

[3], [2], [4], [5], [7], [10], [6], [8], [9], [12], [11], [13], [14], [15], [18], [16], [17],
[19], [20], [21], [24], [25], [23], [27], [26], [28], [22], [29],[33], [30], [31], [32], [34],
[35], [36], [37], [38], [39], [1], [40]

Équilibre instable en régime semi-classique - I: Concentration microlocale.

Yves Colin de Verdière
ycolver@

Bernard Parisse
parisse@fourier.ujf-grenoble.fr

Institut Fourier
URA 188 du CNRS
BP 74
38402 St Martin d'Hères Cedex

June 11, 1997

Abstract

On s'intéresse tout d'abord aux fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger en dimension 1:

$$\left(-\frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\phi(x) = E(h)\phi(x), \quad (1)$$

- où V est un potentiel C^∞ , $V(x) = -x^2/2 + o(x^2)$ au voisinage de $x = 0$ et $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) > 0$.
- où h tend vers 0 (limite semi-classique)
- et où $E(h)$ est un niveau d'énergie qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

On montrera que les fonctions propres se concentrent au point $x = 0$ à une vitesse au plus logarithmique en h .

On en déduira l'existence de fonctions propres du laplacien sur des surfaces de révolution de courbure -1 qui se concentrent sur une géodésique instable (en $1/\ln(\lambda_k)$).

1 Introduction.

Le problème étudié dans cet article est celui de la localisation (ou plus précisément de la *microlocalisation*) de fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger

$$H = -\frac{h^2}{2} \Delta_g + V,$$

où Δ_g est le laplacien d'une variété riemannienne X lorsque $h \rightarrow 0^+$ (limite semi-classique). Plus précisément, on se limitera aux cas où:

- $X = \mathbb{R}$ (ou un intervalle de \mathbb{R}),
- X est une surface compacte munie d'une métrique à courbure -1 .

Techniquement, 2 outils permettent de décrire la microlocalisation d'une famille φ_h de fonctions propres de H associées aux valeurs propres $E(h)$ convergentes vers E_0 .

- La notion (qualitative) de *h-front d'onde* (WF^h) de la famille φ_h (voir § 2), analogue de celle de microsupport introduite dans [6], et dérivée de la notion de *wavefront set* de Hörmander [29]. Le WF^h est l'ensemble des points de $T^*(X)$ où φ_h a des oscillations non négligeables ($O(h^\infty)$) lorsque h tend vers 0^+ . Lorsque φ_h est solution (microlocale) de (1) avec $E(h) \rightarrow E_0$, l'ensemble $Z = WF^h(\varphi_h)$ est un fermé invariant par le flot hamiltonien Y_p de p de la couche d'énergie $\Sigma_{E_0} = \{p(x, \xi) = E_0\}$ où $p(x, \xi) = \frac{1}{2}\|\xi\|^2 + V(x)$.
- La notion de *mesure de concentration* (microlocale) (§ 2): on associe à φ_h une mesure de probabilité μ_h sur $T^*(X)$ dont les limites vagues μ_∞ sont définies sans ambiguïté. Sous les mêmes hypothèses que précédemment, ces mesures de probabilité μ_∞ sont également portées par Σ_{E_0} et invariantes par Y_p .

Une relation entre ces 2 notions est que $\text{Support}(\mu_\infty) \subset WF^h(\varphi_h)$.

Rappelons quelques résultats.

- Les propriétés semi-classiques du spectre de l'opérateur de Schrödinger en dimension 1 sont bien connues en-dehors de voisinages des maxima locaux du potentiel (cf. [25], [26] et les références citées dans leurs articles). Les premiers auteurs qui se sont attaqués aux valeurs de l'énergie proches de maxima locaux du potentiel sont probablement Ford, Hill, Wakeno et Wheeler ([15]): ils étudient le potentiel $V(x) = -x^2$ à l'aide de solutions explicites de l'équation différentielle. Plus récemment des résultats ont été obtenus ou annoncés par:
 - C.Gérard et A.Grigis ([16]) dans le cas de potentiels analytiques,
 - C.März ([30]) sur l'équation de Hill avec un potentiel analytique,
 - Duclos et Høegreave sur la concentration de fonctions propres d'énergie exactement la valeur critique (cf. [13]),
 - Brummelhuis, Paul et Uribe sur la fonction de comptage du nombre de valeurs propres (comme corollaire, cf. [4]),
 - Petre et Rusu sur l'asymptotique des valeurs propres ([5]),
 - J.Sjöstrand ([37]) sur la réduction microlocale de l'opérateur de Schrödinger avec des applications à l'étude de la densité d'état. Certains résultats de Sjöstrand sont très voisins de ceux obtenus dans ce travail (existence de la forme normale), ou dans la deuxième partie de ce travail

(l'écriture des conditions de Bohr-Sommerfeld pour le "huit" servira de point de base à l'étude des valeurs propres dans [11], tandis que Sjöstrand donne les conditions de Bohr-Sommerfeld pour le "huit" tourné de $\pi/4$).

Dans tous les cas, il semble que des logarithmes du paramètre semi-classique apparaissent.

- Dans le cas où l'hamiltonien p est complètement intégrable et où E_0 est une valeur régulière de p , on a depuis longtemps une description complète des valeurs propres données par les conditions de Bohr-Sommerfeld et des fonctions propres construites au moyen d'intégrales oscillantes. Les fonctions propres (ou au moins les quasi-modes) se concentrent sur les variétés lagrangiennes invariantes données par les intégrales premières.
- On peut également construire des quasi-modes dans des situations plus génériques, par exemple lorsque Y_p admet des trajectoires périodiques stables génériques, ([3], [2], [6], [31]).
- Dans le cas où le flot hamiltonien de p est ergodique sur Σ_{E_0} le résultat principal est le théorème de Schnirelmann [35] dont une démonstration complète a été donnée dans [40], [9], [23]: les sous-suites qui convergent vers une mesure μ_∞ différente de la mesure de Liouville de Σ_{E_0} (E_0 valeur régulière de p) sont de densité 0 dans le spectre. Ce dernier résultat laisse ouverte la possibilité de sous-suites de densité 0 associées à des fonctions propres se concentrant sur des trajectoires périodiques instables ou des points d'équilibre instables. Une telle possibilité a été mise en évidence numériquement dans le cas de billards en particulier par Heller [28], qui leur a donné le nom de *scars* (cicatrices). Pour ces problèmes, voir aussi [18]. Des calculs analogues dans le cas de laplaciens à courbure -1 ont été faits par Hejhal et Rackner ([22]). Dans le cas du laplacien sur une surface X à courbure constante -1 , $X = \mathcal{H}/\Gamma$, Rudnik et Sarnak ([33], [34]) ont montré que si le groupe Γ est arithmétique, toute mesure μ_∞ associée à une suite de fonctions propres sur laquelle les opérateurs de Hecke opèrent diagonalement ne peut pas avoir une partie singulière par rapport à la mesure de Liouville concentrée sur une réunion finie de géodésiques fermées.

Décrivons maintenant les résultats prouvés dans cet article:

1. X est un *intervalle de \mathbb{R}* et l'on suppose que $E_0 = 0$ est un maximum local non dégénéré de V atteint en $x = 0$ tel que $V^{-1}(0)$ ne contienne pas d'autre points critiques.

Le théorème 1.3 de [4] montre alors que H admet un nombre de l'ordre de $|\ln h|$ valeurs propres dans tout intervalle $[-Ah, Bh]$, l'équivalent précis étant donné par la formule de Weyl:

$$\frac{1}{2\pi h} \text{vol}(-Ah \leq p \leq Bh) .$$

Les mesures μ_h correspondantes convergent vaguement vers la masse de Dirac $\delta_{0,0}$, mais cette convergence est lente: par exemple, si K est un compact dont l'intersection avec chaque branche de Σ_0 est d'intérieur non vide, alors:

$$\mu_h(K) \geq \frac{C}{|\ln h|} .$$

Il faut remarquer que lorsque h décroît, une valeur propre donnée ne reste pas dans l'intervalle $[-Ah, Bh]$ mais des valeurs propres d'indices plus élevés se trouvent alors dans la "fenêtre" du spectre que nous étudions. Les résultats décrits dans cet article s'appliquent donc à des familles de valeurs propres qui ont des discontinuités lorsque h varie. Pour fixer les idées, on trouvera à la fin de ce travail une figure donnant une idée du spectre de l'opérateur de Schrödinger lorsque le potentiel admet deux puits symétriques (par exemple, si $V(x) = x^4 - x^2$).

2. Dans le cas où X est une surface compacte munie d'une métrique à courbure -1 .

Si tout d'abord, X est une surface de révolution à bord et que l'on considère le problème de Dirichlet ou de Neumann, les résultats précédents s'appliquent au moyen d'une séparation des variables et montrent l'existence de suites φ_{j_k} de fonctions propres du laplacien Δ_g qui se concentrent sur l'équateur qui est une géodésique fermée instable.

On obtient d'autre part une minoration de la vitesse de concentration d'une suite de fonctions propres sur une géodésique fermée (nécessairement instable) pour une surface compacte à courbure -1 arbitraire.

Dans un prochain travail ([11]), nous étudierons la répartition des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger en dimension 1, notre but est de généraliser les conditions de Bohr-Sommerfeld au cas du maximum non dégénéré.

Nous aimerions dédier cet article à la mémoire de Jacques Vey, qui avait répliqué au premier auteur, il y a près de 15 ans, et alors que ce dernier suggérait qu'une telle concentration de fonctions propres sur une trajectoire périodique instable était sûrement impossible: "cela ne m'étonnerait pas que tu arrives au résultat opposé".

Contents

1	Introduction.	1
2	Outillage microlocal.	6
2.1	Le cas où $I = \mathbb{R}$	6
2.2	Passage de $T^*\mathbb{R}$ à T^*I	12
2.3	Solutions microlocales.	13
3	Forme normale.	13

4	Le modèle $P = \frac{\hbar}{i}(x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2})$.	16
4.1	Solutions de $(P - E)v = 0$.	16
4.2	Solutions microlocales de $P - E$.	17
4.3	Mesures de concentration des solutions microlocales.	19
4.4	Espace vectoriel des solutions microlocales de $P - E$.	21
5	Concentration microlocale près d'un point d'équilibre instable.	24
6	Surfaces de révolution à courbure -1.	26
7	Vitesse de concentration à courbure -1.	28

2 Outillage microlocal.

Les résultats rappelés dans cette section sont destinés aux usagers de la théorie des pseudo-différentiels classiques en vue de leur faciliter le passage à la théorie asymptotique (Maslov-Leray). Pour des preuves des énoncés, on pourra consulter [32], [10], ... et [27] pour le cas analytique.

On choisit de formuler les énoncés pour un intervalle ouvert I de \mathbb{R} (qui peut être \mathbb{R} tout entier), mais les résultats de *cette* section sont valides dans un ouvert de \mathbb{R}^n et par suite sur une variété compacte.

Tout d'abord, nous prenons $I = \mathbb{R}$.

2.1 Le cas où $I = \mathbb{R}$.

1. *Symboles:*

Soit $a_h(x, \xi)$ une famille de fonctions appartenant à $C^\infty(T^*\mathbb{R}, \mathcal{C})$. On dira que a_h est un symbole d'ordre (m, k) (et on notera $a_h \in S^{m,k}$) si:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \exists C_{\alpha, \beta} > 0, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_h(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} h^m (1 + |x| + |\xi|)^{k - |\alpha| - |\beta|}, \quad (2)$$

uniformément par rapport à h .

Dans tous les cas qui vont nous intéresser, la dépendance en h du symbole $a_h(x, \xi)$ sera *classique*, c'est-à-dire du type:

$$a_h(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^{m+j} a_j(x, \xi), \quad (3)$$

où les $a_j \in S^{0,k}$ sont indépendants de k et où le signe \sim signifie que:

$$\forall N \in \mathbb{N}, a_h - \sum_{j=0}^N a_j h^{m+j} \in S^{m+N+1,k}. \quad (4)$$

2. *Quantification de Weyl et quantification positive (antiwick)*

Rappelons que le h -quantifié de Weyl A d'un symbole $a_h \in S^{m,k}$ est défini par:

$$(Au)(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int e^{\frac{i}{h}(x-y) \cdot \xi} a_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi. \quad (5)$$

Un des avantages de cette quantification est que:

$$\text{Op}(\bar{a}) = (\text{Op}(a))^*.$$

Un défaut de cette quantification est qu'à un symbole positif, elle n'associe pas forcément un opérateur positif, d'où la recherche d'une quantification positive, c'est-à-dire une quantification vérifiant la propriété suivante:

A tout symbole positif, on associe un opérateur positif.

Un choix possible en est donné dans l'article de Helffer-Martinez-Robert ([23, (1.5)], voir aussi Voros: [1]):

$$\text{Op}_h^{AW}(a_h) = \frac{1}{(2\pi h)} \int a_h(y, \eta) \Pi_h^{y, \eta} dy d\eta, \quad (6)$$

où:

- $\Pi_h^{0,0}$ désigne la projection sur l'état fondamental normalisé $n_h^{0,0}$ de l'oscillateur harmonique:

$$n_h^{0,0}(x) = (\pi h)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2h}x^2}, \quad (\Pi_h^{0,0}u)(x) = (\pi h)^{-1} e^{-\frac{1}{2h}x^2} \int e^{-\frac{1}{2h}y^2} u(y) dy,$$

- $\Pi_h^{y,\eta}$ est la projection sur le translaté de (y, η) de $n_h^{0,0}$ dans l'espace des phases. Il s'agit d'effectuer les translations $x \rightarrow x - y$ puis $\xi \rightarrow \xi - \eta$:

$$n_h^{y,\eta}(x) = (\pi h)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2h}(x-y)^2} e^{\frac{i}{h}x\eta}. \quad (7)$$

La forme (6) permet immédiatement de voir que la positivité est vérifiée.

De plus, en appliquant le Théorème (IV-9) de [32, p.202], on montre que si $a_h \in S^{m,k}$, alors $\text{Op}_h^{AW}(a_h)$ est un o.p.d. de h -symbole de Weyl:

$$a_h^W(x, \xi) = \frac{1}{(\pi h)} \int a_h(y, \eta) e^{-\frac{1}{h}((x-y)^2 + (\xi-\eta)^2)} dy d\eta, \quad (8)$$

avec:

$$a_h^W - a_h(x, \xi) \in S^{m+1,k},$$

et, lorsque a_h est un symbole classique, le symbole a_h^W admet un développement classique en puissances de h dont le premier terme est $a_0(x, \xi)$.

Le théorème de Calderon-Vaillancourt (cf [32, Théorème II-36, p.84]) permet de prouver que l'opérateur A , h -quantifié de Weyl d'un symbole $a \in S^{0,0}$, est uniformément¹ borné de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Bien sûr la continuité uniforme dans L^2 est également vérifiée pour d'autres quantifications, en particulier pour la quantification positive (ou antiwick), que nous utiliserons plus loin pour définir une mesure associée à une famille de fonctions propres.

Remarque 1 *Pour toutes ces quantifications, l'opérateur identité a pour symbole 1.*

3. Famille h -admissible:

On souhaiterait remplacer une fonction $u(x)$ indépendante de h par une famille $\phi_h(x)$ dans la définition (6) du quantifié positif d'un symbole a . La définition de l'action du quantifié (positif ou de Weyl) d'un symbole

¹par rapport à h .

a appartenant par exemple à $S^{0,0}$ sur une famille ϕ_h sera possible si on choisit une famille de fonctions $\phi_h \in C^\infty$ telles que:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, |\phi_h|_{L^2} = O(h^{-N_0}). \quad (9)$$

Mais par dualité, on peut passer de fonctions C^∞ à des familles de distributions. D'où la:

Définition 1 *On dira que $\phi_h(x)$ est une famille h -admissible de distributions s'il existe trois entiers N_1, N_2, N_3 tels que:*

$$\forall u \in \mathcal{S}, \quad \left| \int u(x)\phi_h(x)dx \right| \leq h^{-N_1} |(1+x^2)^{N_2} u|_{W^{\infty, N_3}}, \quad (10)$$

où la norme dans W^{∞, N_3} est le sup des N_3 premières dérivées.

Par exemple, une famille de fonctions propres normées de l'équation de Schrödinger vérifie (9) donc est à fortiori h -admissible.

4. *Microsupport (WF^h):*

On définit le microsupport (aussi appelé h -front d'onde ou encore "frequency set" dans [20, p. 398]) d'une famille admissible de la façon suivante:

- Soit U un ouvert de $T^*\mathbb{R}$, alors:

$$U \cap WF^h(\phi_h) = \emptyset \quad \text{si} \quad \forall a \in S^{m,k} / \text{Supp} a \subset\subset U, \quad |\text{Op}^w(a)\phi_h|_{L^2(U)} = O(h^\infty). \quad (11)$$

- Le microsupport est alors le complémentaire de la réunion des ouverts vérifiant (11).

Il semble que cette notion de h -front d'onde ne soit pas parfaitement adaptée au problème, parce que sa définition est calquée sur le front d'onde C^∞ . Or, le front d'onde C^∞ est un ensemble conique en ξ ce qui n'est pas le cas du h -front d'onde. Autrement dit, dans le cas du front d'onde C^∞ on peut se ramener à un ensemble compact pour les fréquences, alors que dans le cas du h -front d'onde ce n'est plus possible. Il s'ensuit que la définition (11) ne décrit pas les propriétés d'une famille h -admissible lorsque ξ tend vers l'infini.

On complète donc cette définition par $(x_0, \infty\xi_0) \notin WF^h(\phi_h)$ s'il existe un symbole χ , homogène en ξ et elliptique en (x_0, ξ_0) tel que:

$$\text{Op}^H(\chi)\phi_h(x) = O(h^\infty), \quad (12)$$

où Op^H désigne la quantification usuelle (de Hörmander), définie sans paramètre h .

Le front d'onde classique étant un ensemble conique par rapport aux fréquences, la définition ne dépend donc que de la direction de ξ_0 . De plus:

Remarque 2 *La partie $(x, \infty\xi)$ du h -front d'onde d'une famille ϕ ne dépendant pas de h est son front d'onde au sens de Hörmander.*

5. *Mesures de concentration microlocales:*([17])

Définition 2 *On définit les mesures de concentration d'une famille h -admissible ϕ_h par:*

$$a \in S^{0, -\infty} \rightarrow \mu_h(a) = (Op^{AW}(a)\phi_h | \phi_h), \quad (13)$$

où Op^{AW} désigne la quantification positive.

Des notions très voisines ont été introduites par P. Gérard ([17]) et L. Tartar ([39]).

On peut donner un sens à (13) si la famille ϕ_h est h -admissible puisque a est à décroissance rapide en x et ξ . Les μ_h sont à fortiori définies sur des symboles $a \in C_0^\infty$, ce sont donc des distributions. Le choix de la quantification positive en fait des distributions positives, donc des mesures d'après Schwartz (cf. [36]).

Lorsque la famille ϕ_h est normée dans L^2 , on obtient une famille de mesures de probabilité définies sur le cotangent X (ce sont bien des mesures puisqu'on a choisi la quantification positive).

Les physiciens appellent mesure de Husimi les mesures μ_h .

Remarque 3 *A des erreurs d'ordre $O(h)$ près, on peut remplacer la quantification positive de (13) par la quantification de Weyl. Plus généralement, un autre choix de quantification positive amènerait à la même conclusion. On peut donc dire que les mesures μ_h ont un sens intrinsèque à $O(h)$ près, quand on les évalue sur C_0^∞ .*

6. *Exemples d'applications:*

Tous les résultats de la théorie habituelle des opérateurs pseudo-différentiels s'appliquent (cf [32] pour les WF^h non étendus). Par exemple, la construction de paramétrix permet de montrer que le h -front d'onde d'une famille de fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger associée à une famille de valeurs propres tendant vers E est contenu dans la couche d'énergie E définie par:

$$\{(x, \xi)/\xi^2 + V(x) = E\}.$$

Un lien entre cette notion de microsupport et la notion de mesures microlocales est que toute limite vague des mesures de concentration microlocale d'une famille normée est incluse dans le microsupport de la famille. Un des buts de cet article est justement de préciser (un peu!) comment cette limite est atteinte lorsque l'énergie E est maximum local du potentiel.

Regardons maintenant des solutions *BKW* de l'équation de Schrödinger attachée à une variété lagrangienne Λ , en-dehors du lieu critique. La famille $\phi_h(x)$ est alors définie (localement) par:

$$\phi_h(x) = a_h(x)e^{\frac{i}{h}S(x)} \quad \text{où } \Lambda = \{(x, S'(x))\}, \quad (14)$$

et où a_h est un symbole classique.

Notons π_Λ la restriction à Λ de la projection canonique de $T^*\mathbb{R}$ sur \mathbb{R} . On vérifie alors facilement que, localement en x , on a:

$$WF^h(\phi_h) \subset \Lambda, \quad \mu_h(x, \xi) = \pi_\Lambda^*(|a_0|^2(x) dx) + O(h), \quad (15)$$

autrement dit, le h -front d'onde est porté par la variété lagrangienne et les mesures de concentration sont égales au carré du symbole principal de l'intégrale oscillante. Ce résultat est d'ailleurs vrai sans condition sur le lieu critique (cf. Duistermaat: [14]).

7. *Théorème d'Egorov:*

Dans notre contexte, ce théorème peut s'énoncer ainsi: μ Les mesures de concentration microlocales μ_h associées à une famille de solutions d'un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal p sont invariantes par le flot hamiltonien de p à $O(h)$ près.

(Ici "à $O(h)$ près" signifie si on teste les mesures sur une fonction C_0^∞).

8. *Opérateurs intégraux de Fourier associés à une transformation canonique:*

Il s'agit de décrire des classes d'opérateurs qui transforment le microsupport d'une famille de distributions lagrangiennes, la transformation associée sera notée τ et supposée canonique (ici comme le cotangent est de dimension 2, cela signifie que τ préserve l'aire orientée).

Soit $b_h \in S^{m,k}$ et $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Un opérateur intégral de Fourier de symbole b_h est un opérateur U de la forme:

$$(Uu_h)(x) = \frac{1}{2\pi h} \int e^{\frac{i}{h}\phi(x,y,\theta)} b_h(y, \theta) u_h(y) dy d\theta,$$

où ϕ est une fonction phase associée à la transformation canonique τ , en un sens que nous allons rappeler.

Lorsque u_h a la forme (14), il s'agit de comprendre l'intégrale oscillante:

$$\frac{1}{2\pi h} \int e^{\frac{i}{h}(\phi(x,y,\theta)+S(y))} b_h(y, \theta) a_h(y) dy d\theta.$$

On applique le théorème de la phase stationnaire, le point critique (y_c, θ_c) est donné par:

$$\begin{cases} \partial_y \phi(x, y, \theta) & = & -S'(y) \\ \partial_\theta \phi(x, y, \theta) & = & 0 \end{cases},$$

donc:

$$(Uu_h)(x) = (1+O(h)) \frac{1}{\sqrt{|\det\phi''(x, y_c, \theta_c)|}} e^{iN\frac{\pi}{4}} b_h(y_c, \theta_c) a_h(y_c) e^{\frac{i}{h}(\phi(x, y_c, \theta_c) + S(y_c))},$$

où N est la signature de ϕ'' , et son terme principal est une distribution lagrangienne associée à:

$$\{(x, \xi) / \xi = \partial_x(\phi(x, y_c(x), \theta_c(x)) + S(y_c(x)))\},$$

ou encore (appliquant la définition de y_c et θ_c):

$$\{(x, (\partial_x\phi)(x, y_c(x), \theta_c(x))) / \partial_y\phi(x, y_c, \theta_c) = -S'(y_c) \text{ et } \partial_\theta\phi(x, y_c, \theta_c) = 0\}.$$

Si on trouve $\phi(x, y, \theta)$ telle que:

$$\tau(y, -\partial_y\phi(x, y, \theta)) = (x, \partial_x\phi(x, y, \theta)), \quad (16)$$

alors U transformera u_h associée à $\tilde{\Lambda}$ en une distribution lagrangienne associée à $\tau(\tilde{\Lambda}) = \Lambda$.

On dit alors que la phase ϕ est associée à la transformation canonique τ .

Par exemple, la phase $\phi(x, y, \theta) = (y - x).\theta$ est associée à $\tau = id$ et les o.i.f. associés sont des opérateurs pseudodifférentiels.

La transformation de Fourier est aussi un o.i.f. de phase $\phi(x, y, \theta) = -xy + \frac{1}{2}\theta^2$ que l'on peut réduire en intégrant en θ en $\phi(x, y) = -xy$.

Le composé de 2 o.i.f. U_1 et U_2 associés aux transformations canoniques τ_1 et τ_2 , de symboles principaux a_1 et a_2 est un o.i.f. U associé à la transformation canonique $\tau = \tau_1 \circ \tau_2$. Avec des choix de phases et de normalisations adéquats, le symbole principal de U est $a = a_1 a_2$.

9. Égalité microlocale entre opérateurs pseudo-différentiels.

Définition 3 Soit U un ouvert. On dira que deux opd P et Q , de symbole de Weyl p et q appartenant à $S^{m,k}$, sont égaux microlocalement sur U si $(p - q)|_U \in S^{\infty,k}$. On note alors:

$$P \sim_U Q.$$

Si $P \sim_U Q$, alors pour toute famille h -admissible ϕ_h , on a $WF^h((P - Q)\phi_h) \cap U = \emptyset$.

10. Calcul fonctionnel.

On utilise par exemple le calcul fonctionnel développé dans le livre de D. Robert: [32] (on peut aussi utiliser les extensions quasi-analytiques:

cf. Melin-Sjöstrand). Il permet de définir $F(A(h), h)$ comme un opérateur pseudodifférentiel lorsque $A(h)$ est un opérateur autoadjoint, pseudodifférentiel de symbole classique semi-borné inférieurement et lorsque F est une fonction C^∞ vérifiant une condition de décroissance à l'infini du type:

$$|F(x)| \leq C(1 + |x|)^{-s}, \quad s > 0,$$

(cf. [32, Théorème III.11, p. 142]).

Le résultat est local: le symbole principal de $F(A)$ en (x, ξ) dépend de F au voisinage de $a_0(x, \xi)$ et de a_h au voisinage de (x, ξ) (ici a_h désigne le symbole de l'opérateur A et a_0 son symbole principal).

De plus, on a:

$$FG(A) \sim F(A)G(A).$$

2.2 Passage de $T^*\mathbb{R}$ à T^*I .

Le point crucial qui permet de passer de \mathbb{R} à I est que:

$$u(x) - \frac{1}{2\pi h} \int e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi} \chi(x-y) u(y) dy = O(h^\infty),$$

pour toute troncature $\chi \in C_0^\infty([-\delta, \delta], \mathbb{R}^+)$ valant identiquement 1 dans un voisinage de 0. (Ici $v = O(h^\infty)$ signifie que pour tout compact K de I , et tout entier N , il existe $C_{N,K} > 0$ telle que $|v| \leq C_{N,K} h^N$).

On peut donc définir l'action d'un o.p.d. sur une fonction définie sur I à $O(h^\infty)$ près (au sens ci-dessus) de la façon suivante:

- on se fixe un compact K de I ,
- on prolonge une famille ϕ_h définie sur K à I tout entier de sorte que ϕ_h vaille 0 au bord de I , et qu'on ne change pas ϕ_h dans un voisinage de K ,
- on prolonge alors ϕ_h à \mathbb{R} tout entier par 0
- on calcule l'action de l'opd sur la famille ϕ_h prolongée, on en prend la restriction à K
- le résultat ne dépend pas de la manière de prolonger à des $O(h^\infty)$ près.

Pour passer de \mathbb{R} à un ouvert I , il suffit donc de prendre les traces sur I des distributions, front d'onde et symbole.

D'autre part, comme le symbole de $F(A(h), h)$ est un objet qui se calcule localement, on peut également définir un calcul fonctionnel sur I à $O(h^\infty)$ près.

2.3 Solutions microlocales.

Définition 4 Soit P un opérateur pseudo-différentiel et ϕ_h une famille h -admissible. On dit que ϕ_h est solution microlocale de:

$$P\phi_h = 0 \quad \text{sur } U \quad (17)$$

si

$$WF^h(P\phi_h) \cap U = \emptyset. \quad (18)$$

On notera alors $P\phi_h \sim_U 0$.

Comme les opérateurs pseudo-différentiels n'augmentent pas le front d'onde, si $WF^h(\phi_h) \cap U = \emptyset$ alors $P\phi_h \sim_U 0$. On est ainsi amené à la:

Définition 5 On dit que deux familles admissibles ϕ_h et ψ_h sont microlocalement égales sur l'ouvert U si:

$$WF^h(\phi_h - \psi_h) \cap U = \emptyset. \quad (19)$$

On notera alors $\phi_h \sim_U \psi_h$.

Remarque 4 Il faut noter que, contrairement à l'espace des solutions exactes de l'équation de Schrödinger sur I :

$$\left(-\frac{1}{2}h^2\Delta + V(x)\right)\phi_h(x) = E\phi_h(x),$$

qui est de dimension 2, l'espace vectoriel des solutions microlocales de cette même équation sur un ouvert de T^*I (quotienté par l'égalité microlocale) peut être de dimension arbitraire (selon le choix du potentiel $V(x)$).

Ainsi, si on prend une énergie E telle que $V(x) - E$ possède 3 puits, on peut facilement construire 3 solutions microlocales indépendantes.

3 Forme normale.

Le but de cette section est de montrer le: \vdash Soit A un opérateur autoadjoint sur son domaine, de symbole $a(x, \xi)$, et soit $P = \frac{h}{2i}(x\partial_x + \partial_x x)$ de symbole $p = x\xi$. Supposons que:

- $a(0, 0) = 0$,
- $a'(0, 0) = 0$,
- $a''(0, 0)$ est non dégénéré et de signature $(1, 1)$.

Il existe alors un opérateur intégral de Fourier U , une famille de fonction $f_h \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et un réel $\delta > 0$ tels que:

$$f_h \sim \sum_{k=0}^{\infty} f^k h^k,$$

- $f^0(0) = 0, (f^0)'(0) \neq 0,$

-

$$U^* f_h(A) U \sim_{[-\delta, \delta]^2} P, \quad (20)$$

L'analogie analytique de (20) a été traité par B.Helffer et J.Sjöstrand dans l'appendice b de Harper III ([27]), le cas C^∞ a été prouvé par J.Sjöstrand tout d'abord pour une hessienne définie (positive) en 0 ([38]), puis en toute généralité dans [37] (mais les auteurs de ce travail l'ignoraient!).

L'existence de U se montrera en deux étapes:

- Construire un o.i.f. tel que (20) soit vérifié modulo un o.p.d. d'ordre $S^{1, -\infty}$.
- En conjuguant par un o.p.d. du type $I + O(h)$, ramener l'erreur à un ordre $S^{\infty, -\infty}$.

Première étape.

Appliquons le lemme de Morse isochore (cf. [12, Théorème 1]) en dimension 2 à $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$. Le symbole a vérifie les hypothèses du Théorème 1 de [12] donc il existe un difféomorphisme $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tel que sur $[-\delta, \delta]^2$:

$$F(0, 0) = (0, 0), \quad F^* p = f(a), \quad F^*(dx \wedge d\xi) = dx \wedge d\xi,$$

pour une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Comme F conserve le volume, c'est une transformation canonique, on peut donc lui associer un o.i.f. U tel que:

$$U^{-1} f(A) U \text{ et } P \text{ ont même symbole principal sur } [-\delta, \delta]^2.$$

Ce que l'on peut traduire par:

$$\exists U_1 / U_1^{-1} f_1(A) U_1 = P + h P_1, \quad \text{où } P_1 \text{ est un opd d'ordre } S^{0, -\infty}, \quad (21)$$

avec ici $U_1 = U$, $f_1 = f$ et la convention pour la suite que l'égalité entre opérateurs signifie égalité microlocale sur $[-\delta, \delta]^2$.

Deuxième étape (récurrence).

L'hypothèse de récurrence est la suivante:

Il existe une suite d'o.i.f. (U_k) et de fonctions $f_k(E, h) \in C^\infty(\mathbb{R}_E \times]0, h_0], \mathbb{R})$ telles que:

$$U_k^{-1} f_k(A) U_k = P + h^k P_k, \quad P_k \text{ opd d'ordre } S^{0, -\infty} \quad (22)$$

$$U_k - U_{k-1} = O(h^{k-1}) \quad \text{comme o.i.f. pour } k > 1 \quad (23)$$

$$f_k - f_{k-1} = O(h^{k-1}) \quad (k > 1). \quad (24)$$

Au rang $n = 1$, notre fonction f_1 est indépendante de h . Construisons maintenant U_{n+1} et f_{n+1} en posant:

$$U_{n+1} = U_n(I + h^n V_n) \text{ où } V_n \text{ est un opd d'ordre } S^{0, -\infty}, f_{n+1}(E, h) = (\text{id} + h^n \theta_n(E)) \circ f_n(E, h). \quad (25)$$

Effectuons:

$$U_{n+1}^{-1}f_n(A)U_{n+1} = (I+h^nV_n)^{-1}U_n^{-1}f_n(A)U_n(I+h^nV_n) = (I+h^nV_n)^{-1}(P+h^nP_n)(I+h^nV_n),$$

d'après (22). Donc:

$$U_{n+1}^{-1}f_{n+1}(A)U_{n+1} = (\text{id}+h^n\theta_n)\circ((I+h^nV_n)^{-1}(P+h^nP_n)(I+h^nV_n)) = P+h^nQ_n+h^{n+1}P_{n+1},$$

où Q_n est l'opd de symbole $q_n = \theta_n(p) + p_n - \{v_n, p\}$ et où P_{n+1} est un opd d'ordre $S^{0, -\infty}$.

Il nous reste à trouver θ_n et v_n tels que $q_n = 0$. On résoud d'abord formellement cette équation en utilisant des développements de Taylor en $(0,0)$. Notons:

$$p_n \sim_{(x,\xi)\rightarrow(0,0)} \sum_{i,j\geq 0} p_n^{ij} x^i \xi^j \quad (26)$$

$$\theta_n(E) \sim_{E\rightarrow 0} \sum_{k\geq 0} \theta_n^k E^k \quad (27)$$

$$v_n \sim_{(x,\xi)\rightarrow(0,0)} \sum_{i,j\geq 0} v_n^{ij} x^i \xi^j, \quad (28)$$

où les inconnues sont les θ_n^k et les v_n^{ij} . L'équation $q_n \sim_{(x,\xi)\rightarrow(0,0)} 0$ donne pour le coefficient de $x^l \xi^m$:

$$(l-m)v_n^{lm} + p_n^{lm} + \delta_{lm}\theta_n^l = 0, \quad (29)$$

où δ_{lm} désigne le symbole de Kronecker.

Le choix de θ_n^k et v_n^{ij} vérifiant (29) est toujours possible, il suffit de poser:

$$\theta_n^l = -p_n^{ll} \text{ si } l = m, \quad v_n^{lm} = \frac{-1}{l-m} p_n^{lm} \text{ si } l \neq m,$$

la valeur des v_n^{ll} importe peu, on les prendra par exemple tous nuls. On construit (par le procédé de Borel) des fonctions C^∞ θ_n et \tilde{v}_n ayant ces développements de Taylor. Puis on effectue la translation d'inconnue:

$$v_n = V + \tilde{v}_n,$$

et il s'agit alors de résoudre l'équation:

$$H_p V = g, \quad \text{où } g = -(p_n + H_p(\tilde{v}_n) + \theta_n(p)). \quad (30)$$

Comme la fonction g est plate à l'origine, on peut résoudre (30) dans les fonctions plates à l'origine (cf. Guillemin-Schaeffer [19, Théorème 2, Section 4, p.175]).

On choisit alors f_h et U tels que:

$$f_h \sim_{k\rightarrow\infty} f_k, \quad U \sim_{k\rightarrow\infty} U_k,$$

ce qui termine la preuve du théorème 3. \diamond

4 Le modèle $P = \frac{\hbar}{i}(x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2})$.

On vient de voir au §3 comment l'étude des solutions microlocales de l'équation de Schrödinger peut être ramenée à celle des solutions microlocales de $P - E$. Il se trouve que l'équation $(P - E)v = 0$ possède une base de solutions v_{\pm} particulièrement simples et faciles à étudier. Après avoir décrit ces solutions et calculé leurs transformées de Fourier (§4.1), nous étudions les solutions microlocales qui sont également engendrées par v_{\pm} et les décrivons en dehors de $(0, 0)$ comme des fonctions oscillantes au sens de [14] associées à la variété lagrangienne $\Lambda_E = \{(x, \xi) \mid x\xi = E\}$ (§4.2).

Il reste alors à évaluer la masse totale du carré $Q = I^2$ (avec $I = [-1, +1]$) pour la mesure de concentration microlocale associée à une solution microlocale combinaison linéaire de v_+ et v_- (§4.3) et à montrer que toute solution microlocale de $P - E$ sur Q est microlocalement combinaison linéaire de v_+ et v_- (§4.4).

4.1 Solutions de $(P - E)v = 0$.

L'équation différentielle du 1er ordre

$$(P - E)v = 0$$

admet une base de solutions distributions v_{\pm} données par

$$v_{\pm}(x) = Y(\pm x)|x|^{-\frac{1}{2}}e^{i\frac{E}{\hbar} \ln|x|} ,$$

où Y est la fonction caractéristique de $]0, +\infty[$.

Ce sont des distributions tempérées qui forment une famille admissible au sens de §2.

On peut en calculer la transformée de Fourier qui est donnée comme intégrale semi-convergente par:

$$\hat{v}_{\pm}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-i\frac{x\xi}{\hbar}} v_{\pm}(x) dx . \quad (31)$$

Par un argument de déformation de contour dans le plan complexe, on obtient aisément l'expression suivante qui fait intervenir la fonction Γ :

$$\hat{v}_{+}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\xi|}} e^{-i\frac{E}{\hbar} \ln \frac{|\xi|}{\hbar}} e^{\sigma(\xi)\frac{\pi}{4}(\frac{2E}{\hbar} - i)} \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{E}{\hbar}\right) , \quad (32)$$

où $\sigma(\xi) = \pm 1$ suivant le signe de ξ , et

$$\hat{v}_{-}(\xi) = \hat{v}_{+}(-\xi) .$$

4.2 Solutions microlocales de $P - E$.

Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 sur I et à 0 hors de $2I$. On définit un opérateur pseudo-différentiel Π microlocalement égal à l'identité dans Q par la formule:

$$\Pi u(x) = \frac{1}{2\pi h} \int \int e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} \chi(\xi) \chi(y) u(y) dy d\xi . \quad (33)$$

On introduit alors les microlocalisés de v_\pm dans Q par:

$$w_\pm = \Pi v_\pm . \quad (34)$$

Les microsupports de w_\pm sont respectivement contenus dans $2Q \cap \{x \geq 0\}$ (resp. $2Q \cap \{x \leq 0\}$). De plus, w_\pm sont clairement des solutions microlocales de $P - E$ au sens que:

$$Q \cap WF_h((P - E)w_\pm) = \emptyset ,$$

et sont microlocalement égales à v_\pm :

$$Q \cap WF_h(w_\pm - v_\pm) = \emptyset .$$

Dans $Q \setminus (0, 0)$, w_\pm sont donc des fonctions oscillantes associées respectivement aux variétés lagrangiennes $\Lambda_{+,E} = \{(x, \xi) \mid x\xi = E, x \geq 0\}$ (resp. $\Lambda_{-,E} = \{(x, \xi) \mid x\xi = E, x \leq 0\}$), comme c'est le cas de v_\pm . Pour en calculer les symboles, on suppose $|E| < 1$. On définit ainsi 4 composantes de la variété Λ_E dans $Q \setminus (0, 0)$: $\Lambda_{in,+} = \{(x, \xi) \in \Lambda_E \mid \xi \geq |x|\}$, $\Lambda_{in,-} = \{(x, \xi) \in \Lambda_E \mid \xi \leq -|x|\}$, $\Lambda_{out,+} = \{(x, \xi) \in \Lambda_E \mid x \geq |\xi|\}$, $\Lambda_{out,-} = \{(x, \xi) \in \Lambda_E \mid x \leq -|\xi|\}$, et, à chacune de ces variétés, on associe une fonction oscillante:

$$\varphi_{out,\pm} = Y(\pm x) \frac{1}{\sqrt{|x|}} e^{i\frac{E}{h} \ln|x|} , \quad (35)$$

$$\hat{\varphi}_{in,\pm} = Y(\pm \xi) \frac{1}{\sqrt{|\xi|}} e^{-i\frac{E}{h} \ln|\xi|} . \quad (36)$$

Il faut remarquer que ces intégrales oscillantes sont normalisées de façon que le carré de leur symbole principal soit exactement les mesures de Lebesgue δ_E sur Λ_E , normalisées en sorte que:

$$\int_{[t,t']} \varphi_\cdot^*(\delta_E) = |t' - t| ,$$

où φ_t est le flot hamiltonien $x \frac{\partial}{\partial x} - \xi \frac{\partial}{\partial \xi}$ de $p = x\xi$.

Soit ϕ_h une famille h -admissible microlocalement combinaison linéaire de v_+ et v_- dans Q (nous verrons à la proposition 3 que c'est le cas de toute solution microlocale dans Q de $P - E$). Alors ϕ_h s'écrit dans $Q \setminus (0, 0)$ comme la somme:

$$\phi_h = \sum_{\pm} (x_\pm \varphi_{in,\pm} + y_\pm \varphi_{out,\pm}) .$$

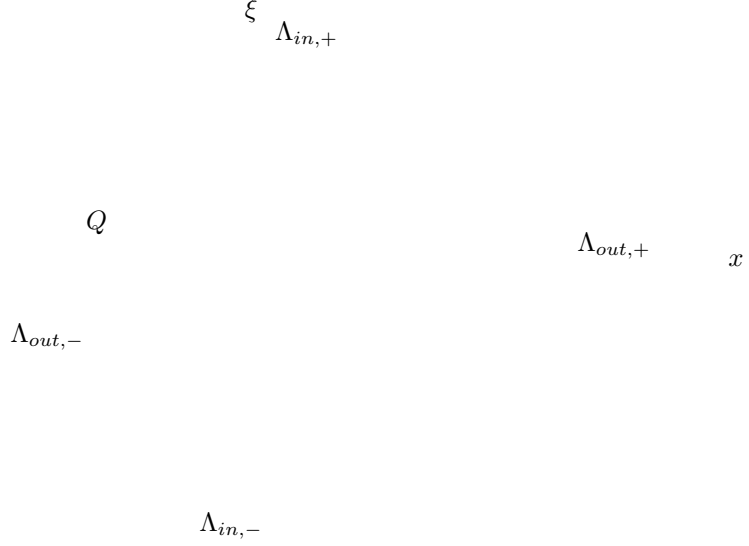


Figure 1: Les variétés $\Lambda_{in,\pm}$ et $\Lambda_{out,\pm}$.

mais bien entendu comme l'espace engendré par v_+ et v_- est de dimension 2 (mod $O(h^\infty)$), il y a des relations données par la matrice de transfert T :

$$\begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Les calculs de 4.1 permettent de calculer $T \bmod(h^\infty)$, en effet pour v_+ et donc pour w_+ modulo $O(h^\infty)$, on a:

$$y_+ = 1, \quad y_- = 0, \quad x_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{E}{h} \ln h} e^{\pm \frac{\pi}{4}(2\frac{E}{h}-i)} \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{E}{h}\right),$$

et des formules analogues pour w_- . On en déduit que la matrice T est donnée par:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{E}{h}\right) e^{\frac{\pi}{4}(2\frac{E}{h}+i)} e^{-i\frac{E}{h} \ln h} \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-\frac{E}{h}\pi} \\ -ie^{-\frac{E}{h}\pi} & 1 \end{pmatrix} + O(h^\infty). \quad (38)$$

Remarque 5 • *On vérifie facilement que T est unitaire grâce à la formule des compléments:*

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi t)}.$$

On en déduit en particulier que:

$$|x_+|^2 + |x_-|^2 = |y_+|^2 + |y_-|^2 \quad \bmod(h^\infty). \quad (39)$$

Notons que pour l'équation de Schrödinger, l'unitarité de la matrice T pour les solutions BKW peut se démontrer directement par conservation du wronskien.

- Lorsque E tend vers une limite non nulle, on peut appliquer la formule de Stirling pour approcher la fonction Gamma et retrouver la forme habituelle de la matrice T :

– Si $E > 0$, à une phase près on a:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

– Si $E < 0$, à une phase près on a:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul précédent donne le comportement de la mesure de concentration microlocale μ_h d'une solution $\varphi = y_+ w_+ + y_- w_-$ en dehors de $(0, 0)$: cette mesure est donnée par:

$$\mu_h = \sum_{\pm} |x_{\pm}|^2 \delta_{in, \pm} + |y_{\pm}|^2 \delta_{out, \pm}, \quad (40)$$

où $\delta_{in, \pm}$, etc..., sont les mesures invariantes par le flot φ_t normalisées comme plus haut.

4.3 Mesures de concentration des solutions microlocales.

Nous allons prouver 2 estimations sur la masse totale $\mu_h(Q)$ pour une solution microlocale $w = y_+ w_+ + y_- w_-$ de $P - E$ dans Q .

Proposition 1 Pour $|E| \leq 1$, $\mu_h(Q) = O(|\ln h|)(|x_+|^2 + |x_-|^2)$.

Preuve |On a besoin du:

Lemme 1 Il existe une constante M telle que, pour réel A et toute fonction $\chi \in C_0^\infty([0, \infty[, [0, 1])$, décroissante, on ait:

$$\left| \int_0^\infty e^{i(v-A \ln v)} \chi(v) \frac{dv}{\sqrt{v}} \right| \leq M.$$

Preuve |(du lemme)

D'abord, grâce à une intégration par parties, on se ramène à majorer \int_0^T uniformément par rapport à T . On fait alors le changement de variables $v = |A|w$, qui produit l'intégrale

$$\sqrt{|A|} \int_0^{T'} e^{i|A|(w \pm \ln w)} \frac{dw}{\sqrt{w}} dw.$$

Après avoir éventuellement exclu un voisinage de $+1$, point critique de $w - \ln w$, que l'on traite par la phase stationnaire, on majore le reste de l'intégrale par une intégration par parties. \diamond

Il est d'abord clair que, comme $\mu_h(K) = O(|x_+|^2 + |x_-|^2)$ pour tout compact K disjoint de $(0, 0)$, on peut obtenir l'évaluation voulue en majorant

$$\langle Op^{AW}(a)w|w \rangle$$

pour un symbole a quelconque égal à 1 près de l'origine. En particulier, on peut choisir

$$a(x, y, \xi) = \chi(2\xi)\chi(y) ,$$

ce qui ramène à montrer la majoration:

$$\int_{-1}^1 |\hat{w}(\xi)|^2 d\xi = O(|\ln h|)(|x_+|^2 + |x_-|^2) .$$

On peut réécrire, pour $w = w_+$, par exemple l'intégrale de 0 à 1 sous la forme

$$I_+ = \frac{1}{2\pi h} \int_0^1 d\xi \left| \int_0^\infty e^{-\frac{i}{h}(x\xi - E \ln x)} \chi(x) \frac{dx}{\sqrt{x}} \right|^2 ;$$

on pose $x = hy/\xi$, puis $\xi = h\eta$, il vient:

$$I_+ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{1}{h}} \frac{d\eta}{\eta} \left| \int_0^\infty e^{-i(y - \frac{E}{h} \ln y)} \chi\left(\frac{y}{\eta}\right) \frac{dy}{\sqrt{y}} \right|^2 .$$

La majoration voulue est alors conséquence du lemme et d'un découpage de l'intégrale en $\int_0^1 + \int_1^{\frac{1}{h}}$, la première intégrale étant facile à majorer grâce à l'estimée:

$$\left| \int_0^{+\infty} \chi\left(\frac{y}{\eta}\right) \frac{dy}{\sqrt{y}} \right| = O(\sqrt{\eta}) .$$

Un scénario analogue donne une majoration de I_- et de même pour w_- et donc par l'inégalité triangulaire le cas général. \diamond

Proposition 2 Si $E = O(h)$, $\mu_h(Q) \sim |\ln h|(|x_+|^2 + |x_-|^2)$.

Preuve |

Il faut calculer le comportement asymptotique de la norme L^2 des solutions microlocales lorsque $E = O(h)$. La même remarque que précédemment s'applique et on est donc amené à déterminer l'asymptotique de

$$\int_{-1}^{+1} |\hat{w}(\xi)|^2 d\xi .$$

En particulier pour $w = w_+$, on a:

$$I_+ = \int_0^1 |\hat{w}_+(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi h} \int_0^1 d\xi \left| \int_0^\infty e^{-\frac{i}{h}(x\xi - E \ln x)} \chi(x) \frac{dx}{\sqrt{x}} \right|^2 .$$

Et comme plus haut, il vient:

$$I_+ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{1}{h}} \frac{d\eta}{\eta} \left| \int_0^\infty e^{-i(y - \frac{E}{h} \ln y)} \chi\left(\frac{y}{\eta}\right) \frac{dy}{\sqrt{y}} \right|^2 .$$

Et donc, on a (pour $E = O(h)$):

$$I_+ \sim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} |\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{E}{h})|^2 e^{\frac{E}{h}\pi} |\ln h| , \quad (41)$$

et de même pour la norme L^2 sur $[-1, 0]$, en changeant E en $-E$. Finalement, on obtient:

$$\int_{-1}^1 |\hat{w}_+(\xi)|^2 d\xi \sim |\ln h| . \quad (42)$$

Il faut en outre prouver que

$$\int_{-1}^1 w_+ \bar{w}_- dx = o(|\ln h|) .$$

Des calculs analogues à ce qui précède montrent que:

$$\int_0^1 \hat{w}_+(\xi) \bar{\hat{w}}_-(\xi) d\xi \sim \frac{1}{2\pi i} |\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{E}{h})|^2 |\ln h| ,$$

tandis que l'intégrale sur $[-1, 0]$ a un équivalent opposé. \diamond

4.4 Espace vectoriel des solutions microlocales de $P - E$.

Le but de ce paragraphe est de montrer la:

Proposition 3 *Soit $|E| < 1$. Pour toute famille h -admissible ϕ_h telle que $WF^h((P - E)\phi_h) \cap [-1, 1]^2 = \emptyset$, il existe x_+ et x_- tels que $WF^h(\phi_h - x_+v_+ - x_-v_-) \cap [-1, 1]^2 = \emptyset$. Autrement dit, l'espace vectoriel des solutions microlocales de $P - E$ sur $Q = [-1, 1]^2$ est de dimension 2.*

Preuve |Soit donc ϕ_h une famille de fonctions telles que:

$$\left(\frac{h}{i}(x\partial_x + \frac{1}{2}) - E\right)\phi_h = \psi_h. \quad (43)$$

On procède par généralisation successive du second membre.

1. $\psi_h = 0$ sur $[-1, 1]$. Alors la méthode de variation des constantes sur l'intervalle $]0, 1]$ montre que pour $x > 0$, il existe $x_+ \in \mathcal{C}$ tel que $v = x_+v_+$. De même sur $[-1, 0[$. Donc, la famille h -admissible $w = \phi_h - x_+v_+ - x_-v_-$ est solution de (43) (avec $\psi_h = 0$) et son support est inclus dans $\{0\}$.

On écrit maintenant:

$$w = \sum_{k=0}^N \alpha_k \delta_0^{(k)},$$

où $\alpha_k \in \mathcal{C}'$ et $\delta_0^{(k)}$ désigne la k -ième dérivée de la masse de Dirac en 0, on remplace dans (43) ce qui donne:

$$\sum_{k=0}^N \left(\frac{\hbar}{i} \left((k+1) + \frac{1}{2} \right) - E \right) \alpha_k \delta_0^{(k)} = 0,$$

d'où l'on tire la nullité des α_k puis de w d'où la proposition dans ce cas.

Remarquons que si $\psi_h = \sum_{k=0}^M \beta_k \delta_0^{(k)}$ avec $\beta_k = O(\hbar^\infty)$, on trouve que les α_k sont $O(\hbar^\infty)$ et la proposition est encore vraie.

2. $\psi_h = O(\hbar^\infty)$ sur $[-1, 1]$.

La méthode de variation des constantes donne sur $]0, 1]$, $\phi_h = x_+ v_+$ où x_+ est solution de:

$$\frac{\hbar}{i} x v_+ x'_+ = \psi_h,$$

d'où:

$$x_+(x) = x_+(1) + \int_1^x t^{-\frac{1}{2} - i \frac{E}{\hbar}} \phi_h(t) dt = x_+(1) + O(\hbar^\infty),$$

et de même sur $[-1, 0[$. On est ainsi ramené au (a) donc la proposition reste valide.

3. Cas général.

On construit une partition de l'unité:

$$1 = \chi + \chi_- + \chi_+,$$

avec $\text{Supp} \chi \subset [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$, $\chi = 1$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\text{Supp} \chi_+ \subset [\frac{1}{2}, +\infty[$ et $\text{Supp} \chi_- \subset]-\infty, -\frac{1}{2}]$.

On observe que \hat{v}_+^{-E} et \hat{v}_-^{-E} sont des solutions microlocales de $P - E$ localisées respectivement dans $\xi \geq 0$ et $\xi \leq 0$. Appliquant le lemme 2, p. 22, on choisit alors des constantes \hat{C}_+ et \hat{C}_- telles que:

- $WF^h(\phi_h - \hat{C}_+ \hat{v}_+^{-E}) \cap]-1, 1[\times]\frac{1}{2}, 1[= \emptyset$,
- $WF^h(\phi_h - \hat{C}_- \hat{v}_-^{-E}) \cap [-1, 1] \times]-1, -\frac{1}{2}[= \emptyset$.

On pose:

$$\tilde{\phi}_h = \chi \phi_h + \hat{C}_+ \chi_+ \hat{v}_+^{-E} + \hat{C}_- \chi_- \hat{v}_-^{-E}. \quad (44)$$

On a alors $\phi_h \sim_{[-1, 1]^2} \tilde{\phi}_h$ et

$$(P - E) \tilde{\phi}_h = O(\hbar^\infty) \text{ sur } [-1, 1].$$

On applique le (b) et on retombe sur $\tilde{\phi}_h \sim_Q C_+ v_+ + C_- v_-$. Le choix des coefficients de v_+ et v_- est alors imposé par le comportement près du bord du carré Q : C_+ et C_- se calculent à partir de \hat{C}_+ et \hat{C}_- par l'intermédiaire de la matrice de transfert T . Ce qui termine la preuve de la proposition.

Il nous reste donc à montrer le:

Lemme 2 *On se place ici en dimension $n = 1$. Soit P un opérateur pseudo-différentiel classique de symbole principal p réel. Soit U un ouvert de T^*I et γ un arc de bicaractéristique contenu dans $p^{-1}(0)$ tel que*

$$U \cap \{p = 0\} = \gamma \quad \text{et} \quad dp|_{\gamma} \neq 0.$$

Alors l'espace des solutions microlocales de P dans U , modulo l'équivalence microlocale dans U , est de dimension au plus 1.

Preuve |

Soit v une solution microlocale de $Pv \sim_U 0$, non nulle microlocalement, (s'il n'en existe pas, il n'y a rien à montrer).

Rappelons que le théorème de propagation des singularités permet de montrer que si $WF^h(P\psi_h) \cap \gamma = \emptyset$ alors, soit $\gamma \subset WF^h(\psi_h)$, soit $\gamma \cap WF^h(\psi_h) = \emptyset$.

Soit ϕ_h une autre solution microlocale de $P\phi_h \sim_U 0$, il suffit donc de trouver un symbole $f(h)$ tel que, pour $(x_0, \xi_0) \in \gamma$ fixé, (x_0, ξ_0) ne soit pas dans le $WF^h(\phi_h - f(h)v)$.

Comme l'étude locale de tout symbole p tel que $p(x_0, \xi_0) = 0$ et $\nabla p(x_0, \xi_0) \neq 0$, est "symplectiquement équivalente" à l'étude de $p = \xi$ en $(0,0)$, on est ramené à montrer le lemme pour l'opérateur $\frac{h}{i}\partial_x$ dans un voisinage de $(0,0)$.

Soit donc ϕ_h solution de:

$$\frac{h}{i}\partial_x \phi_h = r_h, \quad WF^h(r_h) \cap U = \emptyset, \quad (45)$$

où U est un voisinage ouvert de $(0,0)$. On pose $\tilde{r}_h = \chi r_h$, où χ est une troncature à support dans la projection sur x de U . D'après (45), il existe ξ_0 tel que:

$$|\xi| \leq \xi_0 \Rightarrow |\hat{\tilde{r}}_h(\xi)| = O(h^\infty).$$

On pose alors pour une troncature $\tilde{\chi}$ à support éloigné de 0 et valant 1 pour $|\xi| \geq \xi_0$:

$$s(\xi) = \tilde{\chi}(\xi)\hat{\tilde{r}}_h(\xi),$$

puis $\psi_h(x) = (\frac{1}{\xi}s)\hat{\psi}(x)$.

On a maintenant:

$$(\frac{h}{i}\partial_x \psi_h - \tilde{r}_h)\hat{\psi} = s - \hat{\tilde{r}} = O(h^\infty),$$

donc:

$$WF^h(\frac{h}{i}\partial_x \psi_h - \tilde{r}_h) = \emptyset,$$

puis:

$$WF^h(\frac{h}{i}\partial_x(\psi_h - \phi_h)) \cap (\{\chi = 1\} \times \mathbb{R}) = \emptyset. \quad (46)$$

Comme $WF^h(\psi_h) \cap (\mathbb{R} \times [-\xi_0, \xi_0]) = \emptyset$, retirer la "solution particulière" ψ_h de ϕ_h ne modifie pas ϕ_h microlocalement (quitte à réduire U). D'après (46), on est ainsi ramené au cas où $r_h = O(h^\infty)$. On a alors:

$$\phi_h(x) = C(h) + \frac{i}{h} \int_0^x r_h(x) dx,$$

puis:

$$WF^h(\phi_h - C(h).1) \cap U = \emptyset,$$

ce qu'il fallait démontrer.

De plus, les symboles $f(h)$ définis sur des ouverts $V \subset U$ se recollent bien le long de γ d'après la démonstration ci-dessus (unicité), d'où le lemme. \diamond

Remarque 6 Si on souhaite calculer $f(h)$ dans le cas d'un opérateur P général, on prend un quasi-mode v , on calcule le développement asymptotique

$$g(h) = \int e^{-\frac{i}{h}x \cdot \xi_0} \eta(x) v(x) dx$$

où $(x_0, \xi_0) \in \gamma$ et où η est une troncature valant 1 près de x_0 , puis on trouve:

$$f(h) = \frac{1}{g(h)} \int e^{-\frac{i}{h}x \cdot \xi_0} \eta(x) \phi_h(x) dx.$$

5 Concentration microlocale près d'un point d'équilibre instable.

♯ Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $V \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, tel que $V(0) = V'(0) = 0$, $V''(0) < 0$. Soit $p(x, \xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + V(x)$, on suppose que $\Lambda = p^{-1}(0)$ est connexe et ne contient pas d'autres points critiques de p que $(0, 0)$.

On pose (voir figure 2, p. 24):

$$\Lambda_d^\pm = \{(x, \xi) \in \Lambda \mid x > 0, \pm \xi > 0\}, \quad \Lambda_g^\pm = \{(x, \xi) \in \Lambda \mid x < 0, \pm \xi > 0\}.$$

On note par δ_o la masse de Dirac en $(0, 0)$ et δ_d^\pm (resp δ_g^\pm) les mesures de Lebesgue sur Λ_d^\pm (resp Λ_g^\pm) associées à la paramétrisation comme orbites du flot hamiltonien Y_p de p .

Soit

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

et φ_h une famille de solutions de

$$(H - E(h))\varphi_h = 0,$$

où $E(h)$ tend vers 0, et telles que la norme dans $L^2(I, dx)$ de φ_h vaille 1.

Alors on a, en désignant par μ_h les mesures de concentrations microlocales associées aux φ_h :

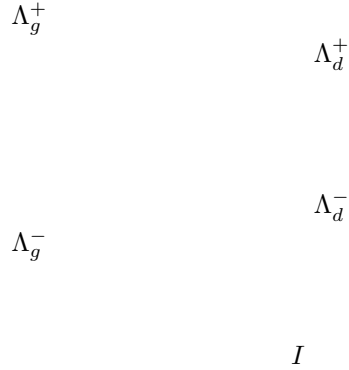


Figure 2: Les variétés $\Lambda_{d,\pm}$ et $\Lambda_{g,\pm}$.

- (a) μ_h tend vaguement vers δ_o ,
- (b) $\forall \mathcal{K} \subset \Lambda$, compact dont l'intérieur évite au plus une branche Λ_d^\pm , Λ_g^\pm , on a

$$\mu_h(\mathcal{K}) \geq \frac{C(\mathcal{K})}{|\ln h|}.$$

Ce résultat est encore vrai si on suppose que $|E| \leq C$ pour C assez petit.

- (c) De plus, si $E(h) = O(h)$, dans l'espace des mesures de Radon réelles sur $\Lambda \setminus (0,0)$ muni de la topologie de la convergence vague, les valeurs d'adhérence de

$$|\ln h| \mu_h$$

sont dans la somme directe des enveloppes convexes

$$\sqrt{-V''(0)} \text{conv}(\delta_d^+, \delta_g^-) \oplus \text{conv}(\delta_d^-, \delta_g^+).$$

Preuve |

Le (a) résulte du fait que la seule mesure de probabilité invariante par Y_p et portée par Λ est δ_o .

Pour prouver les autres résultats, il suffit en fait d'en prouver une version microlocale près de $(0,0)$ et donc de travailler sur le modèle P .

Pour avoir la version globale, il suffira alors d'utiliser le théorème d'Egorov qui donne l'invariance des μ_h à $O(h)$ près par le flot de Y_p .

Preuve de (b): Il résulte du théorème 3, p. 13 que P est microlocalement conjugué à $f_h(H)$ pour un symbole convenable:

$$f_h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)h^k,$$

de plus on a évidemment $f'_0(0) = (-V''(0))^{-1/2}$ qui résulte de l'identification des déterminants de la dérivée seconde en $(0,0)$ de $f_0(\frac{1}{2}\xi^2 + V(x))$ et de $x.\xi$. Il existe donc un symbole $g_h^E(t)$ tel que (uniformément par rapport à E) on ait:

$$f_h(t) - f_h(E) = g_h^E(t) \times (t - E)$$

d'où l'on déduit la conjugaison microlocale des opérateurs

$$P - f_h(E) \text{ avec } g_h^E(H)(H - E)$$

et donc on peut identifier les solutions microlocales ϕ_h de $(H - E)\phi_h \sim 0$ aux solutions ψ_h de $(P - f_h(E))\psi_h = 0$. On désigne alors par ν_h [respectivement μ_h] les mesures de concentration microlocales de ψ_h [ϕ_h], elles sont, modulo $O(h)$, transformées les unes des autres par F . On en déduit alors, grâce à la normalisation des ϕ_h et en désignant par Q un voisinage assez petit de 0,

$$\nu_h(Q) = 1 + O(|x_+|^2 + |x_-|^2)$$

et cette quantité est majorée par (d'après la proposition 1):

$$\nu_h(Q) \leq C |\ln h| (|x_+|^2 + |x_-|^2).$$

Donc, comme $\nu_h(F(\mathcal{K})) \geq C'(|x_+|^2 + |x_-|^2)$, on en déduit:

$$\mu_h(\mathcal{K}) \geq \frac{C(\mathcal{K})}{|\ln h|},$$

i.e. (b).

Preuve de (c):

Cela résulte comme précédemment de l'étude du modèle, il faut seulement faire attention que

$$Y_{f(p)} = f'(p)Y_p$$

ce qui change la normalisation des mesures de Dirac sur les variétés lagrangiennes $p = 0$ par un facteur $f'_0(0) = (-V''(0))^{-1/2}$.

Globalisation:

Elle se fait simplement grâce au théorème d'Egorov. \diamond

Pour mesurer la pertinence du théorème précédent, il est bon de savoir qu'il y a effectivement des valeurs propres dans l'intervalle $[-Ah, Bh]$ lorsque par exemple on s'intéresse au problème de Dirichlet dans un intervalle compact L de \mathbb{R} .

Cela peut se faire en utilisant les résultats précédents et nous montrerons dans [11] des résultats sur les conditions de Bohr-Sommerfeld modifiées qui donnent des renseignements très précis sur le calcul asymptotique des valeurs propres. On peut aussi appliquer les résultats de [4] qui assurent que l'asymptotique de Weyl continue à s'appliquer:

$$N_{A,B}(h) = \#\{\lambda_j(h) \mid -Ah \leq \lambda_j(h) \leq Bh\} \sim \frac{1}{2\pi h} \int_{-Ah \leq p(x,\xi) \leq Bh} dx d\xi . \quad (47)$$

Ce qui donne ici un nombre de valeurs propres $N_{A,B}(h) \sim C_{A,B} |\ln h|$.

6 Surfaces de révolution à courbure -1 .

On considère une surface de révolution:

$$X = \frac{\mathbb{R}}{2\pi L \mathbb{Z}} \times [-a, a] \quad (a > 0, L > 0), \quad (48)$$

munie de la métrique riemannienne:

$$ds^2 = \cosh^2 y \, dx^2 + dy^2, \quad x \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi L \mathbb{Z}}, \quad |y| \leq a, \quad (49)$$

à courbure sectionnelle constante -1 et d'élément de volume:

$$d\mu = \cosh y \, dx dy . \quad (50)$$

Le laplacien riemannien s'écrit donc:

$$\Delta = -\frac{1}{\cosh^2 y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \tanh(y) \frac{\partial}{\partial y} . \quad (51)$$

Le but de ce § est de montrer comment une séparation des variables pour le problème de Dirichlet sur X permet de ramener l'étude asymptotique des valeurs propres de Δ à l'étude semi-classique précédente; on en déduira l'existence de fonctions propres qui se concentrent sur la géodésique γ d'équation ($y = 0$).

On supposera pour simplifier que $L = 1$ dans la suite, la géodésique γ est donc de période 2π .

Soit U l'isométrie de $L^2(X, \mu)$ sur $L^2(X, dx dy)$ définie par $Uf(x, y) = f(x, y) \sqrt{\cosh(y)}$ et soit $\tilde{\Delta} = U\Delta U^{-1}$, qui est autoadjoint sur $L^2(X, dx dy)$ avec les conditions de Dirichlet sur ∂X . On a facilement:

$$\tilde{\Delta} = -\frac{1}{\cosh^2 y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\cosh^2 y}\right) .$$

L'opérateur $-i \frac{\partial}{\partial x}$ commutant avec $\tilde{\Delta}$ on peut les diagonaliser simultanément (cf. [7]) et trouver une base de $L^2(X, dx dy)$ formée de fonctions de la forme

$$\varphi_{k,\lambda}(x, y) = a_{k,\lambda}(y) e^{ikx} ,$$

où $\tilde{\Delta}\varphi_{k,\lambda} = \lambda\varphi_{k,\lambda}$, ce qui équivaut à:

$$H_k a_{k,\lambda} = \lambda a_{k,\lambda} , \quad (52)$$

avec:

$$\varphi_{k,\lambda}(\pm a) = 0, \quad H_k \psi = -\psi'' + W_k \psi, \quad \text{et } W_k = \frac{1}{2} + k^2 + \left(\frac{1}{4} + k^2\right) \left(\frac{1}{\cosh^2 y} - 1\right) .$$

On pose maintenant $V(y) = 1/\cosh^2 y - 1$ et l'équation (52) devient:

$$-\psi'' + \left(\frac{1}{4} + k^2\right)V\psi = \left(\lambda - \left(\frac{1}{2} + k^2\right)\right)\psi .$$

Compte-tenu du graphe de V , l'équation précédente est justiciable du traitement semi-classique vu plus haut, la région $|E(h)| \leq C$ correspondant à:

$$\left| \frac{\sqrt{\lambda}}{|k|} - 1 \right| \leq C'$$

et la région $|E(h)| \leq Ch$ correspondant à:

$$|\sqrt{\lambda} - |k|| \leq C' .$$

(voir la figure 3, p. 32 qui représente le spectre conjoint de $\sqrt{-\Delta}$ et de $\frac{1}{i}\partial_x$.)

On obtient en particulier l'asymptotique suivante: p Si on pose $W(A, B) = \{(\lambda, k) \in \text{Spectre}(\Delta, -i\frac{\partial}{\partial x}) | A \leq \sqrt{\lambda} - |k| \leq B\}$ et $N(k) = \#W(A, B)$, on a:

$$N(k) \sim \frac{(B - A)}{4\pi} \ln |k| ,$$

lorsque $k \rightarrow \infty$.

Ces fonctions propres $\varphi_{k,\lambda}$ se concentrent sur la géodésique fermée γ à une vitesse logarithmique (d'après le théorème 5 (b)):

Pour tout $\alpha > 0$, si $K_\alpha = \{|y| \geq \alpha\}$, il existe $C_\alpha > 0$ tel que:

$$(\lambda, k) \in W(A, B) \Rightarrow \int_{K_\alpha} |\varphi_{k,\lambda}|^2 \sim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{C_\alpha}{\ln \lambda_{k,\lambda}} .$$

7 Vitesse de concentration à courbure -1 .

Considérons maintenant le cas d'une surface $X = \mathcal{H}/\Gamma$ compacte à courbure -1 et soit γ une géodésique fermée simple, d'holonomie triviale; γ admet donc dans X un voisinage X_0 isométrique à la surface de révolution précédente.

Soit (φ_l, λ_l) une suite d'éléments propres du laplacien de X avec $\Delta\varphi_l = \lambda_l\varphi_l$, $\|\varphi_l\| = 1$, $\lambda_l \rightarrow \infty$ et supposons que:

- i) $\int_{X_0} \varphi_l^2 \geq C > 0$,
- ii) $\forall K \subset X_0$, tel que $\gamma \cap K = \emptyset$, $\int_K \varphi_l^2 \rightarrow 0$.

Soit μ_l la mesure microlocale sur le fibré unitaire cotangent $S^*(X)$ ([9]) associée à φ_l et μ_∞ une limite vague quelconque des μ_l . On note π la projection canonique de $S^*(X)$ sur X . Si μ_\pm sont les mesures de moyenne sur γ avec les 2 sens de parcours dans $S^*(X)$, il est clair que μ_∞ ayant son support dans la réunion de $S^*(X \setminus X_0) \cup \pi^{-1}(\gamma)$, μ_∞ est somme d'une combinaison linéaire $a_+\mu_+ + a_-\mu_-$ et d'une mesure nulle sur $\pi^{-1}(X_0)$. Si on suppose φ_l réelle ce qu'on peut toujours faire, alors $\frac{1}{2} \geq a_+ = a_- > 0$.

On a alors le: $\forall K \subset X_0$, tel que K rencontre les 2 composantes connexes de $X_0 \setminus \gamma$, on a:

$$\int_K \varphi_l^2 \geq C \cdot \frac{1}{\ln \lambda_l} ,$$

avec $C > 0$.

Preuve | Soit $\varphi_l = \sum a_{k,l}(y)e^{ikx}$ la série de Fourier de φ_l dans X_0 . On a évidemment

$$\sum_k \|a_{k,l}\|^2 \geq C > 0 ,$$

uniformément par rapport à l . Soit maintenant, $P = \Delta^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1$, qui est un pseudo-diff. d'ordre 0 dont le symbole principal

$$p(x, y, \xi, \eta) = 1 - \frac{\xi^2}{\|(\xi, \eta)\|^2} ,$$

est nul sur $\gamma_\pm = \pi^{-1}(\gamma)$. La définition des μ_l et de μ_∞ implique que $\int_{X_0} P\varphi_l \cdot \varphi_l \rightarrow 0$ quand $l \rightarrow \infty$. On en déduit

$$\sum \left(\frac{k^2}{\lambda_l} - 1\right)^2 \|a_{k,l}\|^2 \rightarrow 0 ,$$

quand $l \rightarrow \infty$. Soit, en posant,

$$Z_l = \left\{ k / \left| \frac{k^2}{\lambda_l} - 1 \right| \leq \frac{1}{2} \right\} :$$

$$\sum_{k \in Z_l} \|a_{k,l}\|^2 \geq C > 0 .$$

On en déduit le résultat par application du théorème 5 à chaque $a_{k,l}$, $k \in Z_l$.

◇

Conclusion:

Il semble résulter des paragraphes 6 et 7 qu'il n'est pas impossible d'avoir une concentration sur γ mais que cela a alors lieu à une vitesse lente (cf. [33] et [34]).

References

- [1] André Voros. Wentzel-Kramers-Brillouin method in the Bargmann representation. *Physical Review A*, 40(12):6814–6824, 1989.

- [2] V. Babich. Eigenfunctions concentrated in a neighborhood of a closed geodesic. *Seminars in Mathematics, V.A. Steklov Mathematical Institute, Leningrad: Mathematical problems in wave propagation theory*, 9:7–26, 1968.
- [3] V. Babich and V. Lazutkin. Eigenfunctions concentrated near a closed geodesic. *Topics in Math. Phys. (ed. Birman)*, 2:9–18, 1968.
- [4] R. Brummelhuis, T. Paul, and A. Uribe. Spectral estimates around a critical level. *Manuscrit, Reims*, 1993.
- [5] J. Carry and P. Rusu. Separatrix eigenfunction. *Physical Review A*, 45(12):8501–8512, 15 June 1992.
- [6] Y. Colin de Verdière. Quasi-modes sur les variétés riemanniennes. *Invent. Math.*, 43:15–52, 1977.
- [7] Y. Colin de Verdière. Spectre conjoint d’opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. I- Le cas non intégrable. *Duke Math. Journal*, 46(1):169–182, 1979.
- [8] Y. Colin de Verdière. Spectre conjoint d’opérateurs pseudo-différentiels qui commutent-II. Le cas intégrable. *Mathematische Zeitschrift*, 171:51–73, 1980.
- [9] Y. Colin de Verdière. Ergodicité et fonctions propres du laplacien. *Comm. Math. Phys.*, 102:497–502, 1985.
- [10] Y. Colin de Verdière. Théorie spectrale et méthodes semi-classiques. *Cours de D.E.A., Université de Grenoble I*, 1992-93-94.
- [11] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique - II. Conditions de Bohr-Sommerfeld. *Annales de l’Institut Henri Poincaré- Physique Théorique*, 61(3):347–367, 1994.
- [12] Y. Colin de Verdière and J. Vey. Le lemme de Morse isochore. *Topology*, 18:283–299, 1979.
- [13] P. Duclos and H. Høegreave. On the semi-classical localization of quantum probability. *J. Math. Phys.*, 34(5):1681–1691, 1993.
- [14] J. Duistermaat. Oscillatory integrals, lagrange immersions and unfolding of singularities. *C.P.A.M.*, 27:207–281, 1974.
- [15] K. Ford, D. Hill, M. Wakeno, and J. Wheeler. Quantum Effects near a Barrier Maximum. *Annals of Physics*, 7:239–258, 1959.
- [16] C. Gérard and A. Grigis. Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier. *Journal of Differential Equations*, 72:149–177, 1988.

- [17] P. Gérard. Microlocal defect measures. *Comm. PDE*, 16(11):1761–1794, 1991.
- [18] M. Gianonni, A. Voros, and J. Zinn-Justin. *Chaos and quantum physics (Les Houches)*. North Holland, 1991.
- [19] V. Guillemin and D. Schaeffer. On a certain class of Fuchsian partial differential equations. *Duke Mathematical Journal*, 44(1):157–199, March 1977.
- [20] V. Guillemin and S. Sternberg. *Geometric asymptotics*, volume 14 of *Math. Surveys*. A.M.S., 1977.
- [21] J. Harthong. Études sur la mécanique quantique. *Astérisque*, 111, 1984.
- [22] D. Hejhal and B. Rackner. On the topography of Maaßwaveforms for $PSL(2, \mathbb{Z})$: experiments and heuristics. *Preprint University of Minnesota*, 92/162, July 1992.
- [23] B. Helffer, A. Martinez, and D. Robert. Ergodicité et limite semi-classique. *Communications in Mathematical Physics*, 109:313–326, 1987.
- [24] B. Helffer and D. Robert. Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques. *Annales de l'Institut Fourier*, 31(3):169–223, 1981.
- [25] B. Helffer and D. Robert. Puits de potentiel généralisé et asymptotique semi-classique. *Annales de l'I.H.P., Physique Théorique*, 41(3):291–331, 1984.
- [26] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple wells in the semi-classical limit-I. *Communication in Partial Differential Equation*, 9(4):337–408, 1984.
- [27] B. Helffer and J. Sjöstrand. Semi-classical analysis for Harper's equation-III. Cantor structure of the spectrum. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 117(4), 1989.
- [28] E. Heller. Wavepacket dynamics and quantum chaology. *G-V-Z (les Houches)*, Course 9:551–661, 1991.
- [29] L. Hörmander. Fourier integral operators I. *Acta Mathematica*, 127:79–183, 1971.
- [30] C. März. Spectral Asymptotics for Hill's Equation near the potential maximum. *Asymptotic Analysis*, 5:221–267, 1992.
- [31] J. Ralston. Approximate eigenfunctions of Laplace operators. *Jour. Diff. Geom.*, 12:87–100, 1977.
- [32] D. Robert. *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68. Birkhäuser, Progress in Maths, 1987.

- [33] Z. Rudnik and P. Sarnak. The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds. *Preprint*, 1993.
- [34] P. Sarnak. *Arithmeticity and quantum chaos*. Schur lectures (Tel-Aviv), 1992.
- [35] A. Schnirelmann. Ergodic properties of eigenfunctions. *Usp. Math. Nauk*, 29(6):181–182, 1974.
- [36] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1950.
- [37] J. Sjöstrand. Density of state oscillations for magnetic Schrödinger operator. In Bennewitz, editor, *Differential Equations and Mathematical Physics*, pages 295–345, University of Alabama at Birmingham, March 15-21 1990.
- [38] J. Sjöstrand. Microlocal analysis for the periodic magnetic Schrödinger operator and related questions. *Lecture Notes in Maths (CIME-Lectures Montecatini, Microlocal analysis and applications, July 1989)*, 1495:237–332, 1991.
- [39] L. Tartar. H-measures, a new approach for studying homogenization oscillations and concentration effects in partial differential equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 115A:193–230, 1990.
- [40] S. Zelditch. Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces. *Duke Math. Journal*, 55:919–941, 1987.

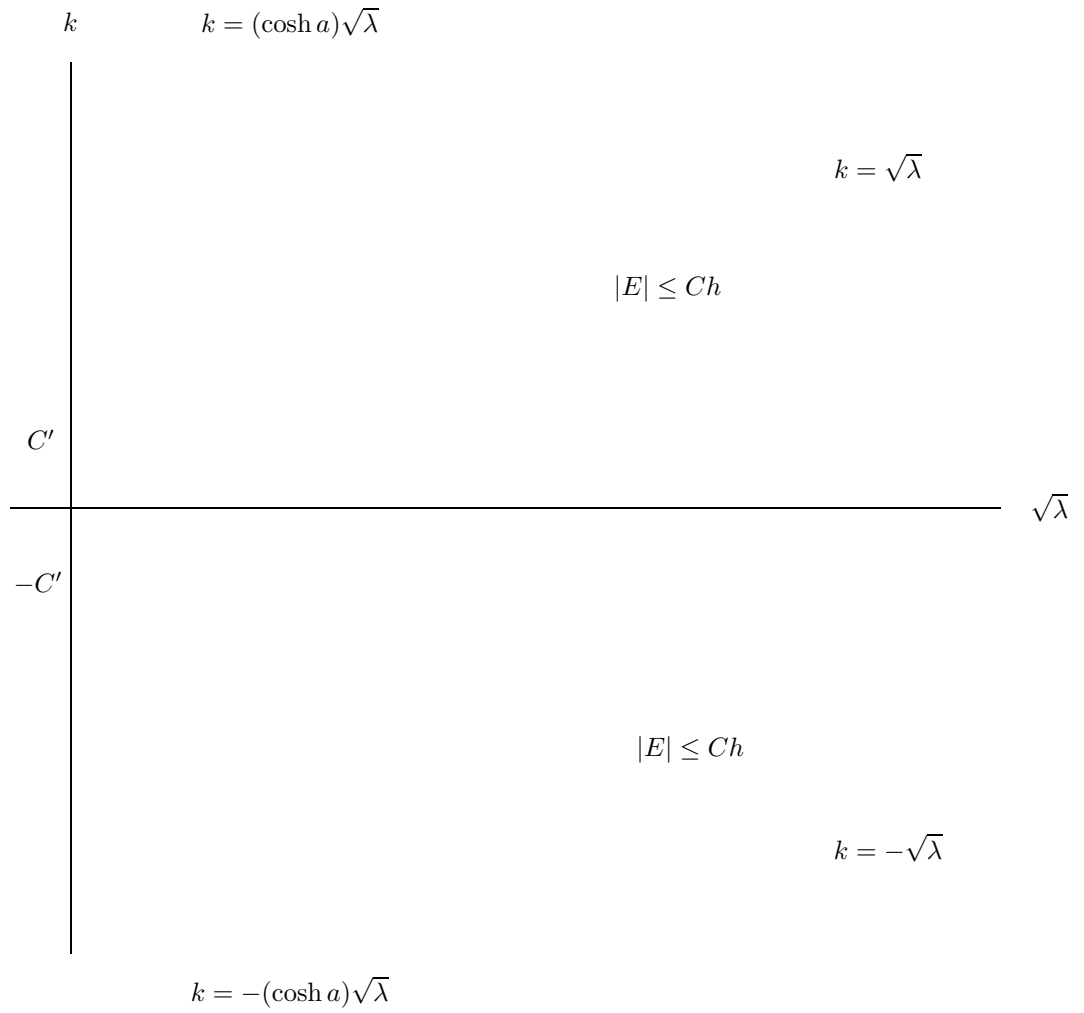


Figure 3: La zone "semi-classique" du spectre conjoint.