit intérieur $\iota(V)\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ par

$$(\iota(V)\alpha)(V_1, \dots, V_{k-1})(x) = \alpha(x)(V(x), V_1, \dots, V_{k-1})$$

ou encore

$$\iota\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)dx^i \wedge dx^J = dx^J .$$

C’est aussi une opération tensorielle.

6. Changement de variables

Si $F : U \rightarrow V$ est C^∞ et $\alpha \in \Omega^k(V)$, on définit $F^*\alpha \in \Omega^k(U)$ par

$$F^*\alpha(x)(V_1, \dots, V_k) = \alpha(F(x))(F'(x)V_1, \dots, F'(x)V_k)$$

Dans la pratique $F(x^1, \dots, x^n) = (F^1(x), \dots, F^m(x))$, on remplace dans $\alpha = \sum a_I(y^1, \dots, y^m)dy^I$ les y^j par $F^j(x)$ et les dy^j par $dF^j = \sum \frac{\partial F^j}{\partial x^i} dx^i$.

7. Cobord ou différentielle extérieure

Soit $\omega = \sum a_I dx^I \in \Omega^k(U)$, on pose

$$d\omega := da_I \wedge dx^I$$

où

$$da_I = \sum_i \frac{\partial a_I}{\partial x^i} dx^i .$$

On a ainsi un opérateur $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$. Les propriétés de d sont résumées dans le :

THÉORÈME 6.1. • d est linéaire

- Si $\alpha \in \Omega^k(U)$, $\beta \in \Omega^l(U)$, on a :

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta .$$

- Si $F : U \rightarrow V$ et $\alpha \in \Omega^k(V)$,

$$dF^*(\alpha) = F^*(d\alpha)$$

(d est contravariante pour n'importe quel changement de variables)

- Si $\alpha \in \Omega^k(U)$, $d(d\alpha) = 0$.

De la dernière propriété résulte la définition des espaces de cohomologie de de Rham :

DÉFINITION 6.2.

$$H^k(U) = \frac{\{\alpha \in \Omega^k(U) \mid d\alpha = 0\}}{d\Omega^{k-1}(U)}$$

Les formes qui vérifient $d\alpha = 0$ sont appelées fermées tandis que les formes $d\beta$ sont appelées exactes.

8. Dérivée de Lie et homotopies : lemme de Poincaré

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F_t : U \rightarrow U$ telle que $F_0 = \text{Id}$. On suppose $(t, x) \rightarrow F_t(x)$ C^∞ par rapport à toutes les variables. On a alors :

THÉORÈME 6.2. Soit $V(x) = \frac{\partial F_t(x)}{\partial t} \Big|_{t=0}$ la champ de vecteur de déformation infinitésimale. Si $\omega \in \Omega^k(U)$, la dérivée en $t = 0$ de $F_t^* \omega$ est donnée par

$$\mathcal{L}_V \omega := \frac{\partial F_t^*(\omega)}{\partial t} \Big|_{t=0} = d(\iota(V)\omega) + \iota(V)d\omega .$$

On appelle $\mathcal{L}_V \omega$ la dérivée de Lie de ω par rapport à V .

On a en particulier le corollaire suivant :

COROLLAIRE 6.1. Soit $F, G : U \rightarrow V$ une équivalence d'homotopie différentiable, alors les applications F et G induisent des isomorphismes inverses des cohomologie de de Rham de U et V .

DÉFINITION 6.3. Si V est un champ de vecteur dans $U \subset \mathbb{R}^n$, et $\omega = A(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ où A ne s'annule pas, la ω -divergence de V est définie par l'identité $\mathcal{L}_V \omega = \text{div}_\omega(V)\omega$; ou encore $d(\iota(V)\omega) = \text{div}_\omega(V)\omega$.

Un champ de divergence nulle est un champ qui préserve infinitésimalement l'élément de volume défini par ω .

9. Formes sur les variétés

10. Intégrales

10.1. Définition de l'intégrale.

DÉFINITION 6.4. • Une simplexe de dimension k dans une variété X est une application différentiable du simplexe standard s_k de \mathbb{R}^k dans X .

- Une chaîne est une combinaison linéaire de simplexes
- Une triangulation est un homéomorphisme d'un complexe simplicial sur X .

DÉFINITION 6.5. On définit l'intégrale d'une k -forme sur une k -chaîne c par

$$\int_c \omega = \int_{s_k} c^*(\omega)$$

où la dernière intégrale est une intégrale multiple dans \mathbb{R}^k : si D est un domaine de \mathbb{R}^k , on définit

$$\int_D a dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_D a dx_1 \cdots dx_k$$

Cette notion d'intégrale est naturelle :

Soit c_1 et c_2 2 chaînes plongées et de même image, alors $\int_{c_1} \omega = \pm \int_{c_2} \omega$.

10.2. Formule de Stokes.

11. Cohomologie de de Rham

11.1. Définitions. Soit X une variété différentiable de classe C^∞ . On désigne par

- $Z^k(X) = \{\omega \in \Omega^k(X) \mid d\omega = 0\}$. Un élément de $Z^k(X)$ s'appelle une forme fermée de degré k .
- $B^k(X) = \{\omega \in \Omega^k(X) \mid \exists \alpha \in \Omega^{k-1}(X) \text{ avec } \omega = d\alpha\}$. Un élément de $B^k(X)$ s'appelle une forme exacte de degré k .

Toute forme exacte est fermée ; la réciproque n'est pas vraie. Le défaut est la cohomologie de de Rham :

DÉFINITION 6.6. On pose

$$H_{dR}^k(X) = Z^k(X)/B^k(X).$$

$H^k(X)$ s'appelle la cohomologie de de Rham de degré k . On note aussi $b_{k,dR}$ la dimension de $H^k(X)$.

11.2. La cohomologie de de Rham ne dépend que du type d'homotopie.

THÉORÈME 6.3. Soit X et Y 2 variétés ayant le même type d'homotopie, les espaces $H_{dR}^k(X)$ et $H_{dR}^k(Y)$ sont isomorphes.

Preuve. –

Soit $F : X \rightarrow Y$ et $G : X \rightarrow Y$ telles que $G \circ F$ soit homotope à l'identité de X et $F \circ G$ soit homotope à l'identité de Y . Les applications $F^* : \Omega^k(Y) \rightarrow \Omega^k(X)$ et $G^* : \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^k(Y)$ passent au quotient et définissent des applications $\bar{F} : H^k(Y) \rightarrow H^k(X)$ et $\bar{G} : H^k(X) \rightarrow H^k(Y)$. Il suffit de montrer que si $K_t : X \rightarrow X$ est

une homotopie et $\omega \in Z^k(X)$, les $K_t^*(\omega)$ sont dans la même classe de cohomologie : $K_1^*(\omega) - K_0^*(\omega) = 0$. On a :

$$\frac{d}{dt} K_t^*(\omega) = d\alpha_t$$

avec

$$\alpha_t(x; V_1, V_{k-1}) = \omega(K_t(x); \dot{K}_t(x), K_t'(x)(V_1), \dots, K_t'(x)(V_{k-1})),$$

qui est une variante de la formule de Cartan. □

11.3. Cohomologies de dimension 0 et d .

THÉORÈME 6.4. *Si X est de dimension d connexe, on a :*

- $b_{0,dR}(X) = 0$
- $b_{d,dR}(X) = 1$ si X est compacte orientable et 0 sinon. Dans le cas compact orientable, une forme de degré d est exacte si et seulement si elle est d'intégrale nulle.

11.4. Cohomologie de \mathbb{R}^n .

11.5. Cohomologie des tores.

11.6. Cohomologie des sphères.

11.7. Théorie de Hodge-Witten. On se donne sur les k formes un produit scalaire de type L^2 , on associe alors à chaque classe de cohomologie le représentant de norme minimale ; il doit vérifier un équation d'Euler-Lagrange du type $d^*\omega = 0$ où d^* est l'adjoint de d pour les produits L^2 considérés :

- Hodge considère le cas où la structure L^2 vient d'une structure riemannienne auxiliaire
- Witten considère une famille de structure L^2 associées à la donnée d'une fonction f redonnant ainsi une preuve des inégalités de Morse.

11.8. Le théorème de de Rham. Supposons X compacte et munie d'une triangulation C^∞ . Soit C la complexe simplicial associé à cette triangulation. On a des applications bilinéaires $b_k : C_k \times \Omega^k \rightarrow \mathbb{R}$ données par l'intégration des k formes sur les chaînes de dimension k . A cause de Stokes, b_k passe au quotient en une application bilinéaire $B_k : H_k(C) \times H_{dR}^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$. Le théorème de de Rham dit que cette application est non dégénérée. Les 2 espaces vectoriels sont donc en dualité et ont même dimensions.

12. Opérateur \star de Hodge et dualité de Poincaré

13. Théorie du degré

14. Fibrés vectoriels et connections

14.1. Groupes et algèbres de Lie. Dans la suite de ce cours, un *groupe de Lie* est un sous-groupe fermé du groupe linéaire $GL(n, \mathbb{R})$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels inversibles.

Les exemples les plus importants sont

- Les groupes orthogonaux $O(Q)$ où Q est une forme quadratique sur \mathbb{R}^n :

$$O(Q) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid Q(A(x)) = Q(x)\} .$$

Si Q est de signature (p, q) , on note $O(p, q)$ ce groupe. Cas particuliers : isométries linéaires de l'espace euclidien, groupe de Lorentz.

- Les groupes unitaires $U(n) \subset GL(2n, \mathbb{R})$:

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^*\}$$

L'algèbre de Lie de G est l'espace tangent à G en Id . On la note souvent \mathcal{G} .

Par exemple l'algèbre de Lie de $O(n, 0)$ est formé des matrices antisymétriques, l'algèbre de Lie de $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$ est l'espace des matrices antihermitiennes.

Si on a une équation différentielle $X' = A(t)X$ où $A(t) \in \mathcal{G}$ et $X(0) = \text{Id}$, alors $X(t) \in G$. En effet $\mathcal{G}X$ est l'espace tangent en X à G .

14.2. Fibrés vectoriels.

DÉFINITION 6.7. Soit G un sous-groupe de Lie du groupe linéaire $GL(n, \mathbb{R})$. Un G -fibré vectoriel E au-dessus d'une variété X est la donnée pour chaque $x \in X$ d'un espace vectoriel de dimension n , appelé fibre au point x et noté E_x et d'un atlas (U_i, φ_i) de X donnant lieu à des isomorphismes $U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(U_i)$ de la forme $(x, v) \rightarrow (x, L_x(v))$ où $L_x(v) \in E_x$ et L_x est un isomorphisme linéaire de \mathbb{R}^n sur E_x . p est la projection évidente de $E = \cup E_x$ sur X . On demande que les changements de trivialisations soient dans G . Il revient au même de dire qu'il y a des sections locales C^∞ e_1, \dots, e_n qui forment en chaque point m une base de E_m .

EXEMPLE 14.1. Fibrés triviaux

EXEMPLE 14.2. Le ruban de Möbius

EXEMPLE 14.3. Fibrés canoniques sur les projectifs

EXEMPLE 14.4. Sous fibrés d'un fibré trivial, exemple des espaces propres

EXEMPLE 14.5. Fibré tangent à une variété

EXEMPLE 14.6. Fibré tangent à une sous-variété

14.3. Groupe de jauge.

DÉFINITION 6.8. Un élément g du groupe de jauge est la donnée pour chaque x d'un isomorphisme linéaire de E_x noté $g(x)$ qui, dans toute trivialisations locale, soit transformée en un élément de G .

Attention : si G non abélien, un élément du groupe de jauge n'est pas une application de X dans G !

14.4. Connections et holonomies.

DÉFINITION 6.9. Une connection ou dérivée covariante ∇ sur un G -fibré vectoriel associée à chaque vecteur tangent $V \in T_m X$ et à une section locale de E au voisinage de m , un élément de E_m noté $\nabla_V s(m)$ qui satisfait :

- (1) Linéarité en V et en s
- (2) Leibniz :

$$\nabla_V(\phi s)(m) = \phi(m)\nabla_V s(m) + d\phi(m)s(m)$$

(3) Dans une trivialisatation locale (et donc dans toutes)

$$\nabla_V s = ds(m, V) + A(m, V)(s(m))$$

où $A(m, V) \in \mathcal{G}$

A est donc une 1-forme différentielle à valeurs dans \mathcal{G} . Attention A dépend de la trivialisatation locale. On peut écrire de la façon suivante, si $s = \sum s^i e_i$, on a :

$$\nabla_\mu s = \sum_i \frac{\partial s^i}{\partial x^\mu} e_i + \sum_{i,j} A_{\mu,i}^j s^i e_j$$

et pour tout μ , $A_{\mu,i}^j \in \mathcal{G}$.

Exemple 1 : avec $G = U(1) \subset GL(1, \mathbb{C})$ et $\mathcal{G} = i\mathbb{R}$.

$$\nabla_\mu s = \frac{\partial s}{\partial x^\mu} + iA_\mu s$$

où $\sum A_\mu dx^\mu$ est une 1-forme à valeurs réelles.

Exemple 2 : repère mobile sur une surface. Soit $(e_1(m), e_2(m))$ un repère orthonormé de l'espace tangent à une surface $S \subset \mathbb{R}^3$. La connection de Levi-Civita consiste à prendre la dérivée totale et à reprojetter sur l'espace tangent.

$$\nabla e_1 = \omega_{1,2} e_2, \quad \nabla e_2 = -\omega_{1,2} e_1$$

Ici $G = SO(2)$ est abélien et la courbure est " $d\omega_{1,2}$ ". C'est la courbure de Gauss de X .

Holonomies : si $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ est un lacet différentiable basé en $p \in X$ et $s(0) \in E_p$, on peut résoudre l'équation différentielle

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} s(t) = 0$$

L'application $H_\gamma : s(0) \rightarrow s(1)$ est un endomorphisme de E_p qui est un élément de G . H_γ s'appelle l'*holonomie* de γ (pour la connection ∇). Elle varie en général quand on déforme γ .

14.5. Courbure. $F = dA + [A, A]$ est une 2-forme à valeurs dans \mathcal{G} . On a :

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]s = F(\partial_\mu, \partial_\nu)s$$

15. Les équations de Maxwell revisitées

On introduit les 2-formes :

$$\begin{aligned} \Phi &= B + E \wedge dt \\ \Gamma &= D - H \wedge dt \end{aligned}$$

et on a le système de Maxwell

$$\begin{cases} d\Phi = 0 \\ d\Gamma = 0 \\ D = \varepsilon E \\ B = \mu H \end{cases}$$

où ε est le tenseur diélectrique et μ le tenseur de perméabilité magnétique qui sont symétriques :

$$\varepsilon = (\varepsilon_{i,j}(x)), \quad \mu = (\mu_{i,j}(x))$$

On cherche des solutions stationnaires de la forme

$$\Phi = \Phi_0 e^{ikt}, \quad \Gamma = \Gamma_0 e^{ikt}$$

où $\Phi_0 = B_0 + E_0 \wedge dt$, $\Gamma_0 = D_0 - H_0 \wedge dt$ avec $dB_0 = 0$, $dD_0 = 0$. On a alors :

$$\begin{cases} \mu H + \frac{1}{ik} dE = 0 \\ -\frac{1}{ik} dH + \varepsilon E = 0 \end{cases}$$

et on a le paramètre semi-classique $h = 1/k$. La matrice de dispersion est :

$$M_{\text{class}} = \begin{pmatrix} & & & 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ & \mu(x) & & \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ & & & -\xi_2 & \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_3 & -\xi_2 & & & \\ -\xi_3 & 0 & \xi_1 & & \varepsilon(x) & \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

et la relation de dispersion est de la forme

$$p(x, \xi) = 0$$

où p est de degré 4 en ξ . Les surfaces $F_x = \{\xi \mid p(x, \xi) = 0\}$ sont les surfaces de Fresnel.

16. Théorie de Morse : l'approche de Witten

17. Connection de Levi-Civita des surfaces

On considère une surface qui est une sous-variété de dimension 2 de \mathbb{R}^3 . Le fibré tangent de cette surface admet une connection naturelle donnée en projetant orthogonalement la dérivée dans \mathbb{R}^3 sur le fibré tangent de la surface ; si $m \in X$:

$$\nabla_X V = \text{Proj}_{T_m X} D_X V .$$

On vérifie facilement que cette connection préserve la structure riemannienne

$$d_X \langle V, W \rangle = \langle \nabla_X V, W \rangle + \langle V, \nabla_X W \rangle .$$

et est *sans torsion* :

$$\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W] .$$

On va voir que cette connection est intrinsèque, i.e. ne dépend que de la structure riemannienne : en effet il n'y a qu'une connection sans torsion compatible avec la métrique riemannienne.

Calculons la dans un repère mobile :

$$dM = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$$

avec $\omega_i \in \Omega^1(X)$.

$$\nabla_V e_1 = \theta(V) e_2, \quad \nabla_V e_2 = -\theta(V) e_1$$

et

$$\begin{aligned} \nabla_1 e_2 - \nabla_2 e_1 &= [e_1, e_2] \\ -\theta(e_1) e_1 - \theta(e_2) e_2 &= [e_1, e_2] \end{aligned}$$

18. Courbure des surfaces

19. Formules de Gauss-Bonnet

Bibliographie

- [Ahu87] Ahumada, G. Fonctions périodiques et formule de traces de Selberg sur les arbres. *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 305:709–712, 1987.
- [Arn84] Arnold, V. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Mir, 1984.
- [AT76] Almgren, F. and Taylor, J. The geometry of soap films and soap bubbles. *Scientific American*, 7:82–93, 1976.
- [Bar95] Bar-Natan, D. On the Vassiliev knot invariants. *Topology*, pages 423–472, 1995.
- [Bea82] Beardon, A. *The geometry of discrete groups*. Springer, 1982.
- [Ber67] Berge, C. *Théorie des graphes et applications*. Dunod, Paris, 1967.
- [Ber77] Berger, M. *Géométrie*. Cedic, 1977.
- [BG87] Berger, M. and Gostiaux, B. *Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces*. PUF, 1987.
- [Big74] Biggs, N. *Algebraic graph theory*. Cambridge U. P., 1974.
- [Bir91] Birman, J. Recent developments in Braid and Link theory. *Math. Intell.*, 13:52–60, 1991.
- [Bir93] Birman, J. New points of view in knot theory. *Bull. AMS*, 28:253–287, 1993.
- [BLW76] Biggs, N., Lloyd, E., and Wilson, R. *Graph theory 1736-1936*. Clarendon, 1976.
- [BM94] Baez, J. and Munian, J. *Gauge Fields, Knots and Gravity*. World Scientific, 1994.
- [Bol79] Bollobas, B. *Graph Theory*. Springer, 1979.
- [BS90] Bamberg, S. and Sternberg, S. *A course of Mathematics for students in Physics*. Cambridge university, 1990.
- [BZ85] Burde, G. and Zieschang, H. *Knots*. de Gruyter, 1985.
- [Cha94] Chaves, Nathalie and Weber, Claude. Plombages de rubans et problème des mots de Gauss. *Expo. Math.*, 12:53–77, 1994.
- [Col94] Colin de Verdière, Y. Réseaux électriques planaires I. *Comment. Math. Helv.*, 69:351–374, 1994.
- [Col96] Colin de Verdière, Y. and Gitler, I. and Vertigan, D. Réseaux électriques planaires II. *Comment. Math. Helv.*, 71:144–167, 1996.
- [Con90] Connes, A. *Géométrie non commutative*. Interéditions, 1990.
- [Cox65] Coxeter, H. *Non-Euclidean geometry*. U. Toronto Press, 1965.
- [Dom97] Dombrowski, P. 150 years after Gauss' disquisitiones generales circa superficies curvas. *Astérisque (SMF)*, 62:91–153, 197.
- [Esc70] Escher, M. C. *L'oeuvre graphique*. Solin, Paris, 1970.
- [Euc94] Euclide. *Les éléments, 2 vol. (commentés par b. Vitrac)*. PUF, 1994.
- [Gre67] Greenberg, M. *Lectures on Algebraic Topology*. Benjamin, 1967.
- [Gre74] Greenberg, M. *Euclidean and non-Euclidean geometries : development and history*. Freedman, San-Francisco, 1974.
- [Gro81] Gromov, M. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*. Cedic, 1981.
- [HKW86] Harpe, P. de la, Kervaire, M., and Weber, C. On the Jones polynomial. *L'enseignement mathématique*, 32:271–335, 1986.
- [Hop83] Hopf, H. *Differential geometry in the large*. Lecture Notes in Math 1000 (Springer), 1983.
- [J97] Jones, V. and ... *La science des noeuds*. Pour la science, 1997.
- [Jon85] Jones, V. A polynomial invariant of knots and links. *Bull. AMS*, 12:103–111, 1985.
- [Jon90] Jones, V. Knot theory and statistical mechanics. *Scientific American*, pages 52–57, 1990.
- [Kau91] Kauffmann, L. *Knots and Physics*. World Scientific, 1991.
- [Kau95] Kauffman, L. *Knots and applications*. World Scientific, 1995.
- [Lie93] Lieb, E. and Loss, M. Fluxes, Laplacians and Kasteleyn's Theorem. *Duke Math. J.*, 71:337–363, 1993.

- [Mas77] Massey, W. *Algebraic topology: an introduction*. Springer, 1977.
- [Mil63] Milnor, J. *Morse Theory*. Princeton, 1963.
- [Mil65] Milnor, J. *Topology from the differentiable viewpoint*. U.P. of Virginia, 1965.
- [Mil82] Milnor, J. Hyperbolic geometry : the first 150 years. *Bull.AMS*, 6:9–24, 1982.
- [Nas91] Nash, C. *Differential Topology and Quantum Fields Theory*. Academic Press, 1991.
- [Nas97] Nash, C. Topology and Physics—a historical essay. *preprint électronique*, pages 1–59, 1997.
- [Pla73] Plateau, J. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gauthier-Villars, 1873.
- [Poh80] Pohl, W. DNA and Differential Geometry. *Math. Intell.*, 3:20–27, 1980.
- [Poi32] Poincaré, H. *La science et l'hypothèse*. Flammarion, 1932.
- [Pon52] Pontryagin, L. *Foundations of Combinatorial Topology*. Graylock, 1952.
- [Rie68] Riemann, B. . *Oeuvres mathématiques. Traduites par l. Laugel*. Albert Blanchard, 1968.
- [Rin74] Ringel, G. *Map color theorem* . Springer Grundlehren, 1974.
- [Tho67] Thomson, Sir W., baron Kelvin. Hydrodynamics. *Proc. royal Soc. Edinburgh*, 6:94–105, 1867.
- [Thu97] Thurston, B. *Three-dimensional geometry and topology. Volume 1*. Princeton, 1997.
- [Vas90] Vassiliev, V.A. *Theory of singularities and its applications*. Arnold, AMS, 1990.
- [Vog93] Vogel, P. Invariants de Vassiliev des noeuds. *Séminaire Bourbaki*, 769:213–232, 1992-93.
- [Wit89] Witten, E. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.*, 121:351–399, 1989.