

MÉTHODES SEMI-CLASSIQUES ET THÉORIE SPECTRALE

Yves Colin de Verdière ¹

¹Institut Fourier, UMR 5582 (Université Grenoble 1-CNRS),
BP 74, F-38402-St Martin d'Hères Cedex
<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~ycolver/>
yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr

RÉSUMÉ. Dans ce livre, j'ai voulu présenter 3 applications des méthodes semi-classiques à la théorie spectrale des opérateurs de type Schrödinger : les formules de traces semi-classiques qui sont des analogues asymptotiques de la formule des traces de Selberg, la construction de fonctions propres approchées ou quasi-modes et l'étude de l'effet tunnel. J'ai fait précéder ces chapitres centraux de chapitres introductifs à la géométrie symplectique, à la théorie spectrale et aux h-opérateurs pseudo-différentiels.

Remerciements : je remercie les auditeurs des cours que j'ai eu l'occasion de donner sur ces sujets aussi bien à l'Institut Fourier, à l'ENS de Lyon et au centre Emile Borel.

Table des matières

INTRODUCTION	1
1. Remarques d'ordre général et bibliographique	3
2. Premiers pas	3
3. Problèmes	5
Bibliographie	7
Chapitre 1. GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE ET MÉCANIQUE HAMILTONIENNE	13
1. Introduction	13
2. Algèbre linéaire symplectique	14
3. Variétés symplectiques	23
4. Systèmes hamiltoniens	25
5. Variétés et crochets de Poisson	29
6. Variétés lagrangiennes	31
7. Réduction et intersection transverse au sens de Bott	33
8. Trajectoires périodiques	33
9. Fonctions génératrices	36
10. Indice de Morse	40
11. Indice de Maslov	42
12. Relations entre indices de Morse et de Maslov	44
13. Un exemple : l'optique géométrique	45
14. Introduction à KAM	48
Chapitre 2. MÉCANIQUE QUANTIQUE ET THÉORIE SPECTRALE	55
1. Opérateurs autoadjoints	55
2. Spectre d'un opérateur autoadjoint	56
3. Minimax	57
4. Laplaciens et opérateurs de Schrödinger	58
5. Exemples de spectre	58
6. Opérateurs de Sturm-Liouville	61
7. Formule de Weyl	61
Chapitre 3. OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS, MICROLOCALISATION	65
1. Introduction	65
2. Familles admissibles et microfonctions	66
3. La phase stationnaire	68
4. Symboles	75
5. ΨDO compactement supportés dans \mathbb{R}^n	77
6. Opérateurs pseudo-différentiels généraux	82

7. Ellipticité et microsupports	83
8. Résolvante d'un opérateur elliptique	86
9. Symbole sous-principal	87
10. Calcul fonctionnel	90
11. Quantification de Wick, mesures de Husimi	92
12. Constantes de Planck effectives	94
13. Crochets	95
Chapitre 4. LA METHODE BKW EN DIMENSION 1	97
1. L'Ansatz BKW	97
2. Développement asymptotique des vraies solutions	99
3. Spectre pour Schrödinger périodique	99
4. L'Ansatz de Maslov	100
5. Recollement des Ansatz	102
6. Asymptotique près de la caustique	102
7. Les conditions de Bohr-Sommerfeld	103
8. Réciproque des conditions de Bohr-Sommerfeld	103
9. Les termes suivants dans Bohr-Sommerfeld	103
Chapitre 5. FONCTIONS LAGRANGIENNES	105
1. L'Ansatz BKW	105
2. Fonctions lagrangiennes	106
3. La singularité-pli et la fonction de Airy	107
4. Opérateurs intégraux de Fourier	110
5. Théorème d'Egorov et applications	110
6. Calcul symbolique des fonctions lagrangiennes	115
7. Calcul symbolique : produits scalaires, etc...	119
8. Equation de transport	122
9. Le problème de Cauchy semi-classique	123
10. Transformation des mesures de Husimi et théorème ergodique semi-classique	127
11. Fonctions oscillantes attachées aux intersections lagrangiennes	130
Chapitre 6. FORMULES DE TRACES	135
1. Introduction	135
2. Principe des formules de traces	136
3. Traces	138
4. Exemples	140
5. La formule de trace de Selberg	141
6. Les trajectoires périodiques	144
7. Formule de traces semi-classique pour un OIF (I)	149
8. Formule de traces semi-classique pour un OIF (II)	151
9. Formule de traces semi-classique pour un hamiltonien	151
10. Heuristique de l'intégrale de Feynman	152
11. Le terme de Weyl	154
12. Preuve de la formule de traces dans le cas d'un lagrangien propre	155
13. Preuve de la formule de traces dans le cas d'un hamiltonien quelconque	156
14. Formules de trace pour le laplacien riemannien	156
15. Application au problème spectral inverse	158

16. Le cas complètement intégrable	159
Chapitre 7. QUASI-MODES	161
1. Généralités sur les quasi-modes	161
2. Quasi-modes attachés à une variété lagrangienne compacte : conditions de Bohr-Sommerfeld	165
3. Les coordonnées actions-angles semi-classiques	167
4. Le spectre stable ou KAM	169
5. Le spectre instable ou de Birkhoff	170
6. Questions	173
Chapitre 8. FORMES NORMALES DE BIRKHOFF CLASSIQUES ET QUANTIQUES	175
Introduction	175
1. Notations	176
2. Forme normale de Birkhoff classique pour une position d'équilibre	176
3. Le cas non résonant	179
4. L'algèbre des invariants classiques	180
5. Unicité de la forme normale de Birkhoff	181
6. Résonances dans le cas elliptique	181
7. Le cas non Morse en dimension 1	183
8. Le cas perturbatif	184
9. Cas d'une orbite périodique non dégénérée	185
10. Cas d'un tore lagrangien invariant	187
11. Oscillateurs harmoniques	188
12. La forme normale de Birkhoff semi-classique	190
13. Le calcul de la QBNF	191
14. Le spectre de la forme normale de Birkhoff	192
15. Quasi-modes associés à un équilibre elliptique	192
16. La formule des traces semi-classique près des points critiques	193
17. Orbites périodiques	193
Chapitre 9. L'EFFET TUNNEL	197
1. Introduction	197
2. Distance d'Agmon et décroissance des fonctions propres	199
3. Matrice d'interaction abstraite	203
4. Approximation par les problèmes à un puits	204
5. L'effet tunnel général : matrice d'interaction	205
6. Le cas des puits non dégénérés	207
7. Le reste amélioré	211
8. Puits non résonants	212
9. Plongements de graphes	212
10. Théorie de Morse et complexe de Witten	215
Chapitre 10. LES SYSTEMES SEMI-CLASSIQUES	225
1. Introduction : Born-Oppenheimer, Maxwell, systèmes adiabatiques	225
2. La séparation des niveaux	225
3. Le cas lisse : polarisation, connection géométrique, bandes	225
4. Croisements de niveaux : la géométrie	225
5. La formule de Landau-Zener	225

6. Les croisements de codimension ≥ 2	225
--------------------------------------------	-----

INTRODUCTION

Le but du cours est la description des solutions asymptotiques d'équations aux dérivées partielles linéaires dépendant de façon singulière d'un petit paramètre (il y a aussi des applications de ces méthodes à des EDP non-linéaires comme celles de la mécanique des fluides). Les exemples typiques sont l'équation des ondes lorsque la fréquence tend vers l'infini (optique géométrique comme limite de l'optique ondulatoire) et l'équation de Schrödinger quand la *constante* de Planck \hbar tend vers 0 (limite classique de la mécanique quantique). Il est moins habituel de considérer la limite adiabatique comme un problème semi-classique, ce qu'elle est cependant. Il peut paraître étonnant de faire tendre vers 0 une constante physique ; il s'agit d'un artifice mathématique bien pratique, l'espoir étant que les régimes asymptotiques étudiés donnent une approximation réaliste des vrais systèmes physiques.

L'ensemble de ces méthodes que l'on peut regrouper sous le vocable *semi-classique*, dont l'origine est la célèbre approximation BKW, a connu un grand développement depuis les années 1970, principalement sous l'action de mathématiciens comme Maslov, Lazutkin, Leray, Duistermaat, Weinstein, Guillemin et Hörmander. Maslov a été le premier à concevoir une méthode générale pour décrire l'asymptotique semi-classique en présence de caustiques. Duistermaat et Hörmander ont contribué à faire des opérateurs intégraux de Fourier un outil performant dans l'étude des EDP linéaires. Duistermaat, Guillemin et Weinstein ont géométrisé la théorie et l'ont appliqué à des problèmes d'asymptotique spectrale. La théorie de Duistermaat-Hörmander est une théorie sans petit paramètre, ce qui rend un peu acrobatique les applications aux problèmes avec petit paramètre. La théorie avec petit paramètre a été développée après Maslov par Leray, puis par Helffer-Robert.

La géométrie sous-jacente aux approximations semi-classiques se trouve être naturellement la géométrie symplectique de l'espace des phases, c'est-à-dire la géométrie du formalisme hamiltonien en mécanique classique ou en optique géométrique : de ce point de vue les choses ne sont pas nouvelles pour les physiciens, au moins en principe. Ce n'est pas surprenant puisque l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{du}{dt} = \hat{H}u$$

elle-même peut être vue comme un système hamiltonien sur l'espace projectif d'un espace de Hilbert. A la limite semi-classique, l'espace de Hilbert disparaît (et la linéarité), mais pas la structure symplectique. On perd la linéarité, mais on gagne la dimension finie. Il n'est pas étonnant que, outre les applications naturelles à la physique (mécanique quantique, optique), des applications purement mathématiques en résultent : preuve par Witten des inégalités de Morse, application au problème spectral inverse (spectre et géodésiques fermées), construction d'opérateurs de Schrödinger dont le début du spectre est prescrit.

Les outils généraux sont développés dans les premiers chapitres :

- Géométrie symplectique avec l'accent mis sur les variétés lagrangiennes et leurs représentations comme familles de fonctions (Huyghens ¹), sur certains aspects de la mécanique classique (trajectoires périodiques, théorèmes KAM).
- Théorie spectrale : il s'agit de quelques compléments d'analyse fonctionnelle et de théorie spectrale générale.
- Opérateurs pseudo-différentiels et microlocalisation. On présente la notion de famille admissible de fonctions (distributions) dépendant d'un petit paramètre h on introduit le faisceau des h -microfonctions, quotient des fonctions admissibles par les fonctions négligeables. Dans ce cadre, on introduit les notions de h -wavefront ou microsupport et le calcul des h -opérateurs pseudo-différentiels. On est ainsi conduit à la notions de mesure semi-classique ou de Husimi.
- Les distributions lagrangiennes sont également introduites comme sous-faisceau du précédent dont le support est une sous-variété lagrangienne du cotangent.

On décrit ensuite l'application de ces méthodes à la théorie spectrale de l'opérateur de Schrödinger quand \hbar tend vers 0.

C'est ainsi que l'on développe les sujets suivants :

- Quasi-modes : il s'agit de construire à partir d'informations sur les points d'équilibre stables ou plus généralement les trajectoires périodiques stables du système hamiltonien des fonctions propres approchées et d'en déduire des informations sur le spectre. En particulier, on décrira la construction de quasi-modes dans les cas complètement intégrables et dans le régime KAM (travaux de Lazutkin).
- Formules de traces : on identifie la trace du groupe unitaire associé à l'équation de Schrödinger (la fonction de partition quantique) comme somme sur les valeurs propres à la trace obtenue à partir du noyau distribution $e(t, x, y)$ de $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}$:

$$\sum_{j=1}^{j=\infty} e^{-itE_j/\hbar} = \int_X e(t, x, x) dx .$$

On construit ensuite des approximations semi-classiques du noyau e lorsque \hbar tend vers 0 (formules de Van Vleck) au moyen du calcul des distributions lagrangiennes. On donne ainsi des preuves des formules de traces de type Gutzwiller et on montre comment en déduire la formule de traces de Duistermaat-Guillemin.

- Formes normales de Birkhoff : la théorie classique des formes normales de Birkhoff est un mécanisme purement algébrique qui s'étend sans difficultés au régime semi-classique. On peut ainsi décrire les états semi-excités d'un hamiltonien semi-classique au voisinage d'un minimum non dégénéré de sa limite classique.
- Effet tunnel : il s'agit de comprendre les effets dus à la non-localisation des fonctions propres, en particulier dans les situations de quasi-modes avec symétries. On mentionnera l'application aux inégalités de Morse

¹Christiaan Huyghens (1629-1695), mathématicien, physicien et astronome hollandais, *Traité de la lumière* (1690)

et à la construction du complexe de Thom-Smale par Witten, ainsi que les applications au problème combinatoire classique du plongement des graphes dans les surfaces.

- Ergodicité et fonctions propres : on peut associer aux fonctions propres leur distribution de Husimi dans l'espace des phases. A la limite semi-classique, ces mesures sont invariantes par le flot hamiltonien. Dans le cas ergodique, on obtient des résultats sur l'équipartition des fonctions propres : théorème ergodique semi-classique de Shnirelman.

1. Remarques d'ordre général et bibliographique

Il ne sera évidemment pas question de donner les preuves détaillées de tous les résultats. Souvent, un cas particulier typique sera expliqué plus à fond ou bien on renverra à une référence précise.

Pour ce qui est de la bibliographie force est de constater qu'il n'y a pas de référence raisonnable contenant à la fois un point de vue géométrique et l'analyse semi-classique au sens Maslov-Leray (ie $\hbar \rightarrow 0$). Les traités récents d'EDP linéaires (Hörmander, Trèves) contiennent un chapitre de géométrie symplectique mais assez orienté vers l'analyse des EDP générales. Le livre [Rob87] (voir aussi [HR81]) est une bonne référence, mais là encore le point de vue géométrique n'est peut-être pas assez mis en avant.

Pour ce qui est des généralités sur la mécanique quantique les meilleures références à ce niveau semblent être [LL74], [FH65] et [Mac63] ; il y aussi d'excellents traités de mécanique classique [Arn67], [AM78], [LM88].

Comme introduction à la géométrie symplectique, on peut conseiller [Arn67], [Dui96], [Wei77], [Wei82].

Pour ce qui est de la formule des traces semi-classique, la référence mathématique principale est [DG75]. Les physiciens pourront préférer consulter [Gut90] et [GVZ91]. Je m'inspirerai aussi beaucoup de [Dui74].

La mathématique de l'effet tunnel est principalement l'oeuvre de Helffer-Sjöstrand [HS84], [HS85a], [HS85b], [HS85c].

Pour la construction de quasi-modes, [Ral76], [Ral77] et [Sjö92] semblent une bonne base.

2. Premiers pas

2.1. Du côté de la mécanique.

2.1.1. *La mécanique classique.* on réécrit les équations de Newton $m d^2x/dt^2 = -\text{grad}V(x)$ comme les équations d'Euler-Lagrange de $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(x, dx/dt) dt$, avec $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(dx/dt)^2 - V(x)$ (intégrale d'action). Cette formulation variationnelle permet de comprendre l'invariance par changement de variable en x , mais pas dans l'espace des phases $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$.

On a recours pour cela au formalisme hamiltonien : l'espace de phases $T^*\mathbf{R}^n$ est l'espace cotangent, l'hamiltonien $H(x, \xi) = \xi^2/2m + V(x)$ est une fonction numérique sur $T^*\mathbf{R}^n$, la dynamique est donnée par :

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_j}, \quad \frac{d\xi_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}.$$

Ceci peut se réécrire à partir de la forme symplectique $\omega = \sum d\xi_j \wedge dx_j$, la dynamique est celle du champ de vecteurs \mathcal{X}_H défini par $\omega(\mathcal{X}_H, \cdot) = -dH(\cdot)$. On interprète $T^*\mathbf{R}^n$ comme l'espace des états du système classique.

2.1.2. *La mécanique quantique ou ondulatoire.* C'est une mécanique d'onde où les états sont donnés par des fonctions d'ondes qui évoluent suivant une EDP, l'équation de Schrödinger. L'espace des états $\mathbf{P}(L^2(\mathbf{R}^n))$ est l'espace projectif d'un espace de Hilbert complexe, l'espace des fonctions d'onde, la dynamique est donnée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = \hat{H}u ,$$

où \hat{H} est l'opérateur autoadjoint obtenu en remplaçant ξ_j par $-i\hbar \partial / \partial x_j$ et x_j par la multiplication par la fonction x_j . Cette règle empirique ne donne pas de recette cohérente, mais si $H(x, \xi) = (1/2m)\xi^2 + V(x)$, on prend $\hat{H} = -(\hbar^2/2m)\Delta + V$. On interprète un point de l'espace projectif comme un état et la densité $u(x)^2 |dx|$ comme la probabilité de présence en un point.

2.1.3. *Les solutions semi-classiques.* On s'intéresse à ce qui se passe lorsque $\hbar \rightarrow 0$ et on essaie de construire des solutions oscillantes approchées (solutions BKW) :

$$\begin{aligned} (-\hbar^2 \Delta + V - E)(ae^{\frac{iS}{\hbar}}) &= e^{\frac{iS}{\hbar}} (a(V - E + \|dS\|^2) \\ &+ \frac{\hbar}{i} (< da|dS > + \frac{1}{2}a\Delta S) - \hbar^2 \Delta a) . \end{aligned}$$

On peut réinterpréter géométriquement l'annulation des 2 premiers termes en puissances de \hbar :

- L'annulation du premier terme (*équation eiconale*) s'interprète en termes de variété lagrangienne (solution géométrique de l'équation de Hamilton-Jacobi)
- Celle du second terme (*équation de transport*) comme la construction d'une demi-densité invariante sur celle-ci :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}_H}(a|dx|^{\frac{1}{2}}) = (< da|dS > + \frac{1}{2}a\Delta S)|dx|^{\frac{1}{2}} .$$

Une autre approche est fournie par l'intégrale de Feynman ; le noyau $e(t, x, y)$ de l'opérateur $U(t) = \exp(-i\frac{t}{\hbar}\hat{H})$ est alors donné formellement par l'intégrale sur l'espace des chemins :

$$e(t, x, y) = \int_{\Omega_{x,y}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma} \mathcal{L}} d\gamma ,$$

où $\Omega_{x,y}$ est l'espace des chemins $\gamma : [0, t] \rightarrow X$ d'origine x et d'extrémité y et $d\gamma$ est une *mesure de Lebesgue*. L'application de la méthode de la phase stationnaire fait apparaître les trajectoires classiques.

Entre ces 2 approches, la première insuffisante pour représenter les solutions au voisinage des caustiques et la seconde qui manque d'assise mathématique (intégrales de Fresnel en dimension infinie), une voie intermédiaire existe c'est l'étude systématique des fonctions représentables comme superposition

$$\int e^{i\varphi(x,\theta)/\hbar} a(x, \theta) d\theta .$$

Cet Ansatz a été proposé par Maslov : nous pouvons l'appeler l'*Ansatz de Huyghens-Maslov*.

En particulier on souhaite associer à de telles intégrales une information purement géométrique codée au moyen d'une variété lagrangienne : c'est le *calcul symbolique* développé principalement par Duistermaat et Hörmander.

2.2. Du côté de l'optique. On a évidemment une analogie en optique : L'optique géométrique et les rayons lumineux vus comme extrémales de $\int nds$ ou avec le formalisme hamiltonien et l'optique ondulatoire (les équations de Maxwell et l'équation des ondes).

3. Problèmes

Quelques problèmes en arrière plan.

L'intégrale de Feynmann en est certainement un. Bien que manquant à l'heure actuelle de justification mathématique permettant d'en faire un outil banal, nous verrons qu'elle permet de prévoir certains résultats (formule de traces, déphasages) avec une grande précision.

Un autre problème qui me semble intéressant est l'utilisation de l'analyse semi-classique en vue d'obtenir des résultats de géométrie symplectique par exemple le principe d'incertitude classique (voir [Vit92] à ce sujet).

Enfin un 3ème champ qui mériterait davantage d'investissements est celui de l'application de l'effet tunnel en géométrie : mentionnons déjà la construction du complexe dit de Witten qui permet de calculer en principe l'homologie, la preuve par Bismut et Zhang d'une extension considérable de la conjecture de Ray-Singer ainsi que mes travaux sur les plongements de graphes.

Bibliographie

- [AA67] Arnold, V. and Avez, A. *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*. Gauthier-Villars, 1967.
- [AG91] Alinhac, S. and Gérard, P. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Interéditions, 1991.
- [Agm82] Agmon, S. *Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations*. Mathematical notes Princeton, 1982.
- [AH76] Albeverio, S. A. and Hoegh-Krohn, R. J. *Mathematical theory of Feynman path integrals*. Lecture Notes in Mathematics 523. Springer, 1976).
- [Air38] Airy, G. On the intensity of the light in a neighborhood of a caustic. *Trans Cambr. Phil. Soc.*, 6:379–403, 1838.
- [AM78] Abraham, R. and Marsden, J. *Foundations of mechanics*. Benjamin, 1978.
- [Arn63] Arnold, V. Small denominators II. Proof of a theorem of A. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian. *Russian Math. Surveys*, 18:9–36, 1963.
- [Arn67] Arnold, V. On a characteristic class entering in the quantization conditions. *Funct. Anal. and Appl.*, 1:1–13, 1967.
- [Arn72] Arnold, V. Modes et quasi-modes. *Functional analysis and its applications*, 6: 94–101, 1972.
- [Arn78] Arnold, V. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer, 1978.
- [Arn85] Arnold, V. The Sturm intersection theorem and symplectic geometry. *Funct. anal. and its applic.*, 19:251–259, 1985.
- [Aud91] Audin, M. *The topology of torus actions on symplectic manifolds*. Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1991.
- [Aud96] Audin, M. *Spinning tops. A course on integrable systems*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1996.
- [Aud00] Audin, M. *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*. Cours spécialisés, Soc. Math. Fr., 2000.
- [AVG87] Arnold, V., Varchenko, A., and Goussein-Sade, S. *Singularités des applications différentiables*. Mir (Moscou), 1987.
- [Bat97] Bates, S. and Weinstein, A. *Lectures on the geometry of quantization*. Berkeley Mathematics Lecture Notes., 1997.
- [BB70] Balian, R. and Bloch, C. Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain I. *Ann. of Physics*, 60:401, 1970.
- [BB71] Balian, R. and Bloch, C. Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain II. *Ann. of Physics*, 64:271, 1971.
- [BB72] Balian, R. and Bloch, C. Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain III. *Ann. of Physics*, 69:76, 1972.
- [BB74] Balian, R. and Bloch, C. Solution of the Schrödinger equation in terms of classical paths. *Ann. of Phys.*, 85:514, 1974.
- [Ber00] Berndt, R. *An introduction to Symplectic Geometry*. AMS, 2000.
- [BFK91] Burgulea, D., Friedlander, L., and Kappeler, T. On the determinant of elliptic differential and finite difference operators in vector bundles over S^1 . *Commun. Math. Phys.*, 138:1–38, 1991.
- [BGM71] Berger, M., Gauduchon, P., and Mazet, E. *Le spectre d’une variété riemannienne compacte*. Springer LNM, 1971.
- [BGS84] Bohigas, O., Giannoni, M.-J., and Schmit, C. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett*, 52:1–4, 1984.

- [Bir66] Birkhoff, G.D. *Dynamical systems*. AMS, 1966.
- [Bos86] Bost, J. Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d'après Kolmogorov, Arnold, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel). *Astérisque*, 133-134:113–157, 1986.
- [Bot56] Bott, R. On the iterations of closed geodesics and Sturm intersection theory. *CPAM*, 9: 171–206, 1956.
- [BPU95] Brummelhuis, R., Paul, T., and Uribe, A. Spectral estimates around critical levels. *Duke Math. J.*, 78: 477–530, 1995.
- [BU91] Brummelhuis, R. and Uribe, A. A trace formula for Schrödinger operators. *Comm. Math. Phys.*, 136: 567–584, 1991.
- [Bun95] Bunke, U. On the gluing problem for the η -invariant. *J. Differ. Geom.*, 41:397–448, 1995.
- [BV86] Balazs, N. and Voros, A. Chaos on the pseudo-sphere. *Physics reports*, 143:109–240, 1986.
- [BW75] Born, M. and Wolf, E. *Principles of optics*. Pergamon, 1975.
- [BW84] Berry, M. and Wilkinson, M. Diabological points in the spectra of triangles. *Proc. Royal Soc. London*, A 392:15–43, 1984.
- [Bér77] Bérard, P. On the wave equation on a compact Riemannian manifold without conjugate points. *Math. Z.*, 155:249–276, 1977.
- [Car93] Carvalho, R. E. de. Classical and Quantum aspects of resonant normal forms. *Nonlinearity*, 6:973–975, 1993.
- [CFKS80] Cycon, Froese, Kirsch, and Simon, B. *Schrödinger operators with applications to quantum mechanics and global geometry*. Springer, 1980.
- [Cha74] Chazarain, J. Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. *Invent. Math.*, 24: 65–82, 1974.
- [CLP99] Colin de Verdière, Y., Lombardi, M., and Pollet, J. The microlocal Landau-Zener formula. *Annales de l'institut Poincaré*, 71:95–127, 1999.
- [Col73a] Colin de Verdière, Y. Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I. *Compositio Mathematica*, 27: 80–106, 1973.
- [Col73b] Colin de Verdière, Y. Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II. *Compositio Mathematica*, 27: 159–184, 1973.
- [Col75] Colin de Verdière, Y. Paramétrix de l'équation des ondes et intégrales sur l'espace des chemins. *Séminaire Goulaouic-Schwartz*, :, 1974–1975.
- [Col77a] Colin de Verdière, Y. Quasi-modes sur les variétés riemanniennes. *Inventiones Math.*, 43: 15–52, 1977.
- [Col77b] Colin de Verdière, Y. Nombre de points entiers dans une famille homothétique de domaines de \mathbb{R}^n . *Ann. Sci. ENS Paris*, 10:559–576, 1977.
- [Col79a] Colin de Verdière, Y. Sur le spectre des opérateurs à bicaractéristiques toutes périodiques. *Comment. Math. Helv.*, 54: 508–522, 1979.
- [Col79b] Colin de Verdière, Y. Spectre conjoint d'OPD qui commutent I : le cas non intégrable. *Duke Math. J.*, 46: 169–182, 1979.
- [Col80] Colin de Verdière, Y. Spectre conjoint II : le cas intégrable. *Math. Z.*, 171: 51–73, 1980.
- [Col85] Colin de Verdière, Y. Ergodicité et fonctions propres du Laplacien. *Comm. Math. Phys.*, 102: 497–502, 1985.
- [Col86] Colin de Verdière, Y. L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques. *Comm. Math. phys.*, 105: 327–335, 1986.
- [Col98a] Colin de Verdière, Y. Introduction à la mécanique semi-classique. *Ens. math.*, 44:23–51, 1998.
- [Col98b] Colin de Verdière, Y. *Spectres de graphes*. Soc. Math. Fr, 1998.
- [Col99] Colin de Verdière, Y. Déterminants et intégrales de Fresnel. *Ann. Inst. Fourier*, 49:861–881, 1999.
- [Col01] Colin de Verdière, Y. Singular Lagrangian manifolds and semi-classical analysis. *En préparation*, :1–..., 2001.
- [Com82] Combet, E. *Intégrales exponentielles*. Lecture Notes in Math 937 (Springer), 1982.
- [Con96] Connes, A. Formule de trace en géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 323:1231, 1996.
- [CP94a] Colin de Verdière, Y. and Parisse, B. Equilibres instables en régime semi-classique II: conditions de Bohr-Sommerfeld. *Ann. IHP (physique théorique)*, 61:347–367, 1994.

- [CP94b] Colin de Verdière, Y. and Parisse, B. Equilibres instables en régime semi-classique I: concentration microlocale. *Comm. PDE*, 19:1535–1564, 1994.
- [CP99] Colin de Verdière, Y. and Parisse, B. Singular Bohr-Sommerfeld rules. *Commun. Math. Phys.*, 205:459–500, 1999.
- [CV79] Colin de Verdière, Y. and Vey, J. Le lemme de Morse isochore. *Topology*, 18: 283–293, 1979.
- [CV00] Colin de Verdière, Y. and Vu Ngoc, S. Singular Bohr-Sommerfeld rules for $2d$ –integrable systems. *Prépublication Institut Fourier*, :, juin 2000.
- [Dar72] Darboux, G. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. Chelsea, 1972.
- [Dav99] Davies, B. Semi-classical States for Non-Self-Adjoint Schrödinger Operators. *Commun. Math. Phys.*, 200:35–41, 1999.
- [DG75] Duistermaat, J. and Guillemin, V. The spectrum of positiv elliptic operators and periodic geodesics. *Invent. Math.*, 29: 39–79, 1975.
- [DH72] Duistermaat, J. and Hörmander, L. Fourier integral operators II. *Acta Math.*, 128: 183–269, 1972.
- [DHPR69] Deprit A, Henrard J., Price J., and Rom A. Birkhoff’s normalization. *Celest. Mechanics*, 1:222–251, 1969.
- [DS99] M. Dimassi and J. Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [Dui72] Duistermaat, J. On periodic solutions near Equilibrium Points of Conservative systems. *Arch. Rational Mech. Anal*, 45:143–160, 1972.
- [Dui74] Duistermaat, J. Oscillatory integrals, Lagrangian immersions and unfolding of singularities. *Commun. Pure Applied Math.*, 27: 207–281, 1974.
- [Dui76] Duistermaat, J. On the Morse index in Variational calculus. *Advances in Math.*, 21: 173–195, 1976.
- [Dui84a] Duistermaat, J. Bifurcations of periodic solutions near equilibrium points of Hamiltonian systems. *Bifurcation Theory and Applications, Springer LNM*, 1057:56–105, 1984.
- [Dui84b] Duistermaat, J. Non-integrability of the 1:1:2 resonance. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 4:553–568, 1984.
- [Dui96] Duistermaat, J. *Fourier integral operators*. Birkhauser, 1996.
- [Eck86] Eckhardt, B. Birkhoff-Gustavson normal forms in classical and quantum mechanics . *J. Phys. A*, 19:2961–2972 , 1986.
- [Eck87] Eckhardt, B. Quantum mechanics of classically non-integrable systems. *Phys. Report*, 163: 205–297, 1987.
- [Ein17] Einstein, A. Zum Quantensatz from Sommerfeld and Epstein. *Verh. Deutsch Phys. Ges.*, 19: 82–92, 1917.
- [ERT84] Eskin, G., Ralston, J., and Trubowitz, E. On isospectral potentials in \mathbb{R}^n . *Comm. Pure Appl. Math.*, 37: 647–676, 1984.
- [Fed83] Fedoriuk, M. *Asymptotic Analysis*. Springer, 1983.
- [Fed99] Fedoriuk, M. *Partial Differential Equations V. Asymptotic Methods for Partial Differential Equations*. Springer, 1999.
- [FG91] François, J.-P. and Guillemin, V. On the Period Spectrum of a Symplectic Mapping. *Jour. of Funct. Anal.*, 100:317–358, 1991.
- [FH65] Feynman, R. and Hibbs, A. *Quantum mechanics and path integrals*. McGraw-Hill (New-York), 1965.
- [FKT91] Feldman, J., Knörrer, H., and Trubowitz, E. Perturbatively unstable eigenvalues of a periodic Schrödinger operator. *Comment. Math. Helv.*, 66:557–579, 1991.
- [FLS65] Feynman, R., Leighton, R., and Sands, M. *The Feynman lectures on physics (vol 3: Quantum mechanics)*. Addison-Wesley, 1965.
- [Fol89] Folland, G. *Harmonic analysis in phase space*. Princeton, 1989.
- [For87] Forman, R. Functional determinants and geometry. *Invent. Math.*, 88: 447–493, 1987.
- [For92] Forman, R. Determinants, Finite-Difference Operators and Boundary Value Problems. *Commun. Math. Phys.*, 147: 485–526, 1992.
- [GF63] Gelfand, I. and Fomin, S. *Calculus of variations*. Prentice Hall, 1963.
- [God69] Godbillon, C. *Géométrie différentielle et mécanique analytique*. Hermann, Paris, 1969.
- [GS64] Gelfand, I. and Shilov, G. *Generalized Functions, vol. 1*. Academic Press, 1964.
- [GS73] Guillemin, V. and Schaeffer, D. Remarks on a paper of D. Ludwig. *Bull. AMS*, 79: 382–385, 1973.

- [GS76] Guillemin, V. and Sternberg, S. *Geometric asymptotics*. AMS, 1976.
- [GS77] Guillemin, V. and Schaeffer, D. On a certain class of Fuchsian partial differential equations. *Duke Math. J.*, 44:157–199, 1977.
- [GS84] Guillemin, V. and Sternberg, S. *Symplectic techniques in physics*. Cambridge University Press, 1984.
- [GS94] Grigis, A. and Sjöstrand, J. *Microlocal Analysis for differential Operators: an Introduction*. London Math. Soc. Lecture Notes, 1994.
- [GU81] Guillemin, V. and Uhlmann, G. Oscillatory integrals with singular symbols. *Duke Math. J.*, 48:251–267, 1981.
- [GU89] Guillemin, V. and Uribe, A. Circular symmetry and the trace formula. *Invent. Math.*, 96: 385–423, 1989.
- [Gui93] Guillemin, V. Wave-trace invariants and a theorem of Zelditch. *International Math. Res. Not.*, 12: 303–308, 1993.
- [Gui96] Guillemin, V. Wave-trace invariants. *Duke Math. Jour.*, 83: 287–352, 1996.
- [Gus66] Gustavson, F. On constructing Formal Integrals of a Hamiltonian System near an Equilibrium Point. *The Astronomical Journal*, 71:670–686, 1966.
- [Gut71] Gutzwiller, M. Periodic orbits and classical quantization conditions. *J. of Math. Phys.*, 12:343–358, 1971.
- [Gut89] Gutzwiller, M. The semi-classical quantization of chaotic Hamiltonian systems. *Ecole des Houches organisée par Giannoni et Voros*, 52: 201–249, 1989.
- [Gut90] Gutzwiller, M. *Chaos in classical and quantum mechanics*. Springer (New-York), 1990.
- [GVZ91] Giannoni, M.-J., Voros, A., and Zinn-Justin, J. *Chaos and quantum physics (Ecole des Houches 1989)*. North-Holland, 1991.
- [Hej76] Hejhal, D. The Selberg trace formula and the Riemann ζ function. *Duke Math. J.*, 43: 441–482, 1976.
- [Hel88] Helffer, B. *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*. Lecture notes in Math. 1336 (Springer), 1988.
- [Hen85] Henniart, G. Les inégalités de Morse d’après Witten (Séminaire N. Bourbaki). *Astérisque*, 121-122:43–61, 1985.
- [How80a] Howe, R. On the role of Heisenberg group in harmonic analysis. *Bull. AMS*, 3: 821–843, 1980.
- [How80b] Howe, R. Quantum mechanics and PDE. *J. Func. Anal.*, 32: 188–254, 1980.
- [HR81] Helffer, B. and Robert, D. Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques. *Ann. Inst. Fourier*, 31:169–223, 1981.
- [HS84] Helffer, B. and Sjöstrand, J. Puits multiples en semi-classique I. *Comm. PDE*, 9: 337–408, 1984.
- [HS85a] Helffer, B. and Sjöstrand, J. Puits multiples en semi-classique II. *Ann. IHP (Physique théorique)*, 42: 127–212, 1985.
- [HS85b] Helffer, B. and Sjöstrand, J. Puits multiples en semi-classique III. *Math. Nachrichten*, 127: 263–313, 1985.
- [HS85c] Helffer, B. and Sjöstrand, J. Puits multiples en semi-classique IV. *Comm. PDE*, 10: 245–340, 1985.
- [HZ94] Hofer, H. and Zehnder, E. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. Birkhaeuser, 1994.
- [Hör68] Hörmander, L. The spectral function of an elliptic operator. *Acta Math.*, 121: 193–218, 1968.
- [Hör71] Hörmander, L. Fourier integral operators I. *Acta Math.*, 127:79–183, 1971.
- [Hör79] Hörmander, L. The Weyl calculus of pseudo-differential operators. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 32: 359–443, 1979.
- [Hör85] Hörmander, L. *The analysis of partial differential operators (4 volumes)*. Springer, 1983-1985.
- [Irw80] Irwin, M. *Smooth dynamical systems*. Academic Press, 1980.
- [Joy96] Joyeux M. Classical dynamics of the 1 : 1, 1 : 2 and 1 : 3 resonance Hamiltonians. *J. Chem. Phys.*, 203:281–307, 1996.
- [Kir74] Kirillov, A. *Eléments de la théorie des représentations*. Mir, 1974.
- [Kna93] Knauf, A. On a ferromagnetic spin chain. *Commun. Math. Phys.*, 153: 77–115, 1993.
- [Kna94] Knauf, A. On a ferromagnetic spin chain. II: Thermodynamic limit. *J. Math. Phys.*, 35:228–236, 1994.

- [Kol54] Kolmogorov, A. Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique. *Proc. of the 1954 Intern. Congress of Math., Amsterdam*, 1:315–33, 1954.
- [Koz90] Kozlov, S. Asymptotics of Laplace-Dirichlet integrals. *Functional analysis and its applications*, 24: 115–125, 1990.
- [Lau92] Laudenbach, F. *Cours Calcul différentiel*. Ecole Polytechnique Paris, 1992.
- [Laz74] Lazutkin, V.F. Asymptotics of the eigenvalues of the Laplacian and quasimodes. A series of quasimodes corresponding to a system of caustics close to the boundary of the domain. *Math. USSR, Izv.*, 7:439–466, 1974.
- [Laz93] Lazutkin, V. *KAM and Semi-classical approximation of eigenfunctions*. Springer, 1993.
- [LL74] Landau, L. and Lifshitz, E. *Mécanique quantique non relativiste*. Mir(Moscou), 1974.
- [LM88] Lochak, P. and Meunier, C. *Multiphase Averaging for Classical Systems*. Springer, 1988.
- [LS77] Levit, S. and Smilansky, U. A theorem on infinite products of eigenvalues of Sturm type operators. *Proc. AMS.*, 65: 299–303, 1977.
- [Mac63] Mackey, G. *The mathematical foundations of quantum mechanics*. Benjamin, 1963.
- [Mar02] Martinez, A. *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*. Universitext, Springer, 2002.
- [Mas72] Maslov, V. *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*. Dunod, Gauthiers-Villars, Paris, 1972.
- [Meh90] Mehta, M.L. *Random Matrices*. Academic press, 1990.
- [Mei92] Meinrenken, E. Semi-classical principal symbols and Gutzwiller’s trace formula. *Rep. Math. Phys.*, 31: 279–295, 1992.
- [MF81] Maslov, V. and Fedoriuk, M. *Semi-classical approximation in quantum mechanics*. Reidel (Pays-Bas), 1981.
- [Mil67] Milnor, J. *Morse theory*. Princeton, 1967.
- [MM74] Markus, L. and Meyer, K.R. *Generic Hamiltonian dynamical systems are neither integrable nor ergodic*. Number 144 in Memoirs of the AMS. AMS, 1974.
- [MM82] Marvizi, S. and Melrose, R. Spectral invariants of convex planar regions. *J. Differ. Geom.*, 17:475–502, 1982.
- [Mor34] Morse, M. *The calculus of variations in the large*. AMS Publ., 1934.
- [Mos62] Moser, J. On invariant curves of area-preserving mappings of the annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.*, 1:1–20, 1962.
- [Mos68] Moser, J. Lectures on Hamiltonian systems. *Memoirs of the AMS*, 81:1–60, 1968.
- [Mos5] Moser, J. On the volume element on a manifold. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120:286–294, 1965 .
- [MS95] Mac-Duff, D. and Salamon, D. *Introduction to symplectic topology*. Oxford, 1995.
- [MU79] Melrose, R. and Uhlmann, G. Lagrangian intersection and the Cauchy problem. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32:483–519, 1979.
- [OPS88a] Osgood, B., Phillips, R., and Sarnak, P. Compact isospectral sets of surfaces. *J. Funct. Anal.*, 80: 212–234, 1988.
- [OPS88b] Osgood, B., Phillips, R., and Sarnak, P. Extremals of determinants of Laplacians. *J. Funct. Anal.*, 80: 148–211, 1988.
- [Ozo88] Ozorio de Almeida, A. *Hamiltonian systems, chaos and quantization*. Cambridge, 1988.
- [Per90] Perelomov, A. *Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras*. Birkhauser, 1990.
- [Ral76] Ralston, J. On the construction of quasi-modes associated to stable periodic orbits. *Comm. Math. Phys.*, 51: 219–242, 1976.
- [Ral77] Ralston, J. Approximate eigenfunctions of Laplace operator. *Journal diff. geom.*, 12: 87–100, 1977.
- [Rob87] Robert, D. *Autour de l’approximation semi-classique*. Progress in Math. (Birkhäuser), 1987.
- [Rob91] Robbins, J. M. Maslov indices in the Gutzwiller trace formula. *Nonlinearity*, 4:343–363, 1991.
- [RS71] Ray, D.B. and Singer, I. R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds. *Advances Math.*, 7: 145–210, 1971.
- [RS80] Reed, M. and Simon, B. *Methods of modern mathematical physics*. Academic press, 1980.
- [San81] Sanders J. Second Quantization and averaging : Fermi resonance. *J. Chem. Phys.*, 74:5733–5736, 1981.

- [Sar95] Sarnak, P. Arithmetic Quantum Chaos (Shur Lectures). *Israel math. conf. proc.*, 8: 183–236, 1995.
- [Sel56] Selberg, A. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. *J. Indian Math. Soc.*, 20: 47–87, 1956.
- [Sim80] Simon, B. The classical limit of quantum partition functions. *Comm. Math. Phys.*, 71: 247–276, 1980.
- [Sim83] Simon, B. Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I Non degenerate minimas: asymptotic expansions. *Ann IHP*, 38: 295–307, 1983.
- [Sim84] Simon, B. Semi-classical analysis of low lying eigenvalues II Tunneling. *Ann. of Maths*, 120: 89–118, 1984.
- [Sjö92] Sjöstrand, J. Semi-excited states in nondegenerate potential wells. *Asymptotic analysis*, 6:29–43, 1992.
- [SM95] Siegel K. and Moser J. *Lectures on celestial mechanics*. Springer-Verlag, 1995.
- [Sou69] Souriau, J.-M. *Structure des systèmes dynamiques*. Dunod, Paris, 1969.
- [Sto01] Stolovitch L. Un phénomène de type KAM, non symplectique, pour les champs de vecteurs holomorphes singuliers. *Comptes rendus Acad. Sciences Paris*, ??:?, 2001.
- [Tay74] Taylor, M. *Pseudo-differential operators*. Springer-Verlag, 1974.
- [Ter85] Terras, A. *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications*. Springer, 1985.
- [Tre80] Treves, F. *Introduction to pseudo-differential operators and Fourier integral operators (2 volumes)*. Plenum Press, 1980.
- [Vai94] Vaisman, I. *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*. Birkhäuser, 1994.
- [Ver83] Verhulst F. Asymptotic analysis in Hamiltonian systems. *Asymptotic Analysis II, Springer LNM*, 985:137–183, 1983.
- [Vit92] Vitterbo, C. Une introduction à la topologie symplectique. *Gazette des mathématiciens (Soc. Math. Fr.)*, 54:81–96, 1992.
- [Vor93] Voros A. Résurgence quantique. *Annales Institut Fourier*, 43:1509–1534, 1993.
- [Vu 98] Vu Ngoc, S. *Sur le spectre des systèmes semi-classiques complètement intégrables avec singularités*. PhD thesis, Institut Fourier, Grenoble, 1998.
- [Weh93] Wehlau, D. L. Constructive invariant theory for tori. *Ann. Inst. Fourier*, 43:1055–1066, 1993.
- [Wei73a] Weinstein, A. Lagrangian submanifolds and Hamiltonian systems. *Ann. of Math.*, 98:377–410, 1973.
- [Wei73b] Weinstein, A. Normal modes for nonlinear Hamiltonian systems. *Invent. Math.*, 20:47–57, 1973.
- [Wei74] Weinstein, A. Fourier integral operators, quantization, and the spectra of Riemannian manifolds. *Geom. sympl. Phys. math., Colloq. int. Aix-en-Provence*, 1:289–298, 1974.
- [Wei77] Weinstein, A. *Lectures on symplectic manifolds*. AMS, 1977.
- [Wei82] Weinstein, A. What is microlocal analysis ? *Math. Intelligencer*, 4:90–92, 1982.
- [Wei83] Weinstein, A. The local structure of Poisson manifolds. *J. diff. geometry*, 18:523–557, 1983.
- [Wit82] Witten, E. Supersymmetry and Morse theory. *J. diff. geometry*, 17: 661–692, 1982.
- [Zel87] Zelditch, S. Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces. *Duke Math. J.*, 55:919–941, 1987.
- [Zel97] Zelditch, S. Wave trace invariants at elliptic closed geodesics. *GAF*, 7:145–213, 1997.
- [Zel98] Zelditch, S. Wave invariants for non-degenerate closed geodesics. *GAF*, 8:179–207, 1998.

GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE ET MÉCANIQUE HAMILTONIENNE

1. Introduction

Géométrie symplectique est le nom moderne de ce qu'on appelait *formalisme hamiltonien de la mécanique classique*.

Si on s'intéresse aux trajectoires d'une particule de masse m dans un champ de force

$$F = -\text{grad}V ,$$

dans \mathbb{R}^n qui dérive du potentiel V , on a les équations de Newton :

$$m \frac{d^2 x_j}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial x_j} .$$

Introduisant les impulsions $\xi_j = m \frac{dx_j}{dt}$ et l'énergie $H = \frac{\xi^2}{2m} + V(x)$, on peut réécrire ce système de n équations différentielles du second ordre comme un système de $2n$ équations du premier ordre :

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_j}, \quad \frac{d\xi_j}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_j} .$$

Ces équations ressemblent à celles d'un champ de gradient sur \mathbb{R}^{2n} , il s'agit bien d'un gradient, mais par rapport à la forme antisymétrique $\omega = \sum d\xi_j \wedge dx_j$; si \mathcal{X} est le champ de vecteurs considéré sur \mathbb{R}^{2n} , on a :

$$\iota(\mathcal{X})\omega = -dH .$$

On en déduit immédiatement la conservation de l'énergie et de ω (théorème de Liouville). De plus, la dynamique est entièrement déterminée par la donnée du triplet $(\mathbb{R}^{2n}, \omega, H)$. Le couple $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ s'appelle *espace des phases*.

L'intérêt est d'avoir géométrisé les équations du mouvement et de pouvoir faire des changements de coordonnées comme on peut en faire en géométrie riemannienne. Un autre intérêt de ce formalisme est qu'il donne un accès à la mécanique quantique : on verra comment fabriquer l'équation de Schrödinger \hat{H} correspondant à H . Grosso-modo, \hat{H} est l'opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ obtenu en remplaçant, dans $H(x, \xi)$, x_j par l'opérateur de multiplication par x_j et ξ_j par

$$\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

La non commutation de ces 2 opérateurs pose quelques problèmes que l'on traitera plus bas (quantification de Weyl) en abandonnant l'idée qu'à une mécanique classique correspond une unique mécanique quantique ; c'est plutôt le contraire, la mécanique classique est déterminée comme limite quand $h \rightarrow 0$ de la mécanique quantique (limite appelée *semi-classique*).

Le but de ce chapitre est de présenter les fondements de la géométrie symplectique, et plus particulièrement les objets utiles du point de vue semi-classique.

L'accent sera mis en particulier sur les variétés lagrangiennes et leurs fonctions génératrices. On montrera par exemple comment obtenir à partir de l'espace des chemins ou des chemins brisés des fonctions génératrices naturelles pour les flots hamiltoniens. La relation entre indices de Morse et de Maslov résultera de cette présentation.

On développera quelques exemples : l'exemple canonique T^*X (espace cotangent d'une variété X), le projectif complexe et ses sous-variétés algébriques, les espaces d'orbites (application de Poincaré, méthode de moyennisation, réduction). On montrera en particulier que l'équation de Schrödinger peut être vue comme un système hamiltonien : cela introduit de façon naturelle les relations entre les commutateurs d'opérateurs auto-adjoints et les crochets de Poisson. Cela permet aussi d'introduire naturellement l'équation de Lax qui conduit à des déformations isospectrales.

On développera aussi un peu la géométrie des trajectoires périodiques qui sont l'analogue classique des fonctions propres de l'équation de Schrödinger.

Les références principales sont Duistermaat [Dui96], Arnold [Arn78], Weinstein [Wei77]. Pour les formules de géométrie différentielle, consulter par exemple [God69].

Les démonstrations bien localisées dans la littérature ne seront pas toutes données.

2. Algèbre linéaire symplectique

Pour toute cette section, une bonne référence est [Wei77].

2.1. Algèbre linéaire symplectique.

LEMME 1. *Soit ω une forme bilinéaire antisymétrique sur un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps de caractéristique différente de 2. Il existe une base de E , $(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n, g_1, \dots, g_k)$, telle que $\omega = \sum_{i=1}^n f_i^* \wedge e_i^*$ où e_i^*, \dots est la base duale de la précédente.*

Preuve. –

Si $\omega \neq 0$, il existe un couple (e_1, f_1) tel que $\omega(e_1, f_1) = 1$; on itère ce raisonnement en prenant l' ω -orthogonal de l'espace engendré par e_1, f_1 . Cela prouve le lemme.

□

DÉFINITION 1. *La forme ω est dite non-dégénérée si l'application*

$$x \rightarrow L_x$$

de E dans son dual E^ définie par*

$$L_x(v) = \omega(x, v)$$

est un isomorphisme.

COROLLAIRE 1. *Si ω est non-dégénérée, la dimension de E est paire et $k = 0$.*

Si ω est une forme bilinéaire antisymétrique sur E , le noyau de ω sera noté $\ker \omega$.

L'orthogonal de $\ker \omega$ dans E^* est le dual de $E/\ker \omega$ sur lequel ω est non dégénérée. Donc $(\ker \omega)^o$ est muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée.

DÉFINITION 2. *Un espace vectoriel symplectique est la donnée d'un couple (E, ω) où E est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbf{R} et ω une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée sur E .*

3 exemples importants :

A) Si F est un espace vectoriel réel de dimension n et F^* son dual, alors la somme directe $E = F \oplus F^*$ est munie de façon canonique d'une structure symplectique :

$$\omega((x, \xi), (x', \xi')) = \xi(x') - \xi'(x) .$$

Si on introduit une base $\frac{\partial}{\partial x_j}$ de F et la base duale $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ de F^* , on a l'expression :

$$\omega_0 = \sum d\xi_j \wedge dx_j ,$$

appelée forme canonique sur \mathbb{R}^{2n} .

B) Si $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ est un espace hilbertien de dimension finie sur \mathbb{C} (espace hermitien), $\omega = \Im(\cdot|\cdot)$ est une forme symplectique sur \mathcal{H} .

C) Si (E, ω) est symplectique, son dual E^* est muni canoniquement d'une structure symplectique transportée de ω par un des 2 isomorphismes linéaires associés à ω :

$$x \rightarrow (u \rightarrow \pm \omega(x, u)) .$$

En fait tous les exemples sont isomorphes (à dimension fixée) :

THÉORÈME 1. *Tout espace symplectique (E, ω) est de dimension paire $2n$ et isomorphe à la paire $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.*

PREUVE. C'est une conséquence du lemme 1 puisque ici on a $k = 0$. □

On peut donner une autre preuve qui consiste à classer à isomorphisme près les paires (q, ω) d'une structure euclidienne et d'une structure symplectique : on suppose que E est muni d'une structure euclidienne donnée par une forme quadratique $q(x) = \langle x|x \rangle$, alors, à ω , est associé un endomorphisme antisymétrique A de E : $\omega(x, y) = \langle Ax|y \rangle$. Il est clair que iA est autoadjointe et les valeurs propres de A sont donc de la forme $\pm i\lambda_j$ avec $\lambda_j > 0$ (car A est non singulière). Soit $E = \oplus E_j$ une décomposition orthogonale de E en espaces de dimension 2 dont les complexifiés sont engendrés par 2 vecteurs propres conjugués. Les E_j sont également ω -orthogonaux. On en déduit l'existence de coordonnées orthonormales (x_j, ξ_j) telles que $\omega = \sum \sqrt{\lambda_j} d\xi_j \wedge dx_j$. On peut facilement en déduire de coordonnées (x_j, ξ_j) telles que $\omega = \sum d\xi_j \wedge dx_j$, et $q(x, \xi) = \sum_j \omega_j (x_j^2 + \xi_j^2)$ ($\omega_j > 0$). Les ω_j sont les invariants du couple (q, ω) .

Un espace symplectique est muni d'une *forme volume canonique* : $\Omega = \frac{1}{n!} \wedge^n \omega$ et donc d'une orientation et d'une mesure de Lebesgue.

Remarque : utilisant la réduction euclidienne précédente, si on calcule $\wedge^n \omega$, on trouve une forme volume que l'on peut comparer à $dx_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n$: le coefficient obtenu est une racine carrée de $\det(A)$, c'est le *pfaffien* de A .

Si F est un sous-espace de dimension k de E , on note F^o l' ω -orthogonal de F sous-espace de E ; F^o est de dimension $2n - k$.

DÉFINITION 3. *Un sous-espace F de (E, ω) est dit symplectique si $F \cap F^\circ = 0$, isotrope si $F \subset F^\circ$, coisotrope si $F^\circ \subset F$, lagrangien si $F = F^\circ$.*

Un sous-espace de dimension 1 est isotrope, un hyperplan est co-isotrope.

THÉORÈME 2. *Tout espace isotrope est contenu dans un espace isotrope maximal qui est lagrangien ; un lagrangien a toujours un lagrangien supplémentaire. Une décomposition $E = F_1 \oplus F_2$ où les F_i sont lagrangiens, permet d'identifier F_2 au dual de F_1 et la forme ω se déduit de cette dualité.*

PREUVE. Soit L un espace isotrope maximal et $v \in L^\circ \setminus L$, alors on vérifie que $L \oplus \mathbb{R}v$ est encore isotrope. On peut par le même argument construire un supplémentaire lagrangien à tout lagrangien.

Si F est isotrope et L lagrangien tel que $F \cap L = 0$, il existe $v \in F^\circ \setminus F$ tel que $(F + v) \cap L = \emptyset$. Sinon, $F^\circ \subset F + L$ et donc $F^\circ \cap L \subset F$, ce qui n'est pas possible pour des raisons de dimension si F n'est pas lagrangien.

On verra plus loin (2.3) que les lagrangiens transversaux à un lagrangien donné forment un ouvert dense de la variété de tous les lagrangiens. \square

2.2. Structure de Poisson linéaire.

DÉFINITION 4. *$(E, \{ \})$ est un espace vectoriel de Poisson si $\{ \}$ est une forme bilinéaire antisymétrique sur E^* .*

Le sous espace $(\ker \{ \})^\circ$ de E est canoniquement un espace symplectique.

2.3. La grassmannienne lagrangienne.

DÉFINITION 5. *La grassmannienne lagrangienne de l'espace symplectique E est l'ensemble $\Lambda(E)$ des sous-espaces lagrangiens de E .*

PROPOSITION 1. *$\Lambda(E)$ est une variété connexe compacte de dimension $n(n+1)/2$. Chaque décomposition de E comme somme de 2 lagrangiens transverses $E = F \oplus F^*$ donne lieu à un homéomorphisme entre l'ouvert des lagrangiens transverses à F^* et l'espace des formes quadratiques sur F . Un espace de dimension n transverse à F^* est le graphe d'une application linéaire de F dans F^* et la condition d'être lagrangien équivaut à la symétrie de cette application linéaire.*

PROPOSITION 2. *L'espace tangent $T_L(\Lambda)$ s'identifie canoniquement à l'espace des formes quadratiques sur L .*

Preuve. –

Soient en effet 2 décompositions lagrangiennes

$$E = L \oplus L_1 = L \oplus L_2$$

et L' proche de L ; on peut écrire L' comme le graphe d'applications linéaires symétriques $A_i : L \rightarrow L_i$ associées à des formes quadratiques sur L

$$Q_i(x) = \frac{1}{2} \omega(A_i x, x) .$$

Soit ϵ la distance (pour une métrique riemannienne quelconque) entre L et L' ; montrons que

$$|Q_1(x) - Q_2(x)| \leq C \epsilon^2 \|x\|^2 .$$

Cela résulte de l'écriture suivante

$$Q_i(x) = \int_{T_i} \omega$$

où T_i est le triangle $O, x + A_i x, x$.

Maintenant la différence des 2 intégrales satisfait visiblement l'inégalité cherchée. En effet, par Stokes, l'intégrale de ω sur le bord du tétraèdre de sommets $(0, x, x + A_1 x, x + A_2 x)$ est nulle. Comme $0, x + A_1 x, x + A_2 x$ sont dans un même lagrangien, l'intégrale de ω sur ce triangle est nulle. Si Δ est le triangle de sommets $(x, x + A_1 x, x + A_2 x)$, on a ainsi

$$Q_1(x) - Q_2(x) = \int_{\Delta} \omega$$

et cette intégrale est $O(\varepsilon^2)$.

□

PROPOSITION 3. *Si L_t est un chemin dans la grassmannienne lagrangienne, on notera dL_t/dt le vecteur vitesse de L_t vu comme forme quadratique sur L_t . Si $V(t) \in L_t$, on a l'expression utile suivante :*

$$(dL_t/dt)(V(t_0)) = \omega(V'(t_0), V(t_0)) .$$

Preuve.—

On déduit facilement de $\omega(V(t), W(t)) = 0$ que l'expression précédente ne dépend pas du chemin $V(t)$, mais seulement de $V(t_0)$. On se ramène ainsi à $V(t) = V(t_0) + A_t(V_0)$.

□

2.4. La stratification naturelle de $\Lambda(F \oplus F^*)$.

PROPOSITION 4. *Soit $W_l \subset \Lambda(F \oplus F^*)$ l'ensemble des lagrangiens L tels que*

$$\dim(L \cap F) = l .$$

Alors W_l est une sous-variété de codimension

$$\frac{l(l+1)}{2}$$

de $\Lambda(F \oplus F^)$.*

Preuve.—

Soit $L_o \in W_l$, On peut toujours supposer que F^* est transversal à L_o . Soit $G = L_o \cap F$ supposé de dimension l . L_o est le graphe d'une application linéaire A de F dans F^* de rang $n - l$ dont la matrice est, dans une base adaptée :

$$A_o = \begin{pmatrix} B_o & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si L est proche de L_o , c'est le graphe de A dont la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ {}^t C & D \end{pmatrix}$$

Pour L proche de L_o , B est inversible, et donc A est de rang $n - l$ si et seulement si le noyau de A s'identifie aux (x, y) tels que

$Bx + Cy = 0$; donc $x = -B^{-1}CY$ implique ${}^tCx + Dy = 0$. Donc cela équivaut à :

$$D = -{}^tCB^{-1}C .$$

C'est une équation locale de W_l .

L'espace tangent en L_0 s'identifie à $D = 0$.

□

On voit dans la preuve précédente que l'espace tangent en L_o à W_l s'identifie à $D = 0$; donc, si $L \cap F = G$, l'espace tangent en L à W_l est formé des formes quadratiques sur L dont la restriction à G est nulle. On voit en particulier que W_1 est transversalement orienté par la condition $q(Z \setminus 0) > 0$ (Z est alors de dimension 1).

2.5. Espaces lagrangiens et formes quadratiques avec domaine. Soit $Q = (q, G)$ où G est un sous-espace de F et q une forme quadratique sur G . À une telle donnée Q (forme quadratique non partout définie), on associe naturellement un espace lagrangien L_Q de $E = F \oplus F^*$: si q définit une application linéaire symétrique A de G dans G' , on définit

$$L_Q = \{(x, \xi) | x \in G, \xi|_G = Ax\} .$$

On vérifie que cette application est une bijection de l'ensemble des formes quadratiques avec domaine sur la grassmannienne lagrangienne. Bien sûr, cela définit une stratification de cette variété dont les strates sont les formes quadratiques dont le domaine a la même dimension. Cette stratification est isomorphe à celle décrite en 2.4. On passe de l'une à l'autre par permutation de F et F^* .

2.6. Réduction. Si W est coisotrope, $E_W = W/W^o$ est symplectique. Si F est un lagrangien de E , $R_W(F) = (F \cap W)/F \cap W^o$ est un lagrangien de E_W . On peut vérifier ce dernier point directement (voir [MS95] page 39)) en montrant que

$$((F \cap W) + W^o)^o = (F \cap W) + W^o ,$$

ou le faire par récurrence en supposant d'abord W de codimension 1. Le réduit de F est isotrope et sa dimension est $\dim(F) - 1$; la chute de dimension étant soit lors de l'intersection avec F , soit lors du passage au quotient.

Attention : l'application $L \rightarrow R_W(L)$ n'est pas continue ; elle l'est sur les strates $\dim(L \cap W) = cte$.

2.7. Réponse d'un réseau électrique. Un exemple intéressant est la réponse d'un *réseau résistif linéaire* :

Un réseau électrique (Γ, ρ) est la donnée

1) d'un graphe fini $\Gamma = (V, V_o, A)$, le *réseau*, dont V est l'ensemble des sommets, $V_o \subset V$ l'ensemble des sommets *terminaux* ou *bornes* et A l'ensemble des arêtes. Γ n'est pas orienté. N désignera le cardinal de V_o et on supposera que l'on a indexé les sommets de V_o par les entiers de 1 à N .

2) d'une famille de *conductances* (en électricité les conductances sont les inverses des résistances) $\rho = (\rho_{i,j}) \in]0, +\infty[^A$. On a toujours $\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$.

On note

$P = \mathbb{R}^V$, resp $P = \mathbb{R}^{V_o}$, les espaces de potentiels, I , resp I_o , leurs duals (espaces de courants) ainsi que $E = P \oplus I$, resp $E_o = P_o \oplus I_o$ les espaces symplectiques associés.

On associe à ρ la forme quadratique *énergie électrique*

$$q_\rho(x) = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in A} \rho_{i,j} (x_i - x_j)^2$$

sur \mathbb{R}^V . On introduit aussi le sous-espace lagrangien R de E associé à q_ρ .

Un réseau électrique (Γ, ρ) étant donné, on considère l'application linéaire (*réponse du réseau*)

$$L = L_{\Gamma, \rho} : \mathbb{R}^{V_o} \rightarrow \mathbb{R}^{V_o}$$

qui, à tout potentiel électrique $x = (x_i)$ donné sur les bornes, associe le courant électrique $I = (I_i)$ sortant par les bornes lorsque le régime stationnaire est établi dans le circuit.

Alors le graphe de L_ρ contenu dans E_o est la variété lagrangienne obtenue par réduction de R par rapport au sous-espace co-isotrope obtenu en écrivant la loi de Kirchhoff aux sommets intérieurs.

En particulier, on voit comment étendre la notion de réponse d'un réseau électrique au cas où les conductances sont des réels arbitraires.

2.8. Structures symplectiques et structures hermitiennes. Soit E un espace vectoriel complexe munie d'une structure hermitienne $(u|v)$ (linéaire en u , antilinéaire en v). On décompose

$$(u|v) = \langle u|v \rangle + i\omega(u, v)$$

$\langle u|v \rangle$ (resp. $\omega(u, v)$) est une structure euclidienne (resp. symplectique) sur E vu comme espace vectoriel réel. On a, si $J : E \rightarrow E$ est la multiplication par i :

$$\omega(Ju, v) = \langle u|v \rangle, \quad \omega(u, v) = \langle -Ju|v \rangle, \quad \omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$$

Donc $-J$ est la matrice de la forme ω , J préserve la structure symplectique. De plus si A est unitaire, A préserve $(\cdot|\cdot)$ et donc ω .

DÉFINITION 6. Soit J une structure complexe sur un espace vectoriel symplectique (E, ω) , on dit que J est compatible avec ω si J préserve ω et si $\omega(Ju, v)$ est définie positive.

Dans ce cas, $(u|v) = \omega(Ju, v) + i\omega(u, v)$ est un produit hermitien sur E muni de la structure complexe définie par J .

On peut caractériser alors ainsi les espaces lagrangiens :

PROPOSITION 5. Si (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E pour la structure hermitienne, le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par les e_j est lagrangien.

Réciproquement, si (e_1, \dots, e_n) est une \mathbb{R} -base orthonormée de L lagrangien pour le produit $\langle \cdot | \cdot \rangle$, c'est aussi une base orthonormée de E pour la structure hermitienne.

Certains auteurs emploient ainsi le terme *totalement réel* pour désigner les espaces lagrangiens. On déduit de ce qui précède que le groupe unitaire $U(n)$ opère transitivement sur la grassmannienne lagrangienne.

De la proposition 5, on déduit que $U(n)$, le groupe unitaire opère transitivement sur $\Lambda(n)$ qui s'identifie donc au quotient $U(n)/O(n)$.

2.9. Indice de Maslov et π_1 de la grassmannienne lagrangienne.

2.9.1. *L'application \det^2 .* Soit $L_0 = \mathbb{R}^n \oplus 0$, si $L = U(L_0)$ avec $U \in U(n)$, U est bien définie modulo multiplication à droite par un élément de $O(n)$ de déterminant ± 1 . On définit ainsi une application $\det^2 : \Lambda(n) \rightarrow S^1$ par

$$\det^2(U(L_0)) = \text{determinant}(U)^2.$$

DÉFINITION 7. *L'indice de Maslov $m(\gamma)$ de $\gamma : S^1 \rightarrow \Lambda(n)$ est le degré de $\det^2 \circ \gamma$.*

On vérifie que $m(\gamma)$ est invariant par déformation de γ , ne dépend pas de L_0 , ni même de l'isomorphisme de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ avec (E, ω) (connexité du groupe symplectique). L'application m induit pour chaque $L_1 \in \Lambda(n)$ un homomorphisme de $\pi_1(\Lambda(n), L_1)$ dans \mathbb{Z} . Cet homomorphisme est surjectif comme on le voit avec le lacet $L_t = U_t(L_0)$ avec $U_t = \text{diag}(e^{it}, 1, \dots, 1)$ pour $t \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

2.9.2. *L'intersection avec le cycle singulier.* Comme la codimension des W_j pour $j \geq 2$ est supérieure à 3, le π_1 de $\Lambda(n)$ est égal au π_1 de $\Lambda(n) \setminus (\cup_{j=2}^n W_j)$.

Montrons que W_1 est une hypersurface co-orientée de $\Lambda(n)$: soit $D = L_0 \cap L_1$ qui est de dimension 1. Si $L_1 \in W_1$, $T_{L_1}(\Lambda(n)) = Q(L_1)$ et $T_{L_1}W_1 = \{q \in Q(L_1) \mid q(D) = 0\}$. L'espace normal en L_1 à W_1 s'identifie donc à l'espace de dimension 1 $Q(D)$ qui est orienté par le choix des formes quadratiques positives.

Soit L_t un chemin différentiable d'espaces lagrangiens. La vitesse en L_1 s'identifie à une forme quadratique \dot{L} sur L_1 . Soit l la restriction de \dot{L} à D . Alors

PROPOSITION 6. *L_t est transverse à W_1 si et seulement si l est non dégénérée.*

DÉFINITION 8. *On co-orient W_1 en disant que L_t le traverse positivement si l est définie positive.*

THÉORÈME 3. *L'application qui, à un lacet γ , associe le nombre d'intersection $\gamma.W_1$ de γ avec W_1 induit un isomorphisme de $\pi_1(\Lambda(n))$ sur \mathbb{Z} . On a :*

$$\gamma.W_1 = m(\gamma)$$

Le théorème précédent vient d'un résultat de nature plus générale :

LEMME 2. *Si $Z \subset X$ est une hypersurface connexe co-orientée dont le complémentaire est simplement connexe, le π_1 de X est \mathbb{Z} , un isomorphisme étant donnée par le nombre d'intersection avec Z .*

Preuve.—

On doit prouver que le nombre d'intersection est bien défini. Il s'agit d'un résultat classique de topologie différentielle : si 2 lacets C^1 sont transverses à Z et homotopes, leur nombre algébrique d'intersection avec Z est bien défini. On peut par exemple utiliser que Z admet un voisinage difféomorphe à $Z \times [-1, +1]$ où Z s'identifie à $Z \times \{0\}$ et tel que les 2 lacets traversent ce voisinage un nombre fini de fois avec monotonie de la coordonnée transverse. On introduit alors la 1-forme fermée α à support dans ce voisinage définie par $\alpha = f'(t)dt$ avec $f = 0$ au voisinage de -1 et $f = 1$ au voisinage de $+1$. $\gamma.Z$ est alors égal à $\int_\gamma \alpha$ qui est invariant par homotopie. La classe de cohomologie de de Rham de α est duale de la classe d'homologie cherchée.

□

Il faut montrer que W_1 est connexe : on commence par montrer que le groupe des transformations linéaires symplectiques qui préserve un lagrangien donné F est connexe et transitif sur les droites de F . Ensuite les lagrangiens L tels que $L \cap F = D$ s'identifient aux lagrangiens de D°/D transverses à F/D qui est un espace contractible.

2.10. La grassmannienne lagrangienne en dimension 2. $\Lambda(1)$ est la droite projective réelle. Etudions $\Lambda(2)$. L'application \det^2 définit une fibration de $\Lambda(2)$ sur S^1 . La fibre est $SU(2)/SO(2)$ et comme tous les tores maximaux S^1 de $SU(2)$ sont conjugués, on voit que c'est S^2 (fibration de Hopf). L'identification des fibres voisines peut se faire par l'action de $U_t = \text{diag}(e^{it}, e^{it})$ avec $t \in [0, \pi/2]$. On voit ainsi que la fibre au-dessus de $\pi/2$ est transformée par la multiplication par i qui transforme chaque lagrangien en son orthogonal euclidien. Soit σ cette involution de S^2 . Elle est sans point fixe et le quotient est donc une surface qui ne peut être que $P^2(\mathbb{R})$ (caractéristique d'Euler = 1). Donc σ est l'antipodie et le fibré n'est pas trivial. On voit ainsi que $\Lambda(2)$ n'est pas orientable.

2.11. La dimension infinie. Il est parfois utile de considérer des espaces symplectiques de dimension infinie. On considère un couple (E, ω) où E est un Banach et ω est non dégénérée au sens suivant : elle définit un homéomorphisme de E sur son dual topologique.

Les exemples sont les espaces de Hilbert munis de la partie imaginaire du produit hermitien, et les modèles canoniques $F \oplus F^*$ où le Banach F^* est le dual topologique de F .

Si $F = F^*$ (espace hilbertien réel), un opérateur (A, D) non borné de F dans F est *symétrique* ssi son graphe est isotrope et auto-adjoint ssi son graphe est lagrangien (le théorème 2 s'applique encore). Pour les définitions de *symétrique* et *auto-adjoint*, voir [RS80] et 2.

Un exemple plus concret est l'espace des fonctions $H^{1/2}$ de période 1 et de moyenne nulle de \mathbf{R} dans \mathbf{R} muni de $\omega(f, g) = \int_0^1 fg'$. Cette structure joue un rôle dans l'interprétation de KdV comme système hamiltonien.

2.12. Applications linéaires symplectiques. Si (E, ω) est un espace vectoriel symplectique et A un endomorphisme de E , on dit que A est symplectique si $A^*\omega = \omega$. Un tel endomorphisme est évidemment inversible et même de déterminant 1.

Si $K : E \rightarrow E^*$ est l'application antisymétrique associée à ω , i.e. $\omega(u, v) = Ku(v)$, on a

$${}^tAKA = K$$

qui montre que A est conjuguée à l'inverse de tA . Donc, si λ est valeur propre de A , $1/\lambda$ aussi et les blocs de Jordan sont isomorphes.

En fait, si E_λ est l'espace propre généralisé associé à λ , E_λ et E_μ sont ω -orthogonaux sauf si $\lambda\mu = 1$. Donc on note F_λ la somme de E_λ , de $E_{1/\lambda}$ et de leurs complexes conjugués, on a une décomposition ω -orthogonale de E en les sous-espaces symplectiques F_λ . Parmi ceux-ci il y a E_1 et E_{-1} si 1 ou -1 est valeur propre.

Il est aisé de montrer que, si $Ax = \lambda x$ et $Ay = \mu y$, alors $(\lambda\mu - 1)\omega(x, y) = 0$, et on raisonne par récurrence pour les vecteurs propres généralisés.

Dans le cas semi-simple, E se décompose somme

- de sous-espaces symplectiques $E_{\pm 1}$,
- de sous-espaces symplectiques de dimension 2 (dits elliptiques) correspondant aux valeurs propres de module 1 ($\neq \pm 1$) regroupées avec leurs inverses=conjuguées,
- de sous-espaces symplectiques de dimension 2 (dits hyperboliques réels) correspondant aux valeurs propres réelles ($\neq \pm 1$) regroupées avec leurs inverses,
- de sous-espaces symplectiques de dimension 4 (dits loxodromiques) correspondant aux valeurs propres non réelles de module $\neq 1$ regroupées avec leurs inverses et leurs conjuguées.

DÉFINITION 9. *A sera dite*

Hyperbolique si aucune valeur propre n'est de module 1,

Elliptique si elle est semi-simple et les valeurs propres sont de module 1 et non égales à ± 1 ,

Elliptique générique si les valeurs propres sont de la forme $e^{\pm i\alpha_k}$, $k = 1, \dots, n$ où les α_k et 2π sont linéairement indépendants sur \mathbb{Z} .

Dans le cas hyperbolique, on a une décomposition *lagrangienne*

$$E = E_+ \oplus E_-$$

où E_{\pm} sont les sommes d'espaces propres généralisés associées respectivement aux valeurs propres de module > 1 ou < 1 . E_+ s'appelle l'espace *instable* et E_- l'espace *stable*.

Le fait que les sous-espaces E_{\pm} soient isotropes résulte du fait que, si $x \in E_{\pm}$, $A^l x \rightarrow 0$ lorsque $l \rightarrow \pm\infty$.

On alors 2 isotropes supplémentaires ; ils sont automatiquement lagrangiens.

Il peut être instructif de décrire toutes les classes de conjugaison (mêmes non semi-simples) pour des espaces symplectiques de dimension 2 et 4. A ce sujet, il faut remarquer que les formes de Jordan pour un bloc de dimension 2, de type E_1 par exemple, donnent 2 classes de conjugaison distinctes suivant le signe du terme non diagonal.

2.13. Le groupe symplectique et son algèbre de Lie. On peut identifier l'algèbre de Lie $Sp(E, \omega)$ du groupe $Sp(E, \omega)$ à l'espace des formes quadratiques sur E de deux façons qui coïncident (exercice) :

1) Si e^{tA} est un groupe à un paramètre de $Sp(E, \omega)$, on vérifie que

$$\omega(x, Ay) = \omega(y, Ax)$$

et réciproquement, si A vérifie la relation précédente e^{tA} est contenu dans $Sp(E, \omega)$. Si on introduit la forme quadratique $q(x) = \frac{1}{2}\omega(x, Ax)$ associé à la forme bilinéaire symétrique $\omega(x, Ay)$, on voit que $\iota(Ax)\omega(\cdot) = -dq(x)(\cdot)$, autrement dit le champ Ax est le champ hamiltonien engendré par la fonction $q(x)$.

A une forme quadratique $q(z)$, on associe son gradient symplectique \mathcal{X}_q caractérisé par $\iota(\mathcal{X}_q)\omega = -dq$. Alors le flot de \mathcal{X}_q est un sous-groupe à un paramètre de $Sp(E, \omega)$. Que la réciproque soit vraie vient de la formule de Cartan : si le flot de \mathcal{X} préserve ω , on voit que la dérivée de Lie $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}\omega$ est nulle et donc $\iota(\mathcal{X})\omega$ est la différentielle d'une forme quadratique.

2) Soit $Z = E \oplus E$ muni de la forme $\Omega = p_2^*(\omega) - p_1^*(\omega)$, c'est un espace symplectique et le graphe d'une application linéaire A de E dans E est lagrangien si et seulement si et seulement si A est symplectique. Donc l'algèbre de Lie de

$Sp(E, \omega)$ s'identifie aux formes quadratiques sur la diagonale de Z et donc aux formes quadratiques sur E .

2.14. Non-pincement affine. Une application symplectique préserve le volume, mais il y a un phénomène purement 2-dimensionnel qui a été montré par Gromov ; donnons-en une version affine (voir [MS95]) :

PROPOSITION 7. *Soit ψ une application affine symplectique de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ dans lui-même qui envoie la boule unité dans un cylindre $x_1^2 + \xi_1^2 \leq R^2$, alors $R \geq 1$.*

PREUVE. Soit $\psi(z) = \Psi z + z_0$, où Ψ est linéaire et $z_0 = (a_1, b_1, \dots)$. Soit u, v les 2 premières lignes de Ψ , on a, pour $z \in \mathbb{R}^{2n}$, $\psi(z) = (x_1, \xi_1, x', \xi')$ où

$$x_1^2 + \xi_1^2 = (u(z) + a_1)^2 + (v(z) + b_1)^2.$$

Comme Ψ est symplectique, sa transposée l'est aussi et donc $\omega(u, v) = 1$ et donc $\|u\|$ ou $\|v\|$ est ≥ 1 . Supposons $\|u\| \geq 1$, on aura

$$\sup_{\|z\| \leq 1} (u(z) + a_1)^2 \geq 1$$

et donc $R \geq 1$. □

3. Variétés symplectiques

3.1. Définition.

DÉFINITION 10. *Une variété symplectique est la donnée d'une variété C^∞ Z et d'une 2-forme différentielle ω fermée, i.e. $d\omega = 0$, et non dégénérée.*

Donc chaque espace tangent est muni d'une structure symplectique et ces formes vérifient une condition de cohérence locale : la structure symplectique permet d'attribuer une *aire algébrique* à toute surface orientée de dimension 2 de façon que le bord d'un domaine de dimension 3 soit d'aire nulle.

La donnée de ω munit Z d'une forme volume $\frac{1}{n!} \wedge^n \omega$ non dégénérée et d'une orientation, donc d'une mesure appelée *mesure de Liouville*.

3.2. Exemples.

3.2.1. *Cotangents.* Soit X une variété de dimension n ; un élément du fibré cotangent T^*X est une forme linéaire sur un des espaces tangents $T_x X$. On munit T^*X d'une structure de variété au moyen des cartes dites *canoniques* : une carte canonique est associée à une carte de X . Si $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ est une carte de X , on définit la carte canonique associée $\Phi : T^*U \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$ de la façon suivante : un vecteur cotangent au point x de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) est de la forme $\sum \xi_j dx_j$, on prend comme coordonnées locales canoniques $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$. Les changements de cartes s'explicitent facilement ; si $y = f(x)$ est le changement de coordonnées dans X , on a $f^*(\sum \xi_j dx_j) = \sum \eta_j dy_j$ avec $\eta_j = \sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$.

Le cotangent d'une variété est muni d'une 2-forme canonique qui, en coordonnées locales canoniques (x_j, ξ_j) , vaut $\sum d\xi_j \wedge dx_j$. On peut définir cette forme de façon plus intrinsèque par $\omega = d\alpha$, où α , la *1-forme de Liouville*, est définie géométriquement par $\alpha_z(V) = z(\pi'(V))$, où z est un point du cotangent, π la projection canonique de $T^*(X)$ sur X , π' sa dérivée. En coordonnées locales canoniques, $\alpha = \sum \xi_i dx_i$.

Pour résumer, le fibré cotangent T^*X d'une variété X est muni automatiquement d'une structure symplectique ω dont l'expression dans les cartes canoniques est $\omega = \sum_i d\xi_i \wedge dx_i$.

3.2.2. *Le théorème de Darboux.* Le théorème de Darboux assure que toute variété symplectique est localement difféomorphe à ce modèle. En géométrie symplectique, il n'y a pas d'analogue de la courbure en géométrie riemannienne, la géométrie symplectique est une géométrie "globale".

THÉORÈME 4. *Soient ω_0 et ω_1 2 germes de structures symplectiques à l'origine O de E qui coïncident en O . Alors il existe un germe de difféomorphisme φ tel que*

$$\varphi^* \omega_1 = \omega_0 .$$

PREUVE. Une preuve utilise la méthode du *chemin* de Moser. On cherche une famille de germes de difféomorphismes φ_t tels que $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$ où $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$. On cherche $X_t(\varphi_t(x)) = \frac{d}{dt} \varphi_t(x)$; il doit satisfaire :

$$\varphi_t^* (\mathcal{L}_{X_t} \omega_t + \frac{d}{dt} \omega_t) = 0 .$$

Par la formule de Cartan, il suffit d'avoir :

$$\iota(X_t) \omega_t + \alpha_t = 0 ,$$

avec $d\alpha_t = \frac{d}{dt} \omega_t$. Comme on peut choisir α_t nulle en 0, le champ X_t est nul en 0 et donc s'intègre en un germe de difféo pour $0 \leq t \leq 1$. □

L'avantage de cette preuve, trouvée par A. Weinstein, est qu'elle permet de montrer des énoncés plus généraux ; par exemple des énoncés de forme normale le long d'une sous-variété. On montre aussi de la même façon que si 2 structures symplectiques sur une variété compacte sont homotopes dans les structures symplectiques par une homotopie qui est dans une classe de cohomologie fixe, elles sont conjuguées par un difféomorphisme global.

Une autre preuve, plus élémentaire, a l'avantage de marcher aussi pour les structures de Poisson (voir [Wei83] et aussi la section 5.2).

3.2.3. *Surfaces.* Sur une surface une forme symplectique est une forme volume. Toute surface orientable admet donc autant de structures symplectiques que de formes volumes. D'après Moser [Mos5], 2 structures symplectiques sur une surface sont équivalentes si elles ont même aire totale.

3.2.4. *Variétés kählériennes.* Une variété kählérienne est une variété holomorphe munie d'une métrique hermitienne dont la partie imaginaire est une 2-forme fermée. Une telle variété est donc munie d'une structure symplectique. Il est clair que les sous-variétés holomorphes d'une variété kählérienne le sont encore.

3.2.5. *Les projectifs complexes $P^N(\mathbb{C})$.* Il y a beaucoup de façons de munir $P^N(\mathbb{C})$ d'une structure symplectique.

Le plus simple est de partir de l'unique (à scalaire près) métrique hermitienne invariante par le groupe unitaire $U(N+1)$. Sa partie imaginaire est une 2-forme non dégénérée ω . Soit $z_0 \in P^N(\mathbb{C})$ et A un élément du groupe d'isotropie de z_0 dont la différentielle en z_0 est B (qui s'identifie facilement à $U(N)$ opérant sur \mathbb{C}^N). Alors $d\omega(Bx, By, Bz) = d\omega(x, y, z)$ où $x, y, z \in T_{z_0}(P^N(\mathbb{C}))$. De plus il est facile de vérifier que, si on prend $z_0 = [1, 0, \dots, 0]$, on peut prendre $Bx = -x$ différentielle de $A[x_0, \dots, x_N] = [x_0, -x_1, \dots, -x_N]$.

Les sous-variétés algébriques de $P^N(\mathbb{C})$ sont donc aussi symplectiques par restriction de la métrique hermitienne.

On peut aussi obtenir cette structure par réduction (voir 3.3) d'une couche d'énergie de l'oscillateur harmonique standard.

3.2.6. *Orbites co-adjointes.* Soit G un groupe de Lie, le dual de son algèbre de Lie \mathcal{G}^* est muni d'une structure de Poisson canonique. Le groupe G opère sur \mathcal{G}^* par la transposée inverse de l'application adjointe (représentation co-adjointe). Les orbites de cette action sont symplectiques pour le crochet de Poisson précédent, en particulier, elles sont de dimension paires (voir [Kir74]). Par exemple, pour les groupe linéaire, les orbites s'identifient aux classes de conjugaison des matrices.

3.3. La réduction symplectique. C'est une opération très utile qui a en particulier l'effet de changer la dimension de la variété symplectique. On considère une sous-variété coisotrope W de (Z, ω) . C'est une sous-variété dont l'espace tangent en tout point z est un sous-espace coisotrope de $T_z Z$. Une formulation équivalente est de dire que si f et g sont nulles sur W , leur crochet de Poisson (voir 5) l'est aussi :

en effet, la définition de \mathcal{X}_f montre que si f est nulle sur W , \mathcal{X}_f est orthogonal à W . Donc si g s'annule sur W co-isotrope, $dg(\mathcal{X}_f) = 0$.

Réciproquement, en utilisant des équations locales $f_1 = \dots = f_k = 0$ de W en involution, on voit que W est coisotrope car son orthogonal est engendré par les \mathcal{X}_{f_i} .

En particulier, W est localement définie comme l'ensemble des zéros de $k = \text{codim} Z$ fonctions en involutions. Les hypersurfaces sont toujours co-isotropes.

Les gradients symplectiques de fonctions nulles sur W définissent alors des champs de vecteurs contenus dans l'orthogonal de TW et qui commutent.

Ainsi la distribution des TW° est intégrable (le critère de Frobenius s'applique) et définit donc un feuilletage de W . De plus, ω est invariante le long de ces feuilles (ie la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X(\omega)$ est nulle pour tout champ tangent au feuilletage) et nulle sur TW° , et donc le quotient (local en général) de W par ce feuilletage est symplectique.

Exemple : $Z = T^*(X \times Y)$, et W est le fibré normal de la fibration canonique $p : X \times Y \rightarrow X$, alors les feuilles sont les fibres de la projection sur T^*X et le quotient est T^*X .

L'exemple le plus important (voir 4.4) est l'espace des trajectoires d'un système hamiltonien contenues dans une couche d'énergie, obtenu comme réduction de l'hypersurface $\{H = E\}$.

Si on prend sur \mathbb{C}^n l'hamiltonien $H = \frac{1}{2} \sum |z_i|^2$ les trajectoires sont toutes périodiques de période 2π et les variétés de trajectoires dans $\{H = E\}$ sont toutes difféomorphes à $P^n(\mathbb{C})$ (une trajectoire est l'intersection de la sphère $\{H = E\}$ avec une droite projective) : ce sont les structures symplectiques standards ω_E sur $P^n(\mathbb{C})$. La fibration obtenue ainsi

$$\{H = E\} \rightarrow P^n(\mathbb{C})$$

est la fibration de Hopf.

4. Systèmes hamiltoniens

4.1. Formalisme lagrangien.

DÉFINITION 11. Un lagrangien $L = L(x, v)$ est une fonction lisse de $T(X)$ dans \mathbb{R} . L'action d'une courbe $\gamma : [O, T] \rightarrow X$ est $\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^T L(x, dx/dt) dt$

DÉFINITION 12. Une extrémale de L est une courbe $\gamma : I \rightarrow X$ où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , telle que pour toute variation γ_u de γ telle que γ_u et γ coïncident en dehors d'un compact $[a, b]$ de I , on ait

$$\frac{d}{du} \Big|_{u=0} \mathcal{L}(\gamma_u) = 0$$

où l'action est calculée sur l'intervalle $[a, b]$.

Le principe de moindre action affirme que les trajectoires classiques du système considéré sont exactement les extrémales de \mathcal{L} .

THÉORÈME 5. Une courbe $t \rightarrow \gamma(t)$ est une extrémale de L si et seulement si elle satisfait les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i}(x, x') \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}(x, x')$$

Les lagrangiens que l'on considère en pratique sont de la forme :

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \sum g_{i,j}(x) v_i v_j + \sum a_i(x) v_i - V(x) ,$$

(on appellera *standard* tout lagrangien de ce type), où $g_{i,j}$ est une métrique riemannienne (énergie cinétique), $\sum a_i dx_i$ le potentiel magnétique et V le potentiel électrique.

On a la formule :

$$(1) \quad \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}(\gamma + \varepsilon \delta \gamma) \Big|_{\varepsilon=0} = \sum_i \left(\int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) \delta x_i \right) dt + \left[\frac{\partial L}{\partial v_i} \delta x_i \right]_0^T \right) .$$

En utilisant la transformation de Legendre (cf. section 4.2) l'expression entre crochets se réécrit :

$$[\xi \delta x]_0^T .$$

4.2. Transformation de Legendre et formalisme hamiltonien. Soit T un espace vectoriel réel et $P : T \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, on définit la transformée de Legendre $\hat{P} : T^* \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\hat{P}(\xi) = \sup_{x \in T} (\xi(x) - P(x)) \leq +\infty .$$

Si P est strictement convexe et C^2 , le sup est atteint en l'unique point tel que $P'(x) = \xi$ (l'application $x \rightarrow P'(x)$, appelée transformation de Legendre, est alors un difféomorphisme de T sur un ouvert de T^*).

En fait, la convexité n'est pas nécessaire ; la propriété importante est que les variétés lagrangiennes associées aux graphes de dP et de $d\hat{P}$ coïncident. La transformée de Legendre nécessite alors uniquement une condition de normalisation donnée par

$$P(x) + \hat{P}(\xi) = x\xi$$

pour tout (x, ξ) de cette variété lagrangienne.

Dans la pratique, P sera un polynôme du second degré dont la partie de degré 2 est une forme quadratique non dégénérée et l'application \hat{P} sera encore un polynôme du second degré sur T' .

EXEMPLE 4.1. Si $P = 1/2 \sum g_{i,j} v_i v_j + \sum a_i v_i - V$, alors dans la base duale, on a

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \sum g^{i,j} (\xi_i - a_i)(\xi_j - a_j) + V .$$

Maintenant, si X est une variété et L un lagrangien strictement convexe par rapport aux v_i , on note H la transformée de Legendre de L par rapport aux v_i : H est une fonction sur le cotangent $T^*(X)$. Les équations d'Euler-Lagrange prennent alors une forme très agréable :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \quad \frac{d\xi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

et prennent le nom d'*équations canoniques*.

En effet, de $dH = \xi dv + v d\xi - d_x L dv$ et de la définition de ξ , on tire

$$dH = v d\xi - d_x L dx$$

et donc

$$v_i = \partial_{\xi_i} H, \quad \partial_{x_i} H = -\partial_{x_i} L .$$

On peut réécrire ces équations sous la forme dite *canonique* :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \quad \frac{d\xi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} .$$

On remarque alors que ces équations sont déterminées à partir de H et de ω par la relation :

$$(2) \quad \frac{dz}{dt} = \mathcal{X}_H, \quad \iota(\mathcal{X}_H)\omega = -dH .$$

\mathcal{X}_H est au signe près le *gradient* de H relativement à ω .

En particulier, on peut maintenant sans effort faire des changements de variables dans $T^*(X)$ qui mélangent les x_i et les ξ_i . Une telle transformation qui préserve ω sera aussi dite *canonique*.

4.3. Conservation de H et de ω par le flot hamiltonien. On peut même oublier L et considérer des fonctions H arbitraires sur une variété symplectique arbitraire. H est interprétée comme l'énergie totale.

On a le :

- THÉORÈME 6. • H est constante sur les trajectoires de \mathcal{X}_H
- Le flot de \mathcal{X}_H préserve ω .
 - Le flot conserve la mesure de Liouville $|dL| = \frac{1}{n!} |\wedge^n \omega|$.
 - Le flot conserve la mesure micro-canonique $|dL/dH|$ sur les couches d'énergie Σ_E .

Preuve. –

- On a $dH(\mathcal{X}_H) = -\omega(\mathcal{X}_H, \mathcal{X}_H) = 0$.
- La dérivée de Lie

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}_H} \omega = d(\iota(\mathcal{X}_H)\omega) + \iota(\mathcal{X}_H)d\omega$$

est nulle comme valant $-ddH + \iota(\mathcal{X}_H)0$.

- Les 2 derniers points sont des conséquences évidentes de ce qui précède.

□

Un exemple instructif est de reprendre pour Z un espace hermitien complexe et pour H une forme hermitienne $H(z) = \frac{1}{2} \langle Az | z \rangle$. On vérifie sans peine que l'équation d'évolution associée est l'équation de Schrödinger :

$$\frac{dz}{dt} = -iAz \quad (= -2i \frac{\partial H}{\partial \bar{z}}) .$$

Par la réduction décrite plus haut, on obtient même l'équation de Schrödinger comme un système hamiltonien sur le projectif complexe, dont les points fixes (points critiques de H) sont les vecteurs propres de A .

En particulier, on voit que le groupe des difféomorphismes symplectiques de (Z, ω) est de dimension infinie (contrairement au cas riemannien, où le groupe des isométries est un groupe de Lie de dimension finie).

Une conséquence plaisante est le *théorème de récurrence de Poincaré* : si Σ_E est de volume fini et U un ouvert non vide de Σ_E , alors $\forall T_o$, il existe $t > T_o$ tel que

$$\varphi_t(U) \cap U \neq \emptyset ,$$

où φ_t désigne (et désignera dans la suite) le flot de \mathcal{X}_H .

Il faut remarquer que l'énoncé " $\forall z \in \Sigma_E, \forall T_o, \forall U$ voisinage de z , il existe $t \geq T_o$ tel que $\varphi_t(z) \in U$ " (qui est parfois proposé) est faux : par exemple, z peut être dans la variété instable d'un point singulier hyperbolique de H .

Par contre, l'énoncé : *presque tous les points z de Σ_E sont récurrents* est aussi vrai.

4.4. Les sections de Poincaré. On se donne un système hamiltonien d'hamiltonien H sur (Z, ω) de dimension $2n$. Alors si E est donné, l'espace des trajectoires de \mathcal{X}_H d'énergie E est (localement en général) naturellement une variété symplectique obtenue par réduction à partir de la variété coisotrope $H = E$.

Une manière de paramétrer les trajectoires localement utilise les *sections de Poincaré*. Une section de Poincaré Σ est une sous-variété de dimension $2n - 2$ (pas fermée en général) de la couche d'énergie $\{H = E\}$ qui soit partout transverse au flot \mathcal{X}_H .

Si on considère 2 sections de Poincaré Σ_1 et Σ_2 , on définit une application de Poincaré comme un difféomorphisme P d'un ouvert $U_1 \subset \Sigma_1$ sur un ouvert $U_2 \subset \Sigma_2$ tel que, $\forall z \in U_1$, z et Pz soient sur la même trajectoire du flot hamiltonien. On a alors $Pz = \varphi_{T(z)}(z)$ où $T(z)$ dépend différemment de z .

Si γ est une trajectoire périodique de période T_0 , on peut prendre $\Sigma_1 = \Sigma_2$ un germe de variété transverse à γ en un point z_0 . L'application P obtenue en prenant pour U_i des voisinages de z_0 et $T(z)$ voisin de T_0 est appelée *application de premier retour* de Poincaré. C'est un germe de difféo. symplectique qui ne dépend que de γ .

L'exemple le plus connu est celui des droites d'un espace euclidien (ou plus généralement les géodésiques d'une variété riemannienne) que l'on voit comme les trajectoires d'énergie 1 de l'hamiltonien $\frac{1}{2} \|\xi\|^2$. En particulier, il y a une mesure naturelle sur ces espaces qui est bien connue en géométrie intégrale.

Un autre exemple est celui des hamiltoniens dont toutes les trajectoires d'énergie E sont périodiques de période T (par exemple le problème à 2 corps dans un potentiel Coulombien avec une énergie négative ou le système hamiltonien associé à un champ magnétique constant sur \mathbb{R}^2 euclidien) : la structure symplectique sur

l'ensemble de ces trajectoires périodiques intervient dans la méthode de moyennisation : si on considère un hamiltonien $H_\varepsilon = H + \varepsilon K$, on peut voir le mouvement perturbé comme donnant une dynamique à l'ensemble des trajectoires, l'hamiltonien de cette dynamique étant obtenu par moyennisation de εK sur les trajectoires de H .

4.5. Réduction d'un système hamiltonien. Si f est une intégrale première de \mathcal{X}_H , c'est-à-dire si $\{f, H\} = 0$, on peut réduire Z à partir d'une hypersurface de niveau de f , soit W . H passe au quotient sur Z_W et donne un nouvel hamiltonien dont les trajectoires sont les projections de celles de H contenues dans W .

Par exemple, pour le problème à 2 corps dans le plan, $H = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + V(r)$, et $f = p_\theta$, on obtient

$$h = \frac{1}{2}p^2 + \frac{C}{r^2} + V(r) .$$

La symétrie initiale du système est cachée. Cette construction permet d'interpréter de nombreux systèmes hamiltoniens : géodésiques des ellipsoïdes, réseaux de Toda,... (voir [Per90]).

4.6. Variations infinitésimales. Soit $z(t)$ une courbe intégrale de \mathcal{X}_H . On cherche à calculer la différentielle du flot hamiltonien φ_t au point $z(0)$. La stratégie valable pour tout champ de vecteurs sur une variété consiste à *linéariser* le champ de vecteurs le long de la trajectoire considérée.

On obtient ainsi une équation différentielle linéaire dépendant du temps portant sur les champs de vecteurs $Z(t)$ tangents à Z aux points $z(t)$. On voit facilement que, dans des coordonnées canoniques (x, ξ) avec $Z = (X, Y)$, on a :

$$\begin{aligned} X'(t) &= H_{x,\xi}(z(t))X(t) + H_{\xi,\xi}(z(t))Y(t) \\ Y'(t) &= -H_{x,x}(z(t))X(t) - H_{\xi,x}(z(t))Y(t) \end{aligned}$$

Les champs de vecteurs $X(t)$ le long de la courbe $x(t)$ s'appellent *champs de Jacobi* : ce sont les variations infinitésimales des extrémales du lagrangien. Ils forment un espace vectoriel de dimension $2n$ qui est muni d'une structure symplectique induite par les données de Cauchy en un point quelconque de la trajectoire.

Il est facile de vérifier que si on réécrit l'équation aux variations sous la forme $Z'(t) = A(t)Z(t)$. L'application linéaire $A(t)$ est dans l'algèbre de Lie du groupe symplectique. La différentielle de φ_t en $z(0)$ est l'application linéaire symplectique $Z(0) \rightarrow Z(t)$.

Cas d'un cotangent :

DÉFINITION 13. Si $z(0)$ est contenu dans une variété lagrangienne λ contenue dans une couche d'énergie, si L_0 est l'espace tangent à λ en $z(0)$ et $L_t = d\varphi_t(L_0)$, on appelle points conjugués (ou focaux) les $z(t)$ tels que L_t ne coupe pas transversalement l'espace vertical.

Les points conjugués sont les points d'intersection de la courbe $z(t)$ avec la caustique de λ .

5. Variétés et crochets de Poisson

DÉFINITION 14. Une variété de Poisson $(X, \{ \})$ est une variété munie d'un champ de bi-vecteurs antisymétrique B (section du produit extérieur $TX \wedge TX$)

permettant de définir le crochet de Poisson $\{f, g\} = B(df \otimes dg)$ vérifiant l'identité de Jacobi :

$$(J) \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

Si on définit le champ hamiltonien associé à f par :

$$\mathcal{X}_f g = \{f, g\} ,$$

la relation (J) de Jacobi équivaut à :

$$[\mathcal{X}_f, \mathcal{X}_g] = \mathcal{X}_{\{f, g\}} .$$

Cette relation exprime donc que $f \rightarrow \mathcal{X}_f$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie des fonctions munies du crochet de Poisson dans les champs de vecteurs sur Z .

DÉFINITION 15. *Les Casimir d'une structure de Poisson sont les hamiltoniens f tels que $\mathcal{X}_f = 0$.*

5.1. Cas symplectique.

PROPOSITION 8. *Une variété symplectique est de Poisson par transport de ω sur l'espace tangent. On a :*

$$\{f, g\} = \omega(\mathcal{X}_f, \mathcal{X}_g)$$

Si f, g sont 2 fonctions sur (Z, ω) , leur crochet de Poisson est aussi défini par $\{f, g\} = -df(\mathcal{X}_g) = dg(\mathcal{X}_f)$. En coordonnées canoniques

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} .$$

Preuve. –

On va montrer que la relation de Jacobi est équivalente à $d\omega = 0$.

On part de l'identité générale (voir [God69] p. 90) :

$$d\omega(X, Y, Z) = \sum X\omega(Y, Z) - \sum \omega([X, Y], Z)$$

(où les sommes portent sur les permutations circulaires) que l'on applique avec $X = \mathcal{X}_f, Y = \mathcal{X}_g, Z = \mathcal{X}_h$. $X\omega(Y, Z) = \{f, \{g, h\}\}$ et $\omega([X, Y], Z) = [X, Y]h = Xdh(Y) - Ydh(X) = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\}$. Par sommation on obtient

$$d\omega(X, Y, Z) = - \sum \{f, \{g, h\}\}$$

qui montre que (J) équivaut à $d\omega = 0$. □

Le noyau de l'homomorphisme $f \rightarrow \mathcal{X}_f$ est formé des fonctions constantes et son image localement (et globalement si $H^1(Z) = 0$) l'ensemble des champs hamiltoniens, i.e. ceux qui préservent ω .

Le crochet de Poisson permet de décrire l'évolution des observables : si $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ est une observable et H un hamiltonien de flot φ_t , on a :

$$\frac{d}{dt}(f(\varphi_t(z))) = \{H, f\} \circ \varphi_t(z) .$$

Si on revient à l'exemple de Schrödinger, on obtient :

$$\{H_A, H_B\} = H_{\frac{1}{\hbar}[A, B]} ,$$

où le crochet est celui des opérateurs.

L'évolution des observables quantiques est alors donnée par l'équation de Lax : $\frac{dL}{dt} = -i[L, A]$ (en général, on considère des cas où A dépend de t , mais ici pour simplifier nous n'avons considéré que des hamiltoniens indépendants du temps). On remarque que le flot de Lax est infinitésimalement unitaire et donc isospectral : les valeurs propres de L sont indépendantes de t .

5.2. Variétés de Poisson.

PROPOSITION 9. *Si $(X, \{ \cdot, \cdot \})$ est de Poisson, la distribution $L_{\{ \cdot, \cdot \}}$ donnée par l'orthogonal du noyau est intégrable et les feuilles sont symplectiques.*

Un énoncé plus précis (voir [Wei83]) donne la structure locale des variétés de Poisson :

THÉORÈME 7. *Au voisinage d'un point O d'une variété de Poisson, il existe des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_k, \xi_1, \dots, \xi_k, y_1, \dots, y_l)$ telles que*

$$B = \sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial \xi_j} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{\alpha, \beta=1}^l \varphi_{\alpha, \beta}(y) \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial y_\beta}$$

avec $\varphi_{\alpha, \beta}(0) = 0$.

Preuve. –

Si $B(O) = 0$, c'est fini. Sinon il existe 2 fonctions ξ_1 et x_1 telles que $\{\xi_1, x_1\} = 1$. Leurs champs hamiltoniens commutent et définissent donc un feuilletage de dimension 2. On choisit des coordonnées locales (x_1, ξ_1, z_γ) telles que les z_γ soient constantes sur les feuilles et donc les crochets de Poisson des z_γ avec x_1 et ξ_1 sont nuls. De plus les crochets $\{z_\gamma, z_{\gamma'}\}$ sont indépendants de x_1 et de ξ_1 . On a l'expression voulue avec $k = 1$ et sans la nullité de φ . Puis on recommence.

□

Notons que ce théorème donne l'existence de la feuille symplectique locale.

On remarque de plus que la fonction f prise au début est quelconque pourvu que $\mathcal{X}_f \neq 0$: cela implique dans le cas symplectique que tous les systèmes hamiltoniens non critiques sont localement équivalents.

5.3. Orbites co-adjointes. Le dual de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G est muni canoniquement d'une structure de variété de Poisson : si $z \in \mathcal{G}^*$ et f, g sont des fonctions C^∞ sur \mathcal{G}^* , on pose

$$\{f, g\}(z) = z([df(z), dg(z)])$$

où $df(z)$ est un élément de \mathcal{G} (par bidualité) et le crochet est celui de \mathcal{G} .

On montre (voir [Kir74]) que les feuilles symplectiques sont les orbites de l'action (adjointe) naturelle de G sur \mathcal{G}^* . Pour cela il suffit d'identifier l'espace tangent à ces orbites à l'orthogonal de l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie.

6. Variétés lagrangiennes

DÉFINITION 16. *Une sous-variété Λ de (Z, ω) est dite lagrangienne si, $\forall l \in \Lambda$, $T_l(\Lambda)$ est un sous-espace lagrangien de $(T_l(Z), \omega(l))$.*

Les variétés lagrangiennes jouent un rôle important dans la géométrie symplectique et ses applications : elles sont les “morphisms” de la catégorie des variétés symplectiques ; dans l’analyse semi-classique, elles servent de base géométrique pour construire les fonctions et opérateurs semi-classiques.

On va s’intéresser essentiellement aux variétés lagrangiennes dans le cas du cotangent ; en effet le théorème suivant de Weinstein affirme qu’il y a peu de choses à en dire dans le cas général :

THÉORÈME 8. *Si Λ est une variété lagrangienne de (Z, ω) , il existe un voisinage de Λ qui est symplectiquement équivalent à un voisinage de la section nulle du cotangent $T^*\Lambda$.*

Si $\Lambda \subset T^*X$ est le graphe d’une 1-forme différentielle α réelle sur X , Λ est lagrangienne si et seulement si α est fermée et donc localement exacte : si $df = \alpha$, on dit que f est une *fonction génératrice* pour Λ . Il est agréable de considérer les variétés lagrangiennes comme des fonctions généralisées (de même que les formes quadratiques avec domaine pour le cas linéaire).

Les variétés lagrangiennes jouent un rôle considérable en analyse (voir à ce sujet [Wei77]).

Une des raisons de leur importance en analyse semi-classique est qu’elles donnent des solutions généralisées de l’équation de Hamilton-Jacobi. En effet, une solution f de $H(x, df(x)) = E$ est exactement une fonction dont le graphe de la différentielle est une variété lagrangienne contenue dans $H = E$.

On considérera donc qu’une variété lagrangienne contenue dans $H = E$ est une *solution généralisée de l’équation de Hamilton-Jacobi*.

On peut facilement construire de telles variétés en remarquant leur invariance par le flot \mathcal{X}_H :

comme dH est nulle sur Λ et par dualité, \mathcal{X}_H est tangent à Λ .

Si $W \subset \{H = E\}$ est une sous-variété isotrope de dimension $n - 1$, telle que le champ de vecteur \mathcal{X}_H est transversal à W , l’application $J : W \times \mathbb{R} \rightarrow Z$ définie par $J(w, t) = \varphi_t(w)$ est une immersion lagrangienne dont l’image est contenue dans $H = E$.

Un exemple géométrique :

on dira qu’une famille Λ de droites de \mathbb{R}^3 est une congruence (voir [Dar72] tome 3) si c’est une sous-variété de dimension 2 de l’espace des droites orientées qui soit l’ensemble des normales d’une surface.

THÉORÈME 9. *Soit (Z, ω) la variété symplectique (de dimension 4) de l’espace des droites affines de \mathbb{R}^3 , alors Λ est localement une congruence si et seulement si elle est lagrangienne.*

Preuve.—

Soit S un germe de surface tel que Λ est l’ensemble des normales à S . Soit $D_0 \in \Lambda$. On peut prendre comme section de Poincaré de D_0 l’ensemble des covecteurs unitaires en les points de S . Λ correspond dans cette carte aux covecteurs unitaires transformés de Legendre $\nu^*(m)$ des vecteurs normaux à S . Donc la 1 forme de Liouville sur Λ vaut $\nu^*(m)dm = \nu(m).dm = 0$.

Réciproquement, supposons Λ lagrangienne, et soit $\tilde{\Lambda}$ la variété lagrangienne, image réciproque de Λ , contenue dans le fibré cotangent unitaire de \mathbb{R}^3 . Soit $m(t) = \varphi_t(m_0)$ parcourant la droite D_0

de Λ vue comme orbite du flot géodésique φ_t . Soit $L_t = \varphi'_t(L_0)$ l'espace lagrangien tangent en $m(t)$ à $\tilde{\Lambda}$. Les points conjugués sont les points où L_t n'est pas transverse à l'espace vertical : ils forment un ensemble discret (en fait de moins de 2 points). Soit t_0 tel que L_{t_0} est transverse à la verticale et S normale à D_0 en $\pi(m(t_0))$. On vérifie que l'application $D \rightarrow D \cap S$ de Λ dans S est un difféomorphisme local. Λ est donc donnée localement comme l'ensemble des droites issues d'un point m de S de vecteurs unitaires $\tau(m)$. La structure symplectique sur Λ est donnée par $\omega = d\alpha$ avec $\alpha = \tau(m).dm$. On a localement $\alpha = d\varphi$ avec φ nulle en $D_0 \cap S$ et Λ est l'ensemble des normales à la surface obtenue en reportant une longueur $-\varphi$ à partir de $m \in S$ sur la droite de Λ passant par ce point.

□

7. Réduction et intersection transverse au sens de Bott

soit $W \subset Z$ une sous-variété coisotrope et Z_W la variété réduite. On a une application r de W dans Z_W . Soit maintenant Λ une sous-variété lagrangienne de Z . Alors $r(W \cap \Lambda)$ n'est pas nécessairement une sous-variété. C'est cependant le cas si Λ et W se coupent transversalement au sens de Bott (clean intersection en anglais) ie si $\Lambda \cap W$ est une sous-variété et si $T(W \cap \Lambda) = TW \cap T\Lambda$. Dans ce cas $r(\Lambda)$ est lagrangienne (c'est alors un résultat d'algèbre linéaire et le fait que r est de rang constant sur $W \cap \Lambda$).

8. Trajectoires périodiques

8.1. Trajectoires périodiques : le point de vue dynamique. Soit Σ_E une couche d'énergie lisse de l'hamiltonien H . Soit μ la mesure de probabilité microcanonique sur Σ_E . Soit \mathcal{X} la restriction de \mathcal{X}_H à Σ_E .

On considère le flot φ_t de \mathcal{X} comme un système dynamique préservant μ .

Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma_E$ une trajectoire de \mathcal{X} . On dira que γ est périodique s'il existe $T > 0$ tel que $\gamma(t + T) = \gamma(t)$. On notera $T_0 > 0$ la plus petite période > 0 de γ . Les autres sont des multiples entiers de T_0 .

On définit alors une (un germe de) section de Poincaré S_γ comme un germe d'hypersurface de Σ_E (donc de dimension $2n - 2$) transversal à γ en un $x_0 = \gamma(t_0)$. S_γ est symplectique.

Soit x un point de S_γ proche de x_0 , alors la trajectoire de x recoupe S_γ en un temps T_x proche de $T_0 = T_{x_0}$.

L'application de Poincaré P_γ (germe d'application de (S_γ, x_0) dans elle-même) est l'application qui à x associe $\varphi_{T_x}(x)$.

Il est facile de voir grâce à la formule de Stokes que P_γ est symplectique. De plus, un changement de point x_0 et de section S_γ ne change P_γ qu'à conjugaison symplectique près.

En particulier, la différentielle P'_γ de l'application de Poincaré en x_0 est bien définie à conjugaison près dans le groupe linéaire symplectique.

On dira que γ est hyperbolique (resp. elliptique) si P'_γ l'est.

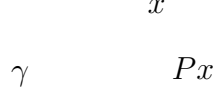


FIGURE 1. Section de Poincaré d'une orbite périodique

Si γ est hyperbolique, il existe des sous-variétés lagrangiennes immergées de Σ_E appelées variétés stables et instables W_γ^\pm définies par :

$$W_\gamma^\pm = \{y | \varphi_t(y) \rightarrow \gamma \text{ lorsque } t \rightarrow \pm\infty\}.$$

Lorsque γ est elliptique, les itérées de P'_γ ne le sont pas toujours. C'est le cas cependant si P'_γ est elliptique générique.

Stabilité structurelle : si 1 n'est pas valeur propre de P'_γ , γ est structurellement stable : cela signifie que si l'on fait une perturbation lisse de H (ou de l'énergie) on ne fait pas disparaître la trajectoire périodique.

Si P'_γ admet une valeur propre qui est racine de l'unité, il y a une itérée de γ qui admet 1 comme valeur propre, on a souvent affaire à une bifurcation (création d'orbites périodiques de périodes multiples de T_0).

8.2. Trajectoires périodiques : le point de vue calcul des variations.

Dans tout ce §, X sera supposée compacte et le lagrangien standard.

8.2.1. *La variété des chemins H^1* . Si $X \subset \mathbb{R}^N$ est une sous-variété compacte, on peut définir l'ensemble Ω_X^T des chemins H^1 comme le sous-ensemble de l'espace de Sobolev $H^1([0, T], \mathbb{R}^N)$ formé des chemins contenus dans X .

Topologies: Il y a par force décroissante au moins 3 topologies intéressantes sur Ω_X^T :

- La topologie induite par la topologie de l'espace de Hilbert H^1 .
- La topologie de la convergence uniforme
- La topologie faible

On montre qu'en fait cet ensemble ne dépend que de X et pas du plongement, de même que les topologies précédentes.

Structure de variété : Ω_T^X est munie naturellement d'une structure de variété banachique modelée sur H^1 .

L'espace tangent en γ est formé des champs de vecteurs H^1 le long de γ .

8.2.2. *Existence d'extrémales*. Si L est un lagrangien standard, et si on suppose la métrique sci et les potentiels magnétiques et électriques continus, la fonction d'action $\mathcal{L}(\gamma)$ est sci pour la topologie faible.

On en déduit les théorèmes d'existence de courbes minimisantes pour \mathcal{L} pour les problèmes périodiques et à extrémités fixées.

THÉORÈME 10. *Soit X compacte et L standard sci, soit C une classe d'homotopie de $\Omega_{T,per}$ (lacets T périodiques) ou $\Omega_{T,A,B}$ (chemins d'extrémités A, B), alors \mathcal{L} atteint son minimum sur C .*

Il est en effet clair qu'on peut appliquer la méthode directe de calcul des variations : toute fonction sci sur un compact atteint son minimum.

On peut alors montrer que les courbes minimales satisfont les équations d'Euler-Lagrange dans tout ouvert où L est lisse (elles les satisfont au sens des distributions et donc au sens ordinaire).

8.2.3. *Méthode de calibration.* Il existe une autre méthode voisine de la méthode de calibration.

Soit L un lagrangien lisse, strictement convexe par rapport aux vitesses, et H l'hamiltonien associé. Soit Λ une variété lagrangienne contenue dans $H = E$ se projetant de façon difféomorphe sur un ouvert U de X .

Par tout point x de U passe donc une extrémale dont le relevé est contenu dans Λ .

PROPOSITION 10. *Sous les hypothèses précédentes, si $\gamma_0(t)$ est une extrémale de la famille joignant A, B de U , γ_0 minimise \mathcal{L} parmi les chemins homotopes à γ_0 dans U .*

Pour $x \in U$, on note $v(x)$, resp $\xi(x)$, les vitesses et moments de la trajectoire passant par x .

On a alors pour un chemin $x(t)$ dans U de vitesse x' et par convexité de L par rapport aux vitesses :

$$L(x, x') \geq d_v L(x, v)(x' - v) + L(x, v)$$

soit en intégrant :

$$\int_0^T L(x, x') dt \geq \int \xi dx - E dt$$

où la deuxième intégrale est calculée sur le relèvement à Λ de $x(t)$.

Il reste à utiliser le fait que ξdx est fermée sur Λ . □

On en déduit en particulier, sous les mêmes hypothèses sur L , que si $\gamma : [0, T] \rightarrow X$ est une extrémale, il existe un $t_0 > 0$, tel que γ minimise \mathcal{L} parmi les chemins de $\Omega_{t_0, \gamma(0), \gamma(t_0)}$.

Il suffit de prendre dans la proposition précédente l'ensemble des trajectoires d'énergie égale à celle de γ issue de $\gamma(0)$ pendant un temps t_1 assez petit. Puis prendre t_0 petit par rapport à t_1 .

8.2.4. *Approximations de dimension finie.* Soit (X, g) une variété riemannienne (lisse) compacte. Notons $r > 0$ son rayon d'injectivité. Rappelons que le rayon d'injectivité de X est le plus grand nombre r qui vérifie : pour tout couple de point $a, b \in X$ tel que $d(a, b) < r$, il existe une unique géodésique de a à b dont la longueur est égale à $d(a, b)$. On montre sans peine que cette géodésique dépend de façon lisse de a, b . Dans l'ouvert $D_r = \{(a, b) \in X \times X | d(a, b) < r\}$, la fonction carré de la distance est lisse.

Le but de ce qui suit est d'exhiber une équivalence d'homotopie entre l'espace $\Omega_{T, E}$ des chemins H^1 d'énergie $< E$ et une sous-variété de dimension finie $\Omega_{T, E}^N$, la variété des *géodésiques brisées*. Cette sous-variété contient les points critiques de la fonctionnelle énergie et les indices de Morse de \mathcal{L} restreinte à $\Omega_{T, E}^N$ sont les indices de Morse de \mathcal{L} sur $\Omega_{T, E}$. Cela permet d'appliquer la théorie de Morse à l'espace des lacets. Cette idée de l'espace des géodésiques brisées est excellemment décrite dans [Mil67].

On note $\Omega_T = H^1([0, T], X)$, $\mathcal{L}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^T \|\gamma'(t)\|^2 dt$ et
 $\Omega_{T,E} = \{\gamma \in \Omega_T \mid \mathcal{L}(\gamma) < E\}$.

Soit N un entier tel que $2ET/N < r^2$. Si $\gamma \in \Omega_{T,E}$ et $0 \leq t' < t'' \leq t' + \frac{T}{N} \leq T$, on montre, avec Cauchy-Schwarz, que $d(\gamma(t'), \gamma(t'')) < r$.

Soit alors $\Omega_{T,E}^N$ l'ensemble des chemins de $\Omega_{T,E}$ qui sont géodésiques sur les intervalles $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, \dots, N-1$ avec $t_j = \frac{j}{N}$.

$\Omega_{T,E}^N$ est une sous-variété de dimension $n(N+1)$ de $\Omega_{T,E}$.

Soit j l'injection de $\Omega_{T,E}^N$ dans $\Omega_{T,E}$ et $\pi : \Omega_{T,E} \rightarrow \Omega_{T,E}^N$ l'application qui consiste à remplacer γ sur chaque intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ par la géodésique minimisante.

Alors les applications $j \circ \pi$ et $\pi \circ j$ sont homotopes à l'identité et définissent donc une équivalence d'homotopie entre $\Omega_{T,E}$ et $\Omega_{T,E}^N$. C'est clair pour $\pi \circ j$ qui est l'identité de $\Omega_{T,E}^N$. On interpole entre Id et $\pi \circ j$ de la façon suivante ; on définit l'application π_u ($0 \leq u \leq T$), en notant $\gamma_u = \pi_u(\gamma)$, pour $t_i \leq u \leq t_{i+1}$, par :

- $\gamma_u(t) = \pi(\gamma)(t)$ pour $t \leq t_i$,
- $\gamma_u(t) = \gamma(t)$ pour $t \geq u$,
- $\gamma_u(t)$ est la géodésique minimisante de $\gamma(t_i)$ à $\gamma(u)$ pour $u \leq t \leq t_{i+1}$.

Si on introduit les sous-variétés des précédentes formées des chemins périodiques ou des chemins d'extrémités A, B fixées, on conserve la même équivalence d'homotopie.

On voit que les extrémals de $\Omega_{T,E}$ sont contenues dans $\Omega_{T,E}^N$.

Il en est de même des points critiques de \mathcal{L} sur les sous-variétés de chemins périodiques ou à extrémités fixées.

En fait, les indices de Morse de ces points critiques coïncident. Ces indices de Morse sont donc finis.

Cela résulte de la décomposition orthogonale, en tout point de $\Omega_{T,E}^N$ pour le hessien de \mathcal{L} de l'espace tangent à $\Omega_{T,E}^N$ et de l'espace des champs de vecteurs nuls aux points t_i . La différentielle de \mathcal{L} restreinte à ce dernier espace est nulle.

Il est aussi utile de remarquer que $\Omega_{T,E}^N$ s'identifie par l'application $\gamma \rightarrow (\gamma(t_i))$ à une sous-variété de X^{N+1} et que la restriction de \mathcal{L} à $\Omega_{T,E}^N$ s'écrit alors sous la forme :

$$\mathcal{L}_N(x_0, x_1, \dots, x_N) = \frac{N}{2T} \sum_{j=0}^{N-1} d^2(x_j, x_{j+1}) .$$

9. Fonctions génératrices

9.1. Famille de fonctions génératrices. Soit $\pi : T^*X \rightarrow X$ la projection canonique.

DÉFINITION 17. Si Λ est une variété lagrangienne de T^*X , la caustique Σ de Λ est l'ensemble des $z \in \Lambda$ telle que la restriction de π à Λ n'est pas un difféomorphisme local en z .

Si $z \notin \Sigma$, Λ est près de z le graphe de la différentielle d'une fonction $\varphi : X \rightarrow \mathbf{R}$; on dit que φ (qui est définie à une constante près) est une fonction génératrice de Λ .

Comment représenter Λ si ce n'est pas le cas ?

Soit $\varphi(x, \theta)$ une fonction définie sur $X \times \mathbf{R}^N$ à valeurs réelles. Soit $C_\varphi = \{(x, \theta) \mid \partial\varphi/\partial\theta = 0\}$. On suppose que les différentielles $d_{x,\theta}(\partial\varphi/\partial\theta_i)$, $i = 1, \dots, N$

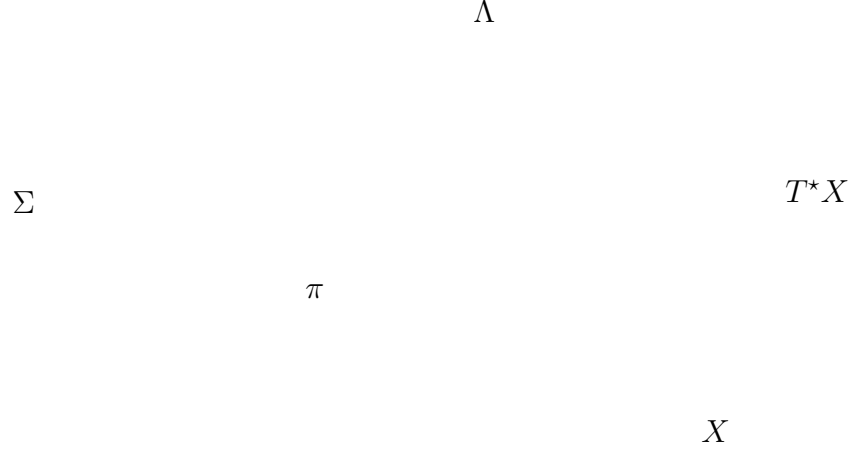


FIGURE 2. Variété lagrangienne et sa caustique

sont indépendantes. Alors C_φ est une sous-variété de dimension $n = \dim(X)$ de $X \times \mathbb{R}^N$. On introduit $j_\varphi : C_\varphi \rightarrow T^*X$ définie par $j_\varphi(x, \theta) = (x, \partial_x \varphi)$. On a alors :

THÉORÈME 11. *L'application j_φ est une immersion de C_φ dans T^*X dont l'image est une variété lagrangienne Λ_φ de T^*X . De plus $j_\varphi^*(\xi dx) = d\varphi|_{C_\varphi}$.*

DÉFINITION 18. *Sous les hypothèses précédentes, on dit que $\varphi(x, \theta)$ est une famille (de fonctions) génératrice de $\Lambda_\varphi = j_\varphi(C_\varphi)$.*

Preuve. –

Soit J la différentielle de j_φ . On a $J(dx, d\theta) = (dx, \partial_{x,x} \varphi dx + \partial_{\theta,x} \varphi d\theta)$, alors que $TC_\varphi = \{(dx, d\theta) | \partial_{x,\theta} \varphi dx + \partial_{\theta,\theta} \varphi d\theta = 0\}$. On en déduit que $\ker J = 0$ et donc que j_φ est une immersion. On calcule ensuite $j_\varphi^*(\xi dx) = d\varphi|_{C_\varphi}$.

□

On peut reformuler plus géométriquement la notion de famille génératrice : si $p : M \rightarrow X$ est une submersion et $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, on peut définir la dérivée partielle de φ suivant les fibres et ainsi C_φ . L'application j_φ est alors bien définie, car la dérivée horizontale $\partial_x \varphi$ est bien définie en tout point où la dérivée verticale s'annule.

On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 12. *Toute sous-variété lagrangienne est localement de la forme Λ_φ pour un φ convenable. On peut toujours prendre $N \leq n$ et même $N = \text{rang}(d\pi)$.*

PREUVE. Soit $z_0 \in \Lambda$ et $T_{z_0} \Lambda = L$ que l'on voit comme sous-espace vectoriel lagrangien de $\mathcal{E} = E \oplus E^*$ (avec $E = T_{x_0} X$; on note p (resp p^*) les projections de \mathcal{E} sur E (resp E^*)).

Soit $F = p(L)$, $E = F \oplus G$ et $E^* = F^* \oplus G^*$. On a : $0 \oplus G^* \subset L^\circ = L$ et donc la projection $P : L \rightarrow F \oplus G^*$ est un isomorphisme. On en déduit que cela reste vrai au voisinage de z_0 : localement Λ est de la forme

$$\Lambda = \{(x', g(x', \xi''), f(x', \xi''), \xi'') | x' \in F, \xi'' \in G^*\}.$$

On exprime que Λ est lagrangienne, ce qui donne

$$df \wedge dx' + d\xi'' \wedge dg = 0$$

et donc

$$d(gd\xi'' - fdx') = 0 .$$

Soit localement $S(x', \xi'')$ telle que

$$dS = gd\xi'' - fdx'$$

on prend

$$\Phi(x', x'', \xi'') = \xi'' x'' - S(x', \xi'') ,$$

dont il est facile de vérifier les propriétés. □

Si $\Lambda = \Lambda_\varphi$ est donnée, elle admet plusieurs familles génératrices :

(1) Si $a \in \mathbb{R}$, $\Lambda_{\varphi+a} = \Lambda_\varphi$.

(2) Si $q(\theta')$ est une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^{N'}$, $\Lambda_{\varphi(x, \theta) + q(\theta')} = \Lambda_\varphi$.

(3) Si $F = \mathbb{R}^{N'} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une submersion, $\Lambda_{\varphi \circ F} = \Lambda_\varphi$.

Hörmander a démontré le remarquable résultat suivant :

THÉORÈME 13. *Si $z \in \Lambda_\varphi = \Lambda_{\varphi_1}$, on peut au voisinage de z passer de φ à φ_1 grâce aux opérations précédentes.*

On dira qu'une fonction phase représentant Λ est réduite en $\lambda_0 \in \Lambda$ si $\partial^2 \varphi / \partial \theta^2$ est nulle au point de C_φ correspondant à λ_0 . Par le lemme de Morse, on peut toujours réduire une fonction phase en un point donné et alors le nombre de variables θ est donné par la dimension du noyau de la différentielle de la projection de Λ sur X en λ_0 . Pour réduire, on choisit une sous-variété $X \times \mathbb{R}^{N'} \subset X \times \mathbb{R}^N$ telle que $\partial^2 \varphi / \partial \theta'^2$ soit non dégénérée et on applique le lemme de Morse à paramètre près de C_φ .

9.2. Exemples géométriques. Les fonctions distances sont souvent de bonnes candidates à être des fonctions génératrices. Le problème est leur manque de différentiabilité aux points conjugués.

Plus généralement, soit x_0 et y_0 2 points non conjugués le long d'une extrémale $\gamma_0(t)$ tels que $x = \gamma_0(0)$, $y = \gamma_0(T_0)$. Soit (x_0, ξ_0) , (y_0, η_0) les relevés de ces points dans le cotangent.

Alors pour tout (x, y) voisins de (x_0, y_0) , et T voisin de T_0 , il existe une unique extrémale γ proche de γ_0 telle que $\gamma(0) = x$, $\gamma(T) = y$. Soit $S(T, x, y)$ l'action le long de ces extrémales (intégrales du lagrangien).

Dans le cas riemannien, on a :

$$S(T, x, y) = \frac{d^2(x, y)}{2T} ,$$

où $d(x, y)$ est la distance entre x et y comptée le long d'une géodésique de x à y proche de celle considérée de x_0 à y_0 .

Alors, on a le :

THÉORÈME 14. *La fonction $S(T, x, y)$ vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi :*

$$\partial_T S + H(y, \partial_y S) = 0 ,$$

et $S(T_0, x, y)$ est une fonction génératrice du flot Hamiltonien φ_{T_0} près de (x_0, ξ_0) .

PREUVE. La seconde assertion résulte du calcul de la dérivée de \mathcal{L} par rapport aux extrémités fait dans la section 4.1.

La première est plus subtile : il faut calculer

$$\partial_T \int_0^T L(\gamma_T(t), \gamma'_T(t)) dt ,$$

où γ_T est l'extrémale de x_0 à y_0 en le temps T . On décompose en $\int_0^{T_0} + \int_{T_0}^T$: la 2ème dérivée vaut $L(y_0, v_0)$ avec $v_0 = \gamma'_0(T_0)$; la première vaut (en utilisant le caractère extrémal de γ_0) :

$$\eta_0 \frac{\delta \gamma_T(T_0)}{\delta T} .$$

On écrit alors $\gamma_T(T) = y_0$ que l'on dérive par rapport à T en T_0 . Cela donne $-\eta_0 v_0$ pour cette première dérivée et finit la preuve. \square

9.3. Fonctions génératrices et espace des chemins. Soit $H(x, \xi)$ l'hamiltonien associé au lagrangien $L(x, v)$ supposé strictement convexe par rapport à v . Soit $T > 0$ et $\varphi_T : T^*(X) \rightarrow T^*(X)$ le flot de \mathcal{X}_H à l'instant T . Le graphe de φ_T est une sous-variété lagrangienne de $T^*(X) \times T^*(X)$ munie de la forme $pr_2^*(\omega) - pr_1^*(\omega)$.

Soit Ω l'ensemble des chemins γ de classe H^1 avec $\gamma : [0, T] \rightarrow X$. On a la fibration (introduite par Serre) $\Omega \rightarrow X \times X$ qui à γ associe le couple $(\gamma(0) = x, \gamma(1) = y)$. Considérons maintenant la fonction $\mathcal{L} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma, \gamma') dt$. C'est une famille de fonctions génératrices de φ_T . En effet, les points critiques $C_{\mathcal{L}}$ sont exactement les extrémales de \mathcal{L} à extrémités fixées. Il reste à calculer les dérivées $\partial \mathcal{L} / \partial x$ et $\partial \mathcal{L} / \partial y$, ce qui résulte de la formule de variation première de \mathcal{L} (équation (1)).

Une autre variété intéressante à considérer dans le même contexte est Λ_{x_0} définie par

$$\Lambda_{x_0} = \{(\varphi_t(x_0, p), t, -H(x_0, p)) | p \in T^*(x_0), t \in \mathbb{R}\} .$$

On définit un fibré analogue $\Omega_{x_0} \times \mathbb{R} \rightarrow X \times \mathbb{R}$, où Ω_{x_0} est l'ensemble des chemins d'origine x_0 et la fibration est donnée par : $(\gamma, t) \rightarrow (\gamma(t), t)$. On a la famille génératrice donnée par :

$$\tilde{\mathcal{L}} = \int_0^t L(\gamma, \gamma') du .$$

Ces familles génératrices utilisent des variétés de dimension infinie, mais il est classique que l'on peut facilement se ramener à la dimension finie par la technique des géodésiques brisées (voir [Mil67] et sous-section 8.2.4). Voyons comment procéder dans le premier cas pour trouver une fonction génératrice du graphe de φ_T au voisinage du point $((x_0, \xi_0), \varphi_T(x_0, \xi_0))$ d'énergie E : on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $z_i = \varphi_{iT/N}(x_0, \xi_0)$ et $z_i = (x_i, \xi_i)$, \mathcal{L} ait, $\forall i, 0 \leq i \leq N-1$, un unique minimum non dégénéré d'extrémités x_i et x_{i+1} sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ avec $t_i = iT/N$ (ie $\inf(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(x, x') dt)$). On note $S_i(x, x')$ ce minimum pour x, x' voisins de x_i, x_{i+1} . On introduit alors la fibration (locale) $\pi : Z \rightarrow X \times X$, où Z est un voisinage de $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_N)$ dans X^{N+1} , et $\pi(x_0, \dots, x_N) = (x_0, x_N)$. La fonction $\varphi(z_i) = \sum_i S_i(x_i, x_{i+1})$ est une famille génératrice pour $\Lambda = \text{graphe}(\varphi_T)$.

9.4. Fonctions génératrices des transformations canoniques. Soit $\chi : T^*\mathbb{R}^n \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$ un germe de transformation canonique. On pose $\chi(x, \xi) = (y, \eta)$.

On a plusieurs types de fonctions génératrices :

- On suppose que l'application $(x, \xi) \rightarrow (x, \eta)$ est un difféomorphisme d'un ouvert simplement connexe de \mathbb{R}^{2n} dans un ouvert de \mathbb{R}^{2n} . De $d(\xi dx + y d\eta) = 0$, on déduit l'existence de $S(x, \eta)$ telle que $\xi = \partial_x S$, $y = \partial_\eta S$. Soit

$$\Lambda = \{(x, \xi, y, -\eta) | (y, \eta) = \chi(x, \xi)\} \subset T^*(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n) .$$

Alors $S(x, \eta) - y\eta$ est une famille génératrice pour Λ . On a donc :

$$\chi(x, \partial_x S) = (\partial_y S, \eta)$$

Les hypothèse précédentes sont satisfaites si χ est C^1 proche de Id.

- On suppose que l'application $(x, \xi) \rightarrow (x, y)$ est un difféomorphisme défini sur un ouvert 1-connexe. On peut alors trouver une fonction génératrice S telle que

$$\chi(x, -\partial_x S) = (y, \partial_y S)$$

10. Indice de Morse

10.1. Définitions.

DÉFINITION 19. Si q est une forme quadratique sur un espace vectoriel réel E (de dimension finie ou non), l'indice de Morse de q est le sup des dimensions des sous-espaces de E où q est strictement négative.

DÉFINITION 20. Si x_0 est un point critique d'une fonction $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, où X est une variété de dimension finie ou banachique, l'indice de Morse de F en x_0 est l'indice de Morse de la Hessienne de F qui est une forme quadratique sur $T_{x_0}X$.

Soit L un lagrangien standard (voir 4.1) et $\gamma_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$ une extrémale de $\mathcal{L} = \int L dt$.

Soient Y et Z 2 champs de vecteurs le long de $(\gamma_0)_{|[0, T]}$, c'est à dire que $\forall 0 \leq t \leq T$, $Y(t), Z(t) \in T_{\gamma_0(t)}X$, et $\gamma(t, u, v)$ telle que $\gamma(t, 0, 0) = \gamma_0(t)$,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u}(t, 0, 0) = Y, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial v}(t, 0, 0) = Z ,$$

une déformation de γ_0 sur $[0, T]$. On note

$$Q(Y, Z) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial v} \Big|_{u=v=0} .$$

On vérifie que

$$Q(Y, Z) = \int_0^T (A(t)Y'Z' + B(t)YZ' + B(t)ZY' + C(t)YZ) dt$$

où A, B, C sont des formes quadratiques dépendant de t . De plus $A(t)$ est définie positive si L est strictement convexe en v .

Munissant X d'une métrique riemannienne, la forme quadratique précédente est associée à un opérateur différentiel du second ordre J auto-adjoint, appelé *opérateur de Jacobi*.

Les solutions de $JY = 0$ sont les champs de Jacobi : si $\gamma_u = \gamma(\cdot, u, 0)$ est une famille d'extrémales, la différentielle de \mathcal{L} en tout point γ_u est nulle et il en est donc de même de $Q(Y, Z)$.

Remarque : J dépend du choix d'une métrique, alors que, ni Q , ni les champs de Jacobi, n'en dépendent.

THÉORÈME 15. *L'indice de Morse de γ_0 pour le problème à extrémités $\gamma(0)$ et $\gamma(T)$ fixées est le nombre de valeurs propres < 0 de J pour le problème de Dirichlet sur $[0, T]$.*

L'indice de Morse de γ_0 pour le problème périodique est le nombre de valeurs propres < 0 de J pour le problème périodique.

Par exemple, si $L = \frac{1}{2}x'^2 - V(x)$, $A = 0$ et $B(t) = -V''(\gamma(t))$; dans le cas des géodésiques si on prend un repère parallèle $B(t)$ s'exprime à l'aide de la courbure de la métrique (formule dite de la variation seconde). En particulier, la forme B est définie positive dès que la courbure sectionnelle est strictement négative. Dans ce cas, les indices de Morse sont nuls.

DÉFINITION 21. *Les champs Y qui vérifient $JY = 0$ sont appelés champs de Jacobi.*

THÉORÈME 16. *Les champs de Jacobi sont les variations infinitésimales d'extrémales. Si $\gamma(t, u)$ est pour tout u une extrémale $Y = \partial\gamma/\partial u$ est un champ de Jacobi et réciproquement, pour tout champ de Jacobi Y , il existe une famille d'extrémales dont Y est la variation infinitésimale.*

Preuve. –

En effet, soit $\gamma_{u,v}(t)$ une variation de γ_0 telle que $\gamma_{u,0}(t)$ soient des extrémales et que $Z = \frac{\partial\gamma}{\partial v}(u, 0)$ soit à support compact.

On alors $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}(u, 0) = 0$. Puis dérivant par rapport à u en $u = 0$, il vient :

$$Q(Y, Z) = 0$$

pour tout Z à support compact et donc Y vérifie l'équation de Jacobi.

La réciproque peut se montrer par un argument de dimension. □

10.2. Théorème de Morse. On s'intéresse au problème à extrémités fixées. Soit $\gamma : [0, \infty[\rightarrow X$ une extrémale et $\nu(T)$ l'indice de γ restreint à l'intervalle $[0, T]$ à extrémités fixées. $\nu(T)$ est une fonction croissante de T . Cette fonction vaut 0 pour T petit et est discontinue seulement aux points où il existe une valeur propre nulle de l'opérateur de Jacobi, c'est-à-dire un champ de Jacobi nul en 0 et en T sans être identiquement nul.

Ces points sont appelés points conjugués de $\gamma(0)$ le long de γ .

THÉORÈME 17. *(Théorème d'indice de Morse) L'indice $\nu(T)$ du problème à extrémités fixées est égal au nombre de points conjugués, comptés avec leur multiplicités, de $\gamma(0)$ sur $]0, T[$.*

On en trouvera une preuve dans tous les ouvrages de géométrie riemannienne (par ex. dans [Mil67]). Une preuve dans l'esprit de ces notes est donnée dans la section 12.

EXEMPLE 10.1. *Les surfaces de révolution d'aire extrémale.*

Soit $L(y, y') = y\sqrt{1 + y'^2}$ le lagrangien correspondant à la recherche des surfaces de révolution de méridienne $y(x)$ d'aire extrémale. Le problème à extrémités liées correspond physiquement à la recherche de surfaces minimas s'appuyant sur 2 cercles de même axe (bulles de savon).

Les extrémales ont pour équations

$$y = b \cosh\left(\frac{x - x_0}{b}\right), \quad b > 0 .$$

Supposons que l'on fixe un des cercles de centre O et de rayon $a > 0$. Les extrémales issues de ce point ont une enveloppe Γ qui détermine la région A accessible de son complémentaire N .

On a alors la solution suivante du problème de minimas :

si (x_0, r_0) est dans l'intérieur de A , il y a 2 extrémales, l'une γ_1 qui touche l'enveloppe et donc a un point conjugué et est d'indice 1, l'autre γ_0 qui est minimisante.

Si par contre (x_0, r_0) est dans N , il y a une solution dégénérée : réunion des 2 disques coaxiaux et de l'axe ; physiquement, la bulle de savon finit par éclater si on écarte les 2 cercles...

10.3. Le problème périodique. Soit $\gamma_0(t)$ une extrémale périodique de période T_0 et $T = kT_0$ un multiple de la période.

On s'intéresse à l'indice de Morse $\nu_{per,T}$ de γ_0 comme application de $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ dans X .

Cet indice est celui de la forme Q sur l'espace des champs de vecteurs T -périodiques de classe H^1 le long de γ_0 , notons le K_T . Comme K_T contient les champs nuls aux 2 extrémités, l'indice de Morse $\nu_{per,T}$ est \geq l'indice de Morse à extrémités fixées $\nu(T)$ (nombre de points conjugués). La différence, appelée concavité par Morse, est l'indice de la forme Q sur l'espace des champs de Jacobi le long de γ_0 qui vérifient $Y(0) = Y(T)$. Ce dernier indice se calcule en fonction de l'application de Poincaré linéaire. En tout cas, on a :

$$\nu(T) \leq \nu_{per,T} \leq \nu(T) + n .$$

11. Indice de Maslov

11.1. Définitions. L'indice de Maslov est défini dans le contexte suivant généralisant un peu celui de la section 2.9 : on considère un fibré en espaces symplectiques E au dessus du cercle ou d'un intervalle compact muni d'un sous fibré lagrangien appelé vertical. On se donne par ailleurs une section $\lambda(t)$ de $\Lambda(E)$ qui est transverse à la verticale aux bords de l'intervalle dans le cas où la base est un intervalle.

DÉFINITION 22. *L'indice de Maslov de $\lambda(t)$ est le nombre d'intersection de cette courbe avec le cycle singulier des lagrangiens qui ne coupent pas transversalement le sous fibré vertical.*

L'exemple de base est celui d'une courbe $z(t)$ tracée sur une sous-variété lagrangienne d'un cotangent T^*X . La base est l'espace des paramètres t de la courbe z , l'espace $E(t)$ est l'espace tangent à T^*X en $z(t)$, la verticale est le noyau de la différentielle de la projection sur X , la section $\lambda(t)$ est l'espace tangent à la variété lagrangienne en $z(t)$. On définit ainsi l'indice de Maslov d'une courbe contenue dans une variété lagrangienne d'un cotangent.

11.2. Calcul avec les fonctions génératrices. On trivialise localement les fibrés de façon à se ramener au cas du cotangent de \mathbb{R}^n avec le fibré vertical habituel.

11.2.1. *Cas d'un chemin générique.* Considérons d'abord un chemin générique, i.e. qui traverse le lieu singulier dans sa strate de codimension 1 transversalement. L'espace lagrangien $\lambda(0)$ à l'instant de l'intersection est donné dans des coordonnées convenables par

$$\lambda(0) = \{(0, x'; \xi_1, C_0(x'))\}$$

où C_0 est symétrique. Les lagrangiens $\lambda(t)$, $t \neq 0$, sont alors donnés par

$$\lambda(t) = \{(a(t)\xi_1 + L(t)(x'), x'; \xi_1, C_t(\xi_1, x'))\}$$

La condition de transversalité est $a'(0) \neq 0$. La forme quadratique associée à $\dot{\lambda}(0)$ restreinte à $D = \lambda(0) \cap V = \{(0, 0; \xi_1, 0)\}$ est $-\dot{a}(0)\xi_1^2$. Le chemin admet une fonction génératrice au sens de Hörmander du type

$$x_1\xi_1 - q_t(x', \xi_1)$$

et donc $x_1 = \partial_{\xi_1} q_t$. On voit que $a(t)$ s'interprète comme la dérivée seconde par rapport à ξ_1 de l'opposé de la fonction phase. L'indice de Maslov compte donc la diminution de l'indice de Morse de la fonction génératrice de Hörmander lorsqu'on a traversé le lieu singulier.

11.2.2. *Cas d'un chemin quelconque.*

DÉFINITION 23. *Une famille de formes quadratiques $q_t(x, \theta)$ lisse en t sur $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^N$ est dite non dégénérée si l'application linéaire $\partial_{\theta} q_t$ est surjective.*

On associe à une telle famille q_t le chemin $\lambda(t)$ dans $\Lambda(n)$ défini par :

$$\lambda(t) = \{(x, \partial_x q_t) \mid \partial_{\theta} q_t = 0\}$$

On montre facilement l'analogie du cas non linéaire :

PROPOSITION 11. *Tout chemin lisse $\lambda(t)$ admet localement une famille de formes quadratiques non dégénérées le définissant.*

Deux familles q_t définissant le même chemin sont équivalentes par des changements linéaires à t constant et des adjonctions de formes quadratiques.

Si $\lambda_0(t)$ est définie par $q_{0,t}$, on peut définir tout chemin assez voisin par une déformation lisse de $q_{0,t}$.

De cette proposition, on déduit le résultat suivant :

THÉORÈME 18. *Soit $\lambda(t)$, $0 \leq t \leq T$ une section de $\Lambda(E)$ satisfaisant les hypothèses de la section 11.1. Soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ tels que le fibré E soit trivial sur $[t_i, t_{i+1}]$ et que $\lambda(t)$ y soit défini par une famille de formes quadratiques $q_{i,t}$. Soit $\nu_i(t)$ l'indice de Morse de la dérivée seconde de $q_{i,t}$ par rapport à θ_i . On a :*

$$m(\gamma) = - \sum_{i=0}^{N-1} (\nu_i(t_{i+1}) - \nu_i(t_i)) .$$

Preuve.—

On l'a déjà montré pour un chemin qui coupe transversalement le lieu singulier. Pour un chemin quelconque, on le déforme de façon à satisfaire cette transversalité et on utilise une famille continue de formes quadratiques pour laquelle la somme précédente va être constante.

□

Pour faire la démonstration précédente, on doit relever une déformation de chemin, ce qui peut se faire dans le cas d'une submersion. On a ainsi besoin du :

LEMME 3. *Soit Q l'ouvert de l'espace des formes quadratiques q en (x, θ) telles que q est une fonction phase non dégénérée. L'application $\Phi : q \rightarrow L_q$ de Q dans la grassmannienne lagrangienne est une submersion*

Preuve.—

On se place en q_0 tel que $\phi(q_0) = L_0$. Quitte à faire un changement de variable en θ dépendant de x , on peut supposer que $q_0 = x_1\theta - r(x', \theta) + s(\theta')$. Tout L voisin de L_0 admet une fonction phase unique de la même forme. On a ainsi exhibé des sections locales de Φ .

□

11.3. Le cas de la dimension 1. Dans le cas de $T^*\mathbb{R}$ les variétés lagrangiennes sont des courbes lisses et la caustique correspond aux points où la tangente est verticale.

Le calcul des indices de Maslov est donné par les règles de la figure 3.

$$\begin{array}{cc} -1 & +1 \end{array}$$

FIGURE 3. L'indice de Maslov en dimension 1

12. Relations entre indices de Morse et de Maslov

Si L est un lagrangien strictement convexe par rapport aux dérivées et γ une extrémale de $\int L$, on a la relation suivante entre indices de Morse et de Maslov due à Arnold [Arn67]. La preuve ci-dessous est inspirée de [Col75].

PROPOSITION 12. *Soit $T > 0$ tel que $\gamma(T)$ n'est pas conjugué de $\gamma(0)$ et $\tilde{\gamma}$ la courbe associée à γ tracée sur Λ_{x_0} (avec $x_0 = \gamma(0)$). On considère $\varepsilon > 0$ petit tel que $\tilde{\gamma}(\varepsilon) \notin \Sigma$. Alors l'indice de Maslov de $\tilde{\gamma}$ sur $[\varepsilon, T]$ est égal à l'opposé de l'indice de Morse $\nu(T)$.*

La démonstration est simple si on utilise la fonction phase $\int_0^t L(\gamma, \gamma') du$ et le théorème 18.

On peut aussi en déduire une démonstration du théorème d'indice de Morse grâce à la :

PROPOSITION 13. *Soit H un hamiltonien dont la dérivée seconde par rapport à ξ est définie positive, soit $z(t)$ une trajectoire de \mathcal{X}_H contenue dans une variété lagrangienne $L \subset \{H = E\}$. Les points conjugués sont les valeurs de t pour lesquelles le plan tangent à L en $z(t)$ n'est pas transverse à la verticale. Ces points sont isolés et l'indice de Maslov de la courbe $z(t) \subset L$ est l'opposé de la somme des multiplicités de ces points.*

Cette proposition est une conséquence immédiate du :

LEMME 4. *Soit $A(t)$ un chemin dans les formes quadratiques sur E tel que $\dim \ker A(0) = k$ et $A'(0)$ est défini positive sur $\ker A(0)$. Si L_t est le graphe de l'application linéaire symétrique associée à $A(t)$ et $M = E \oplus 0$, $L_t \cap M = 0$ pour $t = \pm \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ petit et l'indice de Maslov de $t \rightarrow L_t$ sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ vaut k .*

Preuve. –

Le lemme est immédiat si $k = 1$. Sinon, on déforme $A(t)$ en $B(t)$ à l'intérieur de $[-\varepsilon, \varepsilon]$ de façon à ce que les valeurs propres de $B(t)$ s'annulent avec des dérivées non nulles et des espaces propres de dimension 1. L'indice de Maslov pour $B(t)$, et donc aussi pour $A(t)$ vaut k , puisque le nombre algébrique de sauts de $-$ à $+$ pour les valeurs propres doit être k .

□

Commentaire : l'identité entre indice de Morse et de Maslov est montrée par Arnold en identifiant ces indices comme nombres d'intersection et donc en utilisant le théorème de Morse. Ici la démarche est différente : l'identité des 2 indices vient de la définition de l'indice de Morse et de l'utilisation de l'intégrale d'action comme fonction génératrice à la Hörmander. On a alors le théorème de Morse comme sous-produit d'un argument voisin de celui d'Arnold.

13. Un exemple : l'optique géométrique

13.1. L'équation eiconale. On s'intéresse à des solutions de grandes fréquences de l'équation des ondes dans $X = \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) avec un indice de réfraction non constant donné par une fonction $n(x)$. Si on note c la vitesse de la lumière dans le vide, cette équation s'écrit :

$$\Delta u - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 .$$

On cherche des solutions périodiques en t de la forme :

$$u(x, t) = a(x, t) e^{i\omega(t - S(x))} ,$$

où l'on suppose ω très grand.

L'élimination des termes en ω^2 conduit à l'équation dite *eiconale* :

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} \right)^2 = \frac{n(x)^2}{c^2} .$$

Le graphe de la différentielle $(x, dS(x))$ de S est donc une sous-variété lagrangienne Λ de $T^*(X)$ contenue dans l'hypersurface :

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2} ,$$

où le hamiltonien H est défini par

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2} \frac{c^2}{n(x)^2} \sum_j \xi_j^2 .$$

Réciproquement si on a une telle variété lagrangienne, elle donne localement lieu à une solution $S(x)$ de l'équation eiconale pourvu que la restriction à Λ de la projection canonique $\pi : T^*(X) \rightarrow X$ soit un difféomorphisme local.

On est donc amené à dire qu'une variété lagrangienne $\Lambda \subset T^*(X)$ est une solution généralisée de l'équation eiconale si elle est contenue dans $H(x, \xi) = \frac{1}{2}$.

Nous allons d'abord décrire la géométrie de ces solutions généralisées. Une telle variété est invariante par le flot du gradient symplectique \mathcal{X}_H de H ; les trajectoires en question ou par extension leur projection sur X s'appellent *rayons lumineux*.

On peut en particulier construire des solutions généralisées de l'équation eiconale de la façon suivante :

on se donne une hypersurface S_0 de X (qui sera la surface $S = 0$). Il existe alors au dessus de chaque $x \in S_0$ 2 vecteurs $\pm \xi(x)$ tels que

$$i) \xi(x)|_{T_x(S_0)} = 0 ,$$

$$ii) H(x, \xi(x)) = \frac{1}{2} .$$

On fait un choix continu d'un tel $\xi(x)$ qui donne une sous-variété Σ_0 de $T^*(X)$ isotrope, de dimension $n - 1$, contenue dans $H(x, \xi) = \frac{1}{2}$ et de projection S_0 . De plus le champ \mathcal{X}_H est transverse à Σ_0 , car c'est déjà vrai de sa projection sur X qui est transverse à S_0 (cette projection est même orthogonale à S_0).

Λ est alors la variété immergée dans T^*X par l'application

$$\Phi : \Sigma_0 \times \mathbb{R} \rightarrow T^*(X) ,$$

définie par :

$$\Phi(x, \xi(x), t) = \varphi_t(x, \xi(x)) .$$

Etudions d'un peu plus près la géométrie de Λ . Si on veut, pour simplifier, on peut supposer dans la suite que n est constant.

Fronts d'onde.

La restriction à Λ de la forme $\sum_j \xi_j dx_j$ est fermée. Elle admet donc (au moins localement une primitive) dont les surfaces de niveaux sont les $\Sigma_t = \varphi_t(\Sigma_0)$. Les projections S_t des Σ_t ne sont pas forcément lisses (caustiques). Les fronts d'ondes sont les Σ_t (et parfois les S_t), t est défini à une constante additive près par la solution Λ .

Rayons lumineux.

Les trajectoires de \mathcal{X}_H contenues dans Λ sont les rayons lumineux. Si n est constant, ce sont des droites. On a

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{c^2}{n^2} \xi_j$$

et donc

$$v^2 = \sum_j \left(\frac{dx_j}{dt} \right)^2 = \frac{c^2}{n^2} .$$

La vitesse v de propagation le long des rayons lumineux est donc donnée par :

$$v = \frac{c}{n} .$$

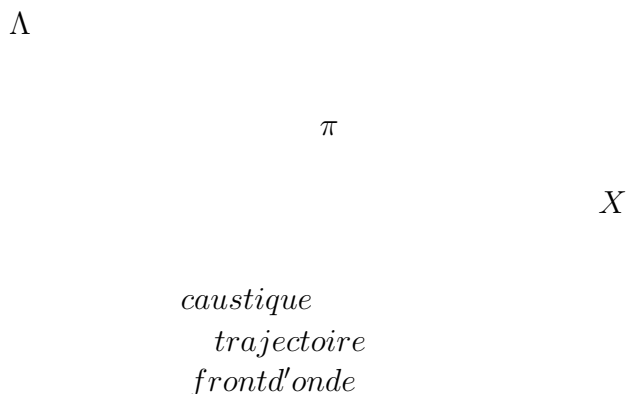


FIGURE 4. Variété lagrangienne et front d'ondes

Caustiques

Si W est le lieu singulier, ensemble des points de Λ où π n'est pas un difféomorphisme local, les rayons coupent W transversalement (points focaux) ; dans le cas où $n(x)$ est constant les points focaux sont les centres de courbure de S_0 . La projection $\pi(W)$ est la caustique.

Principe de Fermat

L'hamiltonien $H(x, \xi)$ est obtenu par transformée de Legendre de la métrique riemannienne (conforme à l'eulidienne)

$$ds^2 = \frac{n^2}{c^2} ds_0^2 ;$$

et donc les rayons lumineux sont les géodésiques pour la longueur donnée par :

$$\int n(x) ds_0 ,$$

cette intégrale s'appelle en optique *chemin optique* et le principe de Fermat dit que les rayons lumineux sont les extrémales de cette longueur, qui est proportionnelle au temps nécessaire à la lumière pour aller d'un point à un autre, en vertu de la formule $v = c/n$.

13.2. Principe de Huyghens et fonctions génératrices. On s'intéresse maintenant à la représentation de Λ au moyen de fonctions phases et pour fixer les idées, on suppose que n/c est constant et égal à 1. Les rayons lumineux sont donc les normales à S_0 .

Pour t petit, la fonction $S(x)$ est bien définie : ses surfaces de niveaux sont les hypersurfaces parallèles à S_0 . Lorsque t augmente on rencontre des points focaux (centres de courbure de S_0).

Soit $d(x, \theta)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in S_0$, la distance euclidienne de x à θ .

Pour chaque θ , la fonction $d(\cdot, \theta)$ est solution de l'équation eiconale. Les fronts d'ondes sont les sphères de rayons $a > 0$ centrées en $\theta \in S_0$.

Assertion : la famille $d(x, \theta)$ est une famille génératrice pour Λ (ou du moins la partie $t > 0$ de Λ). Cela résulte d'un calcul immédiat.

Ceci est évidemment relié au principe de Huyghens : donnons-en une forme plus générale. Soit $\varphi(x, \theta)$ une famille de solutions de l'équation eiconale. Considérons

pour chaque valeur de a , l'enveloppe S_a des fronts (projetés) $\varphi(x, \theta) = a$. Cette enveloppe est donnée par :

$$\varphi(x, \theta) = a, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 .$$

On obtient ainsi une variété lagrangienne Λ solution de l'équation eiconale, définie par la famille $\varphi(x, \theta)$ et dont les fronts d'ondes sont les S_a .

FIGURE 5. Principe de Huyghens

13.3. Miroirs. On se donne maintenant une hypersurface \mathcal{M} (le miroir) supposée transversale aux rayons lumineux de Λ .

Soit R l'hypersurface de Λ qui se projette sur \mathcal{M} . Pour tout $(x, \xi(x)) \in R$, il existe un unique $(x, \tilde{\xi}(x))$ qui induit 0 sur $T_x \mathcal{M}$, qui vérifie $H(x, \tilde{\xi}(x)) = 1/2$ et qui est différent de $\xi(x)$. L'ensemble des $(x, \tilde{\xi}(x))$, $x \in \mathcal{M}$ est donc une sous-variété isotrope de $T^*(X)$ contenue dans $H = 1/2$ et de dimension $n - 1$. Par propagation par le flot, elle engendre une nouvelle solution de l'équation eiconale $\tilde{\Lambda}$, qui est la obtenue à partir de Λ par réflexion sur le miroir \mathcal{M} . Il est facile de vérifier que les rayons lumineux sont bien obtenus par la loi usuelle de l'optique géométrique.

On peut du reste obtenir facilement une famille de fonctions phases. Si $\Lambda = \Lambda_\varphi$, on pose (dans le cas $n/c = 1$) $\psi(x, \alpha, \theta) = \varphi(\alpha, \theta) + d(x, \alpha)$, où $\alpha \in \mathcal{M}$.

14. Introduction à KAM

KAM sont les initiales de Kolmogorov, Arnold et Moser. L'idée originale remonte à Kolmogorov (1954) (voir [Kol54]) traduit dans [AM78]) et les premiers énoncés ont été donnés par Arnold [Arn63] et Moser [Mos62] en 62-63. Pour des présentations récentes, voir [Bos86] ou [LM88]. Depuis Poincaré, on sait que les

systèmes hamiltoniens génériques ne sont pas intégrables. Il est donc important d'étudier les systèmes proches des systèmes intégrables. Le théorème de Birkhoff assure l'existence d'orbites fermées, les théorèmes KAM assurent l'existence de tores invariants sur lesquels la dynamique est quasi-périodique.

14.1. Systèmes intégrables. On va se placer dans un cadre C^∞ (comme Moser), mais la théorie analytique développée par Arnold est aussi intéressante. Soit (Z, ω) une variété symplectique de dimension $2n$.

DÉFINITION 24. *Un hamiltonien $H : Z \rightarrow \mathbb{R}$ est dit complètement intégrable s'il existe de n fonctions $F_j : Z \rightarrow \mathbb{R}$ en involution pour le crochet de Poisson, fonctionnellement indépendantes presque partout, telles que l'application moment $F = (F_j) : Z \rightarrow \mathbb{R}^n$ est propre et qu'il existe une fonction Φ de n variables avec $H = \Phi(F_1, \dots, F_n)$.*

La variété Z est ainsi munie d'une action de \mathbb{R}^n presque partout libre dont les orbites sont contenues dans les fibres de l'application moment. Si a_0 est une valeur non critique de F , la fibre $F^{-1}(a_0)$ est une réunion de tores lagrangiens sur lesquels la dynamique est linéarisable.

Il existe de nombreux exemples classiques : le problème à 2 corps pour un potentiel central, le flot géodésique sur un ellipsoïde. Il y a aussi des exemples en dimension infinie : l'équation de Korteweg-de Vries.

14.2. Intégrabilité du billard elliptique. Soit E une ellipse de foyer F et F' . Soit D_1 une droite qui coupe E . On pose $I(D_1) = d(F, D_1).d(F', D_1)$. Si D_2 est réfléchi en $M \in E$ de D_1 par la loi *angle de réflexion = angle d'incidence*, $I(D_1) = I(D_2)$. La preuve est purement géométrique et utilise uniquement le fait que les angles de (D_1, MF) et (D_2, MF') sont égaux. Il faut identifier 2 paires de triangles semblables : si on note m_1, m_2 (resp. m'_1, m'_2) les projections orthogonales de F (resp. F') sur D_1 et D_2 , les triangles m_1FM et $m'_2F'M$ d'une part, m_2FM et $m'_1F'M$ d'autre part, sont semblables. Donc

$$\frac{Fm_1}{FM} = \frac{F'm'_2}{F'M}, \quad \frac{Fm_2}{FM} = \frac{F'm'_1}{F'M},$$

d'où la relation cherchée.

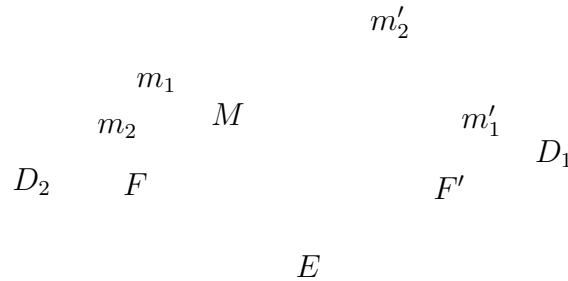


FIGURE 6. Intégrabilité du billard elliptique

14.3. Coordonnées actions-angles.

THÉORÈME 19. *Soit (Z, ω, F) un système complètement intégrable avec F propre. Soit $\Lambda_a \subset F^{-1}(a)$ une feuille connexe compacte du feuilletage lagrangien. Alors Λ est un tore de dimension n sur lequel la dynamique est quasi-périodique. Il existe des coordonnées $(x_1, \dots, x_n) \in T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ telles que le flot Φ_t de H est donné par*

$$\Phi_t(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + t\omega_1, \dots, x_n + t\omega_n)$$

où $\Omega(a) = (\omega_j(a))$ est un vecteur constant sur Λ_a .

Preuve. –

Les vecteurs \mathcal{X}_{F_j} commutent et sont indépendants en tout point de Λ_a . Ils définissent donc une action de \mathbb{R}^n localement libre. Le groupe d'isotropie est donc un réseau et Λ_a un tore sur lequel les dynamiques des \mathcal{X}_{F_j} et de $\mathcal{X}_H = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial t_j} \mathcal{X}_{f_j}$ sont quasi-périodiques. □

On peut même décrire un système de coordonnées semi-globales (θ, I) appelées *coordonnées actions-angles*.

THÉORÈME 20. *Soit (Z, ω, F) un système complètement intégrable avec F propre. Soit $\Lambda_0 \subset F^{-1}(a_0)$ un tore lagrangien invariant. Il existe :*

- un voisinage invariant U de Λ_0 .
- Un difféomorphisme symplectique χ de U sur un ouvert $V = \{(\theta, I) \in T^*T^n \mid |I - I_0| \leq r\}$

tels que les tores $\chi(\Lambda_a)$, pour a proche de a_0 , soient les tores $I = \text{constante}$.

Les actions I_j sont données par $I_j(z) = \int_{\gamma_j(z)} \xi dx$ où $\gamma_j(z)$ est un lacet de la variété Λ_a qui passe par z dont l'image par χ est homotope au j -ème lacet de base de T^n . Les $F_j \circ \chi^{-1}$ sont des fonctions des I_j ; en particulier $H \circ \chi^{-1} = K(I_1, \dots, I_n)$.

Preuve. –

- (1) *Le cas de la dimension 1* : soit H un hamiltonien sur une variété symplectique de dimension 2 supposé propre. Soit $[E_0, E_1]$ un intervalle de \mathbb{R} ne contenant pas de valeurs critiques de H . On suppose que $\Sigma = H^{-1}([E_0, E_1])$ est connexe. C'est alors un anneau feuilleté par les trajectoires $\gamma_E = H^{-1}(E)$ de \mathcal{X}_H . Soit $E \rightarrow \delta(E)$ un arc transverse aux γ_E . Soit $\chi(E, t) = \varphi_t(\delta(E))$, alors χ est un difféomorphisme canonique de

$$\{(E, t) \mid E_0 \leq E \leq E_1, 0 \leq t \leq T(E)\}$$

(où $T(E)$ est la période de γ_E) muni de $\omega_0 = dE \wedge dt$ sur (Σ, ω) . Le caractère canonique vient de $\omega(\mathcal{X}_H, \delta'(E)) = -1$. On en déduit, en posant $I(E) = \int_{\gamma_E} \xi dx$ que $I(E) - I(E_0) = \int_{E_0}^E T(E) dE$ et que $I'(E) = T(E)$. Donc, si on prend $H = I$, on a $T(E) = 1$.

- (2) *Le flot hamiltonien des intégrales d'action* : on peut supposer que U est symplectomorphe à un voisinage de la section nulle de T^*T^n muni de coordonnées canoniques (x, ξ) telles que Λ_0 est la section nulle. Soit $z_0(t) = (t, 0, \dots, 0; 0)$. Montrons

que $\gamma_0 : t \rightarrow z_0(t)$ est une orbite de l'hamiltonien d'action $I_1 = \int_{\gamma_1(z)} \xi dx$. Pour cela, il suffit de montrer que γ_0 est une extrémale de $A(\gamma) = \int_{\gamma} (\xi dx - I_1 dt)$. Les variations *horizontales* ne changent pas $A(\gamma)$. Soit $\gamma_\varepsilon(t) = (t, 0, \dots, 0; \varepsilon \xi(t))$ une variation verticale. On peut supposer que le chemin γ_z sur lequel sera calculé $I_1(z)$ se projette sur $(t, 0)$. $A(\gamma)$ se calcule donc dans $T^*(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. On est ainsi ramené au cas de la dimension 1: le champ hamiltonien de I_1 le long de γ_0 est alors d/dt et de l'égalité $d\xi \wedge dx = dI_1 \wedge dt$ le long de γ_0 , on déduit $dI/d\xi = 1$ sur γ_0 . Cela suffit à conclure.

- (3) *Les coordonnées actions-angles* : de ce qui précède, on déduit que dI_1, dI_2, \dots sont linéairement indépendantes et que les champs hamiltoniens \mathcal{X}_{I_j} engendrent une action libre de T^n . On choisit alors comme coordonnées les I pour déterminer le tore invariant et, sur chaque tore, des coordonnées θ associées à cette action et telles que $\theta = 0$ soit une section lagrangienne. De l'invariance de ω par les translation en θ et des caractères lagrangiens des variétés $\theta = \text{Constante}$ et $I = \text{Constante}$, on déduit que $\omega = \sum a_{i,j}(I) dI_j \wedge d\theta_j$. La condition $\mathcal{X}_{I_i} = \partial_{\theta_i}$ assure que $a_{i,j} = \delta_{i,j}$.

□

Dans les coordonnées actions-angles, la dynamique est très simple : si

$$\omega(\xi) = \left(\frac{\partial H}{\partial \xi_j} \right),$$

elle s'écrit

$$\varphi_t(x, \xi) = (x + t\omega(\xi), \xi).$$

Un corollaire de la preuve précédente est le suivant :

COROLLAIRE 2. *Soit Λ_0 une feuille lagrangienne complète d'un système complètement intégrable (pas nécessairement propre) ne contenant pas de points critiques de F , soit γ_0 un lacet non trivial du cylindre $\Lambda_0 = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k$ et γ_a un lacet homotope à γ_0 tracé sur Λ_a pour a voisin de a_0 . Alors les trajectoires de l'hamiltonien $H(z) = \int_{\gamma_{F(z)}} \xi dx$ sont de période 1 contenues dans $\Lambda_{F(z)}$ et homotopes à $\gamma_{F(z)}$.*

14.4. Conditions diophantiennes. Un vecteur $\omega \in \mathbb{R}^n$ est dit *diophantien* s'il existe $C > 0$ et $\alpha > n - 1$ tels que

$$(3) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0, \quad | \langle k, \omega \rangle | \geq C \|k\|^{-\alpha}.$$

Si α est fixé et $R > 0$ donné, l'ensemble des $\omega \in B(0, R)$ qui ne satisfont pas l'équation (3) a une mesure de Lebesgue $O(C)$. Autrement dit, pour presque tout ω , il existe $C > 0$ tel que l'équation (3) soit satisfaite.

Exemple : si r est algébrique de degré p et non rationnel, $(r, 1)$ satisfait (3) avec $\alpha = p$.

14.5. Enoncés de type KAM.

LEMME 5. *Soit Λ un tore lagrangien invariant sur lequel la dynamique de \mathcal{X}_H est quasi-périodique avec ω diophantien.*

Il existe des coordonnées (x_j, ξ_j) canoniques telles que Λ soit le tore $\xi = 0$ et que $H = a + \omega \cdot \xi + Q(\xi) + O(\xi^3)$, où $Q(\xi)$ est une forme quadratique.

Preuve.—

D'après Weinstein, il existe un difféomorphisme canonique d'un voisinage de Λ sur un voisinage de la section nulle de $T^*\Lambda$. On a alors $H = a + \omega\xi + R(x, \xi)$ avec $R = O(\xi^2)$ (identification de \mathcal{X}_H avec $\sum \omega_j \frac{\partial}{\partial x_j}$). On cherche alors une transformation canonique qui fixe Λ et change R en $Q(\xi) + O(\xi^3)$. On peut chercher χ comme flot à l'instant 1 de $\mathcal{X}_{S(\xi, x)}$ avec $S = O(\xi^2)$. On a alors

$$(4) \quad \chi(x, \xi) = (x + O(\xi), I - \frac{\partial S}{\partial x} + O(\xi^3)).$$

Donc

$$(5) \quad H \circ \chi = \omega\xi - \omega \cdot \frac{\partial S}{\partial x} + R(x, \xi) + O(\xi^3) .$$

Il faut donc résoudre

$$(6) \quad R(x, \xi) - \omega \frac{\partial S}{\partial x} = Q(\xi) + O(\xi^3) .$$

En prenant les termes d'ordre 2 dans les séries de Taylor en ξ , il vient

$$(7) \quad R_{i,j}(x) - \omega \cdot \frac{\partial S_{i,j}(x)}{\partial x} = Q_{i,j} .$$

On développe $R_{i,j} = \sum r_l e^{ilx}$ et $S_{i,j} = \sum s_l e^{ilx}$ en séries de Fourier et on pose $Q_{i,j} = r_0$, et

$$s_l = \frac{r_l}{< l | \omega >} .$$

La condition diophantienne sur ω montre que S est C^∞ .

□

On introduit alors la condition :

(*) La forme quadratique Q est non dégénérée.

On a alors le :

THÉORÈME 21. *Soit H ayant un tore lagrangien Λ invariant avec dynamique quasi-périodique diophantienne ω et vérifiant (*).*

L'hamiltonien $H + \varepsilon K$ admet pour ε assez petit un tore lagrangien invariant proche de Λ et avec une dynamique conjuguée à celle de H .

14.6. Méthode de Newton. La méthode de preuve introduite par Moser et perfectionnée par plusieurs auteurs fait appel à un théorème de fonctions implicites avec pertes de dérivées dans les espaces de Fréchet. L'idée est d'employer une méthode de Newton avec un lissage.

Montrons comment écrire et résoudre le problème linéarisé. On a donc $H_\varepsilon = H + \varepsilon K$. On suppose

$$H = \omega\xi + Q(\xi) + O(\xi^3)$$

où Q est une forme quadratique non dégénérée. On cherche une transformation canonique

$$\chi_\varepsilon(x, \xi) = (x + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial x} + O(\varepsilon^2), \xi - \varepsilon \frac{\partial S}{\partial x} - \varepsilon V + O(\varepsilon^2))$$

avec $S = S_0 + \sum \xi_k S_k + O(\xi^2)$ telle que

$$H_\varepsilon \circ \chi_\varepsilon = H + \varepsilon C + O(\varepsilon^2) + O(\xi^2) .$$

Dans ce cas, il est clair qu'au premier ordre en ε les dynamiques de H sur T_0 et de H_ε sur $\chi_\varepsilon(T_0)$ sont conjuguées.

Le calcul mène à un système d'équation linéaires pour les dérivées partielles de S_0 et des S_k par rapport à x que l'on peut résoudre grâce au fait que Q est non dégénérée et ω diophantien.

14.7. Tores de dimension plus petite. Il existe des théorèmes de type KAM pour des tores quasi-périodiques diophantiens de dimension $k < n$ avec une condition d'hyperbolicité (de type Anosov) pour la dynamique transverse.

14.8. Forme normale de Birkhoff. On a une forme normale de Birkhoff classique près de Λ (comparer à [Col77a] et [Col73a]). La forme normale de Birkhoff classique est de la forme

$$H \sim H(\Lambda) + \omega\xi + \sum_{i=2}^{\infty} Q_i(\xi)$$

où Q_l est homogène de degré l en ξ . Donc formellement le système est complètement intégrable près de Λ .

14.9. Perturbations des systèmes CI : le cas classique. Les hypothèses de non dégénérescence :

(ND) $\xi \rightarrow [\omega(\xi)]$ est une submersion de Ω sur un ouvert du projectif $P(\mathbb{R}^n)$.

ou (et)

(NDE) l'application $\xi \rightarrow [\omega(\xi)]$ est un difféomorphisme de chaque couche d'énergie $H = E$ sur un ouvert du projectif.

Lorsque $\omega(p)$ est multiple d'un vecteur entier les trajectoires sont périodiques : on a une famille à $n - 1$ paramètres de trajectoires périodiques, ce qui n'est pas générique ainsi que l'a observé Poincaré.

Par perturbation de H cette famille éclate en général en un nombre fini de trajectoires périodiques : du point de vue calcul des variations, on a une variété critique non dégénérée au sens de Bott sous l'hypothèse (ND).

14.10. Le théorème KAM de Lazutkin-Poeschel. Le théorème KAM affirme que, sous l'hypothèse (ND), les tores sur lesquels le ω est suffisamment irrationnel sont préservés par une petite perturbation, plus précisément :

soit $\beta > n - 1$ et $C > 0$, on définit

$$K_{C,\beta} = \{\xi \mid \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0, \mid < k | \omega(\xi) > \mid \geq C \|k\|^{-\beta}\}.$$

Alors, il est facile de voir que $|\Omega \setminus K_{C,\beta}| = O(C)$.

Soit $H_\epsilon = H + \epsilon K(x, \xi)$, alors les tores correspondant à $\xi \in K_{C,\beta}$ continuent à exister pourvu que $\epsilon = O(C^2)$.

En fait, on a un résultat beaucoup plus précis du à Lazutkin et généralisé par Pöschel : il existe des coordonnées actions-angles telles que dans ces coordonnées H_ϵ soit seulement fonction de p sur $T^n \times K_{C,\beta}$.

14.11. Le cas de la dimension 2. En dimension 2, sous l'hypothèse (NDE) sur chaque couche de niveau $K_1 \cap \{H(p) = E\}$ est un Cantor dont le complémentaire a une infinité de composantes connexes. C'est dans ces composantes que vont se trouver les trajectoires périodiques de l'hamiltonien perturbé.

14.12. Applications.

- *La stabilité des orbites périodiques elliptiques génériques en dimension 2.*

Soit γ une trajectoire périodique d'un système hamiltonien à 2 degrés de liberté. γ ne peut être stable au sens de Liapounov que si l'application de Poincaré P_γ est elliptique. Une des conséquences des théorèmes KAM est l'existence de courbes invariantes entourant l'origine dans la section de Poincaré dès que le terme de twist dans la forme normale de Birkhoff de P_γ est non nul. Les disques bordés par ces courbes forment une base de voisinage du centre de la section de Poincaré invariante par P_γ montrant ainsi la stabilité au sens de Liapounov de l'orbite.

- *L'hypothèse ergodique n'est pas satisfaite pour un système hamiltonien générique.*

En effet, si un hamiltonien admet une orbite elliptique (ce qui est une condition satisfaite dans un ouvert non trivial de l'ensemble des hamiltoniens), il y aura génériquement au voisinage de cette orbite une région invariante de mesure > 0 : la réunion des tores KAM.

- *Les caustiques des billards convexes de dimension 2.*

Lazutkin a appliqué une version ad'hoc de KAM pour montrer qu'un billard bidimensionnel dont le bord est à courbure partout > 0 admet une famille cantorienne de caustiques s'accumulant sur le bord.

14.13. Problèmes. La théorie KAM a été étendue avec succès à de nombreux cas de dimension infinie, comme les perturbations de KdV.

La diffusion d'Arnold : Arnold a imaginé un mécanisme laissant la porte ouverte à la non stabilité des orbites elliptiques des systèmes hamiltoniens à plus de 2 degrés de liberté.

La théorie d'Aubry-Mather est une extension de la théorie KAM qui laisse la place à des ensembles invariants non lisses, de nature cantorienne. Lorsqu'on perturbe un système intégrable les tores KAM vont progressivement disparaître, leur trace sera des ensembles de type Aubry-Mather.

MÉCANIQUE QUANTIQUE ET THÉORIE SPECTRALE

Le but de ce chapitre est de présenter quelques éléments d'analyse fonctionnelle et de théorie spectrale qui sont des outils de base en mécanique quantique. Les références [RS80] (tome 1) et [BGM71] sont bien adaptées.

1. Opérateurs autoadjoints

Il s'agit de définir de façon précise ce qu'on entend par opérateur auto-adjoint dans le cas d'un opérateur non partout défini sur un espace de Hilbert, par exemple un opérateur différentiel.

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, on note $\langle . | . \rangle$ son produit scalaire et on introduit les notions suivantes :

1.1. Opérateurs à domaine. C'est la donnée d'un couple $(A, D(A))$ formé d'un sous-espace $D(A)$ dense de \mathcal{H} , le *domaine* de A et d'une application linéaire A de $D(A)$ dans \mathcal{H} .

1.2. Graphes. Le *graphe* de $(A, D(A))$, noté G_A , est défini par :

$$G_A = \{(x, Ax) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \mid x \in D(A)\} .$$

1.3. Opérateurs fermés. On dit que $(A, D(A))$ est *fermé* si son graphe l'est dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Si l'adhérence du graphe est encore un graphe, on définit la *fermeture* de A comme l'opérateur (fermé) dont le graphe est l'adhérence de celui de A .

1.4. Opérateurs symétriques. Un opérateur $(D(A), A)$ est dit *symétrique* si :

$$\forall x, y \in D(A), \langle Ax | y \rangle = \langle x | Ay \rangle .$$

Pour un opérateur différentiel sur la variété X munie d'une forme volume, on dit parfois qu'il est formellement symétrique s'il l'est avec comme domaine l'espace $C_o^\infty(X)$.

1.5. Adjoint. On définit l'*adjoint* $(A^*, D(A^*))$ de $(A, D(A))$ de la façon suivante :

$$x \in D(A^*) \text{ si et seulement si } z \rightarrow \langle Az | x \rangle$$

se prolonge continument à \mathcal{H} ; par le théorème de représentation de Riesz, et le fait que $D(A)$ est dense, on a alors :

$$\langle Az | x \rangle = \langle z | y \rangle ,$$

et on pose $y = A^*(x)$. L'adjoint est toujours fermé et si A est symétrique son adjoint en est un prolongement, et en particulier tout opérateur symétrique est fermable.

Un opérateur $(A, D(A))$ est autoadjoint s'il est égal (avec domaine) à son adjoint. Il est essentiellement autoadjoint si sa fermeture est autoadjointe, dans ce cas il n'a qu'une extension autoadjointe. Noter qu'un opérateur symétrique peut n'avoir aucune extension auto-adjointe !!

C'est le cas de $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ sur \mathbb{R}^+ .

1.6. Reformulation symplectique. On se rend compte que les propriétés précédentes (fermeture, symétrie, auto-adjonction) sont en fait des propriétés du graphe de A . Il est tentant de les reformuler en termes de géométrie symplectique. Soit ω définie sur $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ par $\omega((z_1, z_2), (z'_1, z'_2)) = \langle z_1 | z'_2 \rangle - \langle z_2 | z'_1 \rangle$. La forme ω est sesquilinéaire et antihermitienne. Si \mathcal{H} est un Hilbert sur \mathbb{R} , ω est symplectique. Alors on a le dictionnaire suivant entre les propriétés de G_A et celles de A :

- ω -isotrope = symétrique
- ω -lagrangien = auto-adjoint.

1.7. Formes quadratiques. On définit de même une forme quadratique positive $(q, D(q))$ par son domaine $D(q) \subset \mathcal{H}$, et q est alors une forme quadratique au sens algébrique sur $D(q)$. On dit que $(q, D(q))$ est *fermée* si $D(q)$ est complet pour la norme

$$\|x\|^2 = \|x\|_{\mathcal{H}}^2 + q(x) .$$

Dans ce cas, on peut associer canoniquement à q un opérateur autoadjoint $(A_q, D(A_q))$ dont le domaine est contenu dans $D(q)$; cet opérateur s'appelle *extension de Friedrichs* de q . Le domaine de A_q est l'ensemble des $x \in D(q)$ tels que $y \rightarrow q(x, y)$ s'étend continument à \mathcal{H} et on pose alors $q(x, y) = \langle A_q x | y \rangle$.

Cela est utile pour définir des opérateurs symétriques à coefficients irréguliers, par exemple des laplaciens pour des métriques semi-continues inférieurement.

2. Spectre d'un opérateur autoadjoint

Un opérateur fermé $(A, D(A))$ est dit *invertible* si A est une bijection de $D(A)$ sur \mathcal{H} . Dans ce cas, l'inverse est continu d'après le théorème du graphe fermé. On appelle *spectre* d'un opérateur l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda \text{Id} - A$ ne soit pas invertible. On note $\sigma(A)$ l'ensemble de ces λ . C'est un fermé de \mathbb{C} . La résolvante $(\lambda - A)^{-1}$ est une fonction holomorphe de $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. On dit que λ est une valeur propre si $(\lambda - A)$ n'est pas injectif. Un spectre peut ne contenir aucune valeur propre ; c'est le cas de la multiplication par une fonction bornée qui n'est constante sur aucun ensemble de mesure > 0 dans $L^2(X)$.

Si $(A, D(A))$ est autoadjoint, son spectre est un sous-ensemble fermé non vide de \mathbb{R} . Ce ne serait pas vrai si on n'avait pas pris la définition forte (avec domaine) d'opérateurs auto-adjoints.

Un opérateur A est dit à résolvante compacte si la résolvante $(\lambda - A)^{-1}$ est pour une valeur de λ et donc pour toutes un opérateur compact de \mathcal{H} . Dans ce cas, le spectre est constitué de valeurs propres de multiplicité finie s'accumulant seulement en $l' \infty$ et la résolvante est méromorphe sur \mathbb{C} .

Pour vérifier que A , supposé autoadjoint, est à résolvante compacte, il suffit de montrer que la boule unité de $D(A)$ pour la norme du graphe est une partie relativement compacte de \mathcal{H} .

La théorie spectrale de ces opérateurs est très simple : \mathcal{H} est somme directe hilbertienne des espaces propres qui sont de dimension finie. En particulier, \mathcal{H} admet une base orthonormée (non unique) formée de fonctions propres.

2.1. Calcul fonctionnel. On suppose $(A, D(A))$ autoadjoint et $X = \sigma(A)$. Alors il existe un homomorphisme continu de l'algèbre des fonctions continues bornées sur $\sigma(A)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ qui envoie $(\lambda - x)^{-1}$ sur la résolvante $(\lambda - A)^{-1}$. On peut en particulier ainsi définir l'exponentielle e^{itA} , les fonctions e^{-tA} , $t > 0$ (si A à un spectre borné inférieurement) et les fonctions A^{-s} pour $\Re(s) > 0$ si $0 \notin \sigma(A)$.

2.2. Opérateurs à trace. On définit les valeurs singulières d'un opérateur compact A comme les racines carrées $\mu_j(A) \geq 0$ des valeurs propres de A^*A .

Un opérateur est dit de classe \mathcal{I}_p si la somme

$$\sum_j (\mu_j(A))^p$$

est finie.

La classe \mathcal{I}_1 est celle des opérateurs à trace. La classe \mathcal{I}_2 celle des opérateurs de Hilbert-Schmidt. On a un homomorphisme canonique *appelé* trace défini sur \mathcal{I}_1 et à valeurs complexes. Sur les opérateurs de rang fini, c'est la trace ordinaire et on prolonge par continuité au sens de la topologie naturelle de \mathcal{I}_1 . Attention : un opérateur à noyau continu même sur une variété compacte peut ne pas être à trace. Penser à un opérateur de convolution sur le cercle, il sera à trace seulement si la série de Fourier est absolument convergente.

2.3. Trace au sens des distributions. On peut souvent définir une trace au sens des distributions pour une famille d'opérateurs dépendant d'un paramètre réel. Soit $C(t)$ une telle famille d'opérateurs bornés et supposons que, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, l'opérateur $\int_{\mathbb{R}} C(t)\varphi(t)dt$ soit à trace. L'application

$$\varphi \rightarrow \text{Tr}\left(\int_{\mathbb{R}} C(t)\varphi(t)dt\right)$$

définit alors une distribution sur \mathbb{R} . C'est le cas pour le groupe unitaire $U(t) = e^{itA}$ associé à un opérateur autoadjoint à résolvante compacte dont le spectre est à croissance polynomiale. On a alors :

$$\langle \text{Tr}(U(t)e^{-it\lambda}) | \rho \rangle = \sum_j \int_{\mathbb{R}} e^{it(\lambda_j - \lambda)} \rho(t) dt = \sqrt{2\pi} \sum_j \hat{\rho}(\lambda - \lambda_j) ,$$

où $\hat{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda} \rho(t) dt$ est la transformée de Fourier de ρ . On obtient ainsi la densité régularisée de valeurs propres, convolution de $\sum_j \delta(\lambda - \lambda_j)$ avec la fonction $\hat{\rho}$.

3. Minimax

On considère dans la suite un opérateur autoadjoint A ayant une suite de valeurs propres de multiplicité finie

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots < E_0 \leq \infty ,$$

où E_0 est la borne inférieure du spectre essentiel de A .

Si $q(x) = \langle Ax|x \rangle$ est la forme quadratique associée à A et donc A l'extension de Friedrichs de q , on peut caractériser les λ_j par

$$\lambda_j = \inf_F \left(\sup_{x \in F \setminus 0} \frac{q(x)}{\|x\|^2} \right),$$

où F parcourt les sous-espaces de dimension j de $D(q)$. En particulier si $A \leq B$ les valeurs propres vérifient

$$\lambda_j(A) \leq \lambda_j(B).$$

4. Laplaciens et opérateurs de Schrödinger

On considère une variété riemannienne (X, g) , soit $\mathcal{H} = L^2(X, v_g)$, où v_g désigne l'élément de volume riemannien $v_g = \theta|dx|$, avec $\theta(x) = \sqrt{\det g_{ij}}$. On définit une forme quadratique sur $C_o^\infty(X)$ par $q(f) = \int_X \|df\|^2 v_g$, où la norme de df est calculée avec la structure euclidienne canonique de chaque $T_x^*(X)$ donnée par la matrice $g^{ij} = g_{ij}^{-1}$.

A cette forme quadratique est associé un opérateur différentiel symétrique sur $C_o^\infty(X)$ caractérisé par :

$$q(f, h) = \langle \Delta_g f | h \rangle.$$

En coordonnées locales

$$\Delta_g f = -\theta^{-1} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \theta g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

On s'intéressera souvent à des opérateurs de Schrödinger qui sont définis de la façon suivante. On se donne un champ magnétique B qui est une 2-forme fermée sur (X, g) à valeurs réelles et un fibré en droites complexes L au-dessus de X muni d'une structure hermitienne et d'une connection ∇ préservant cette structure et de courbure B . On se donne également un potentiel électrique V . On construit alors une forme quadratique q sur $C_o^\infty(X, L)$ par

$$q(f) = \frac{1}{2} \int_X (\|\hbar \nabla f\|^2 + V(x)|f|^2) v_g.$$

L'opérateur de Schrödinger est caractérisé par : $\langle H_{g,B,V} f | h \rangle = q(f, h)$. En fait cette définition est un peu trop rapide. L'existence du fibré L nécessite que $\frac{1}{2\pi} B$ soit une classe de cohomologie entière. Le fibré avec connection n'est alors en général pas unique, on peut le tordre par un fibré plat.

On doit maintenant choisir une extension autoadjointe de H . Si (X, g) est complète et $V \geq 0$, il n'y a pas de choix, l'opérateur est essentiellement autoadjoint. Sinon, il peut y avoir plusieurs extensions : par exemple si (X, g) est un domaine à bord lisse d'une variété \tilde{X} , il faut choisir des conditions au bord (Neumann, Dirichlet, etc...).

On obtient un opérateur à résolvante compacte dès que l'une des 2 conditions suivantes est vérifiée :

X est compacte ou $V(x)$ tend vers $+\infty$ à l'infini de X .

Si on a $\liminf_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0$, alors la partie négative du spectre est constituée de valeurs propres isolées de multiplicités finies.

5. Exemples de spectre

Il s'agit des exemples les plus classiques auxquels il faut se référer souvent.

5.1. Oscillateurs harmoniques. On considère sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, l'opérateur de Schrödinger

$$\Omega = \frac{1}{2}(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^2) .$$

La théorie générale nous apprend que cet opérateur est essentiellement autoadjoint et à résolvante compacte. En outre, il est positif, car

$$\langle \Omega f | f \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (f'^2 + x^2 f^2) dx .$$

Soit maintenant $B = \hbar \frac{d}{dx} + x$ et $B^* = -\hbar \frac{d}{dx} + x$, l'adjoint formel de B . On a les relations :

$$B^* B = 2\Omega - \hbar, [B^*, B] = -2\hbar .$$

Soit alors φ une fonction propre de Ω associée à la valeur propre λ . Alors si $\lambda \neq \frac{1}{2}\hbar$, $B\varphi \neq 0$ et $\Omega(B\varphi) = (\lambda - \hbar)B\varphi$ alors que $\Omega(B^*\varphi) = (\lambda + \hbar)(B^*\varphi)$. On en déduit que le spectre est formé de la suite $\lambda_k = (k - \frac{1}{2})\hbar$, $k \geq 1$. L'espace propre pour la valeur propre $\lambda_1 = \hbar$ est engendré par la fonction $\varphi_1 = e^{-(x^2/2\hbar)}$ et l'espace propre pour λ_k par $(B^*)^k \varphi_1$.

On peut remarquer que la transformée de Fourier commute avec Ω : si

$$\mathcal{F}f(\xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\right) \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x/\hbar} f(x) dx ,$$

on a $\mathcal{F} \circ \Omega = \Omega \circ \mathcal{F}$. \mathcal{F} opère donc diagonalement sur les espaces propres $E_k = \text{Ker}(\Omega - \lambda_k)$. Il est classique que $\mathcal{F}(\varphi_1) = \varphi_1$. Puis on a

$$\mathcal{F} \circ B^* = -iB^* \circ \mathcal{F}$$

d'où l'on déduit que \mathcal{F} opère sur E_k par multiplication par $(-i)^{k-1}$. En particulier, $\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x)$ qui est la formule d'inversion de Fourier. Ce qui est plus intéressant est qu'on a mis la transformée de Fourier dans le groupe à un paramètre

$$U(t) = e^{-it\Omega} .$$

En effet $U(\frac{\pi}{2})$ vaut $e^{-i\frac{\pi}{4}} i^{-k}$ et donc $\mathcal{F} = e^{i\frac{\pi}{4}} U(\frac{\pi}{2})$. Le facteur $\frac{\pi}{4}$ est une manifestation de l'indice de Maslov.

5.2. Application : formulation du principe d'incertitude. Le principe d'incertitude dit qu'une fonction $f(x)$ et sa transformée de Fourier $\hat{f}(\xi)$ ne peuvent être simultanément très localisées. Plus précisément, on a :

$$\int x^2 f^2 \cdot \int \xi^2 \hat{f}^2 \geq \left(\frac{\hbar^2}{4}\right) \left(\int f^2\right)^2 .$$

En effet, si $\Omega_\lambda = \frac{1}{2}(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 x^2)$, le même calcul que plus haut montre que la plus petite valeur propre de Ω_λ est $\lambda\hbar/2$. On a donc pour toute f de norme L^2 égale à 1 :

$$\langle \Omega_\lambda f | f \rangle \geq \frac{\lambda\hbar}{2} .$$

On en déduit :

$$\int \hbar^2 f'^2 + \lambda^2 x^2 f^2 \geq \lambda\hbar$$

et donc

$$\int \xi^2 \hat{f}^2 \cdot \int x^2 f^2 \geq \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 ,$$

qui est une expression du principe d'incertitude.

5.3. Tores plats. On considère \mathbb{R}^n avec la métrique euclidienne $\sum dx_i^2$. Puis un réseau $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ et $X = \mathbb{R}^n/\Gamma$ muni de la métrique quotient. Donc le laplacien Δ est l'opérateur $-\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ opérant sur les fonctions périodiques. On sait que le spectre est constitué de valeurs propres de multiplicité finie. De plus, toute fonction propre φ est C^∞ , car solution d'une équation *elliptique* $(\Delta - \lambda)\varphi = 0$. Les opérateurs $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ commutent entre eux et avec Δ : il y a donc une base de fonctions propres communes. Ce sont des exponentielles e^{ikx} qui doivent être Γ -périodiques, ce qui impose

$$\forall \gamma \in \Gamma, k\gamma \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Cette propriété caractérise un réseau Γ^* dans l'espace des ξ dual de \mathbb{R}^n . On voit alors que Δ admet comme fonctions propres les e^{ikx} avec $k \in \Gamma^*$. Les valeurs propres sont les $\|\gamma^*\|^2$. Cela redonne évidemment la théorie des séries de Fourier.

5.4. Champ magnétique constant en dimension 2. On considère le fibré trivial \mathbb{C} sur \mathbb{R}^2 avec la structure hermitienne constante et on munit \mathbb{R}^2 de la métrique euclidienne. On choisit la 2-forme $Bdx \wedge dy$ (on peut supposer $B > 0$). On choisit alors une 1-forme $A = a_1 dx + a_2 dy$ à valeurs réelles telle que $dA = Bdx \wedge dy$, par exemple : $A = \frac{B}{2}(xdy - ydx)$. On pose alors :

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}((D_1 - a_1)^2 + (D_2 - a_2)^2),$$

et $\nabla_j = D_j - a_j$ ($D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$). Puis $\nabla_z = \frac{1}{2}(\nabla_1 - i\nabla_2)$ et de même $\nabla_{\bar{z}}$. On a les relations suivantes :

$$H = 4\nabla_{\bar{z}}\nabla_z + B, [\nabla_1, \nabla_2] = iB.$$

La méthode algébrique est donc la même que pour l'oscillateur harmonique : le spectre est constitué uniquement de valeurs propres $\lambda_j = B(2j - 1)$ (les niveaux de Landau) et les espaces propres sont de dimension infinie ; E_1 est l'espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^2)$ de la forme

$$e^{-B\frac{z\bar{z}}{4}}\varphi(z),$$

où φ est holomorphe sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

5.5. Harmoniques sphériques. On considère la sphère S^2 dans \mathbb{R}^3 avec la métrique induite par la métrique euclidienne. Le laplacien sur S^2 est la partie angulaire Δ_ω du laplacien euclidien :

$$\Delta_{eucl} = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\Delta_\omega.$$

On a une autre expression utile, si $L_x = \frac{1}{i}(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y})$ et L_y, L_z sont définis de façon analogue, $\Delta_\omega = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$.

Description du spectre : les valeurs propres sont les entiers $\mu_k = k(k+1)$, $k \geq 0$, l'espace propre associé à la valeur propre μ_k est l'espace des restrictions à S^2 des polynômes homogènes de \mathbb{R}^3 harmoniques pour Δ_{eucl} . Cet espace \mathcal{H}_k est de dimension $2k+1$. L_z opère sur chaque \mathcal{H}_k et y admet les valeurs propres $l = -k, -k+1, \dots, k-1, k$. La base usuelle de \mathcal{H}_k est formée de $Y_{k,l}$ associés à cette action de L_z ; par exemple $Y_{k,k}$ est la restriction à S^2 de $(x+iy)^k$.

Il est important de remarquer que les \mathcal{H}_k fournissent des représentations linéaires irréductibles de $SO(3)$ et que ce sont les seules.

Le groupe $SU(2)$ revêtement universel de $SO(3)$ à 2 feuillets admet une liste de représentation paramétrée par un demi-entier (le spin), les spin entier correspondent aux représentations paires (ie qui se factorisent par $SO(3)$).

5.6. Asymptotique semi-classique en riemannien. En l'absence de tout potentiel, on a :

$$\hat{H}_{g,0,0} = \frac{\hbar^2}{2} \Delta_g .$$

Si $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ sont les valeurs propres du laplacien Δ_g , celles de \hat{H} sont $\frac{\hbar^2}{2} \lambda_j$. Si on fixe l'énergie $\frac{\hbar^2}{2} \lambda_j = E > 0$, l'asymptotique quand $\hbar \rightarrow 0$ des valeurs propres de \hat{H} est donnée par le comportement asymptotique des λ_j quand j tend vers l'infini.

6. Opérateurs de Sturm-Liouville

On désigne par ce terme un opérateur symétrique sur $\mathcal{H} = L^2(I, \mathbb{R}^n)$, avec $I = [0, T]$, de la forme

$$Pf = -\frac{d^2}{dt^2}f + A(t)f ,$$

où $A(t)$ est pour chaque t une matrice symétrique réelle $n \times n$ et où le domaine est $C_o^\infty(I)$. Un tel opérateur apparaît naturellement comme associé au hessien d'une extrémale de \mathcal{L} ; par exemple si $L(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - V(x)$, $A(t) = V''(\gamma(t))$.

Il y a un grand choix de conditions aux limites. Si on veut considérer uniquement des opérateurs définis sur les réels, l'ensemble des conditions aux limites est l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de $E = \frac{D(P^*)}{D(P)}$ muni de la forme symplectique $\omega = \langle P^*f|g \rangle - \langle f|P^*g \rangle$. En fait E s'identifie aux conditions aux limites $(f(0), f'(0), f(T), f'(T))$ et ω est donnée par la différence des Wronskiens entre 0 et T , ie $\omega(f, g) = [fg' - gf']_0^T$.

7. Formule de Weyl

C'est le début de l'analyse semi-classique !!

On considère un opérateur de Schrödinger \hat{H} sur une variété X , de dimension n , associé à l'hamiltonien

$$H : T^*(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

de la forme

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{i,j}(x)(\xi_i - a_i)(\xi_j - a_j) + V(x)$$

et on fait l'hypothèse

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} V(x) = E_0 \leq +\infty .$$

On a le résultat suivant (premier résultat semi-classique) démontré par Hermann Weyl pour le problème de Dirichlet dans un domaine euclidien :

THÉORÈME 22. (*formule asymptotique de Weyl*) Soit $E < E_0$, et $N_\hbar(E) = \#\{j | \lambda_j(\hat{H}) \leq E\}$, on a, lorsque $\hbar \rightarrow 0^+$, l'équivalent :

$$N_\hbar(E) \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \text{Vol}\{H(x, \xi) \leq E\} ,$$

ce qui donne $N_\hbar(E) \sim A\hbar^{-n}$, si $E_0 > E > \inf V$.

Preuve.—

Nous nous contenterons de donner la preuve dans le cas où $X = \mathbb{R}^n$, $g = \sum dx_i^2$ la métrique euclidienne et en l'absence de champ magnétique. L'extension au cas général ne pose pas de problème.

Nous verrons plus loin des méthodes plus sophistiquées permettant d'obtenir des estimations sur le reste lorsque E n'est pas valeur critique de h .

La preuve utilise peu de régularité sur V , disons la continuité, mais on peut affaiblir.

L'idée est d'encadrer $N_h(E)$ grâce au principe du minimax et d'obtenir ainsi des sommes de Riemann approchant le volume indiqué.

Soit $a > 0$ donné que l'on fera tendre vers 0 à la fin. Soit $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ un ensemble des cubes de côté a pavant \mathbb{R}^n . Soit $V_-(\alpha)$ (resp $V_+(\alpha)$) le inf (resp le sup) de $V(x)$ sur C_α . Soit $N_-(E, \alpha)$ le nombre de valeurs propres $\leq E$ du problème de Dirichlet sur C_α pour l'opérateur $-\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V_+(\alpha)$ et de même $N_+(E, \alpha)$ pour le problème de Neumann pour $-\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V_-(\alpha)$.

Alors on a :

$$\sum_{\alpha} N_-(E, \alpha) \leq N(E) \leq \sum_{\alpha} N_+(E, \alpha) .$$

En effet, on applique le minimax en comparant

$$q(f) = \int \frac{\hbar^2}{2} \|df\|^2 + V(x)f^2$$

de domaine $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ aux formes q_- et q_+ définies de la façon suivante :

$$D(q_-) = \oplus_{\alpha} C_o^\infty(C_\alpha)$$

et

$$q_-(\oplus \varphi_\alpha) = \sum_{\alpha} \int_{C_\alpha} \frac{\hbar^2}{2} \|d\varphi_\alpha\|^2 + V_+(\alpha)$$

et q_+ définie de façon analogue en prenant comme domaine

$$\oplus_{\alpha} C^\infty(C_\alpha)$$

et les formes quadratiques définies au moyen de $V_+(\alpha)$.

Les spectres de q_- (resp q_+) sont les unions des spectres des problèmes de Dirichlet (resp Neumann) dans les cubes C_α pour des opérateurs de Schrödinger avec potentiel constant V_+ (resp V_-).

Il reste maintenant à obtenir des évaluations asymptotiques pour $N_\pm(E, \alpha)$ lorsque \hbar tend vers 0^+ .

Il est d'abord clair que $N_\pm(E, \alpha)$ est nul si $V_\pm(\alpha) > E$. Les sommes encadrant $N(E)$ sont donc finies. Il suffit de trouver un équivalent de chaque terme.

Par exemple, les valeurs propres du problème de Dirichlet sur I^n (avec $I = [0, a]$) pour $-\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V_+$ sont les nombres

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\pi}{a}\right)^2 \sum_{j=1}^n n_j^2 + V_+$$

où les n_j sont des entiers ≥ 1 . Les fonctions propres associées sont les

$$\prod_j \sin\left(\frac{\pi n_j x_j}{a}\right).$$

$N_-(E, \alpha)$ est donc le nombre de points entiers dont toutes les coordonnées sont ≥ 1 dans la boule euclidienne de rayon r donné par

$$r^2 = \frac{2(E - V_+)a^2}{\pi^2 \hbar^2}.$$

L'évaluation asymptotique du nombre de points entiers dans une boule dont le rayon tend vers l'infini donne :

$$N_-(E, \alpha) \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} a^n \text{Vol}\left\{\frac{1}{2}\xi^2 + V_+(\alpha) \leq E\right\}.$$

De même, on trouve pour $N_+(E, \alpha)$ la même formule où $V_+(\alpha)$ est remplacé par $V_-(\alpha)$.

On voit ainsi que les sommes $\sum N_{\pm}(E, \alpha)$ sont équivalentes lorsque \hbar tend vers 0 à des sommes de Riemann pour l'intégrale

$$\int_{V(x) \leq E} \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \text{Vol}_{\xi}\left\{\frac{1}{2}\xi^2 + V(x) \leq E\right\},$$

qui convergent lorsque \hbar tend vers 0 vers cette intégrale qui est exactement l'équivalent donné par la formule de Weyl.

Dans le cas riemannien, il est facile d'adapter la preuve : on considère un recouvrement ouvert du compact K où on a $V \leq E$ de X par des cartes telles que g est presque euclidienne. On recouvre chacune de ces cartes par des petits cubes de côté a pour ces métriques euclidiennes. On refait la même preuve en prenant Dirichlet dans une famille maximale de cubes disjoints et Neumann dans une famille minimale de cubes recouvrant K . On a ainsi l'équivalent cherché à ε près pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui donne le résultat.

□

L'asymptotique précédente redonne l'asymptotique des valeurs propres pour le laplacien d'une variété riemannienne compacte : si λ_j sont les valeurs propres de Δ_g sur X , les valeurs propres de $\frac{\hbar^2}{2}\Delta_g$ sont les $\frac{\hbar^2}{2}\lambda_j$ et donc on a l'équivalent

$$\#\{j \in \mathbf{N} | \lambda_j \leq \lambda\} \sim \frac{B_n \text{Vol}(X, g)}{(2\pi)^n} \lambda^{n/2},$$

où B_n est le volume de la boule unité de \mathbb{R}^n .

On peut à titre d'exercice vérifier les asymptotiques précédentes pour les oscillateurs harmoniques, les sphères et les tores plats.

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS, MICROLOCALISATION

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions de façon systématique la théorie des opérateurs pseudo-différentiels dépendant d'un petit paramètre, noté h , appelé aussi opérateurs " h -pseudo-différentiels" ou opérateurs "pseudo-différentiels semi-classiques".

Outils essentiels de l'analyse des équations aux dérivées partielles linéaires, les *opérateurs pseudo-différentiels* (ΨDO en abrégé) ont d'abord été introduits sous le nom d'*opérateurs intégraux singuliers* par Calderon et Zygmund dans les années 60. Cette théorie a été ensuite grandement développée par Nirenberg, Trèves et surtout Hörmander. C'est une théorie sans petit paramètre où l'objet d'étude est l'espace \mathcal{D}'/C^∞ des singularités des distributions de Schwartz. La théorie est sous-tendue par la géométrie homogène par dilatation de l'espace cotangent T^*X de la variété X (géométrie dite de *contact*).

Parallèlement, on peut développer une théorie non homogène où l'on étudie des classes de fonctions dépendant d'un paramètre réel tendant vers 0 de façon discrète ou continue. On note traditionnellement ce paramètre h en souvenir de la mécanique quantique. Cette théorie a été développée d'abord par l'école russe (Maslov, Fedoriuk), puis par Duistermaat ainsi que Leray, Robert-Helffer en France.

Nous présentons ici cette théorie à petit paramètre dans laquelle les grands outils trouvent une place naturelle :

calcul symbolique, microsupports, calcul fonctionnel, opérateurs intégraux de Fourier, formes normales, mesures semi-classiques etc...

Cette théorie s'applique à l'étude des solutions d'EDP dépendant d'un petit ou d'un grand paramètre : limite classique de l'équation de Schrödinger, limite de l'optique géométrique pour les équations de Maxwell, asymptotique des grandes valeurs propres et des fonctions propres associées du laplacien riemannien, limite adiabatique quantique.

Le but est de faire vivre les fonctions sur une variété X sur l'espace des phases associé T^*X . A cause du principe d'incertitude, ce n'est possible que dans le régime $h \rightarrow 0$. Dans ce régime, on peut parler de *microlocalisation*, c'est-à-dire de localisation dans l'espace des phases : il s'agit d'une notion asymptotique. A partir des familles admissibles (u_h) de distributions sur X et de celles qui sont négligeables, on décrit un des objets principaux : le faisceau des h -microfonctions sur l'espace cotangent "compactifié" par les sphères à l'infini, la partie à l'infini étant associée aux fréquences $\gg 1/h$. Nous décrivons ensuite l'outil analytique principal : la méthode de la *phase stationnaire* qui prédit les interférences d'une superposition d'ondes de grandes fréquences. Cela nous permet d'introduire la notion d'*opérateurs h -pseudo-différentiels* qui opèrent sur les microfonctions. Le calculus

des opérateurs h -pseudo-différentiels est décrit dans le cadre simple des symboles à support compact et ensuite étendu au cas plus délicat des symboles asymptotiquement homogènes à l'infini. La notion d'*ellipticité* permet de redonner une définition plus souple du *microsupport* (noté $\widehat{WF}(u_h)$) et de prédire la microlocalisation des solutions asymptotiques des EDP. On introduit enfin le calcul fonctionnel, puis les *mesures semi-classiques* ou de *Husimi*.

1.1. Notations.

- Symboles : l'indice m réfère à la puissance de h , l'indice l à l'*homogénéité* à l'infini. Si Z est une variété conique, on a les espaces

$$\Sigma_o^m(Z) \subset \Sigma^{m,l}(Z) \subset \Sigma^{m,\infty}(Z)$$

et l'espace $S^l(Z)$ (symboles indépendants de h).

- ΨDO : si X est une variété, on a

$$\Psi_o^m(X) \subset \Psi^{m,l}(X) \subset \Psi^{m,\infty}(X) .$$

- Microsupport : on a la partie située dans T^*X , notée $WF(u_h)$, la partie à l'infini, notée $WF^\infty(u_h)$ et la réunion

$$\widehat{WF}(u_h) \subset \widehat{T^*X} .$$

- Le *symbole principal* d'un ΨDO \hat{A} est noté $\sigma_p(\hat{A})$ et son *symbole sous-principal* $\sigma_{\text{sub}}(\hat{A})$. On note aussi H_0 ou H_{class} (resp. H_1) le symbole principal (resp. sous-principal) d'un hamiltonien semi-classique \hat{H} . H_0 est alors l'*hamiltonien classique* associé.

2. Familles admissibles et microfonctions

On considère une famille (u_h) de distributions sur une variété X . Dans toute la suite, le petit paramètre h varie dans un sous-ensemble I de $]0, h_0[$ avec $h_0 > 0$ ayant 0 comme point d'accumulation.

DÉFINITION 25. • On dira que la famille de distributions $u = (u_h \in \mathcal{D}'(X), h \in I)$ est à croissance modérée ou admissible si, pour tout compact $K \subset X$, il existe s et N tels que :

$$\|u_h\|_{H^s(K)} = O(h^{-N}) ,$$

où H^s désigne l'espace de Sobolev.

- La famille admissible (u_h) est dite négligeable si chaque u_h est C^∞ et si, pour tout compact $K \subset X$ et pour tout N , toutes les normes $C^k(K)$ de u_h sont $O(h^N)$. On notera $u_h = O(h^\infty)$ le fait que (u_h) est négligeable.
- Grâce au théorème des noyaux de Schwartz, on définit de même les opérateurs admissibles et les opérateurs régularisants.

On aurait pu définir les familles négligeables de façon différente, en demandant que, pour tout compact K , il existe s tel que la norme

$$\|u_h\|_{H^s(K)} = O(h^\infty) .$$

Cela conduirait à une définition différente du wavefront set, mais pour les familles qui nous intéressent et qui sont micro-localisées dans une région compacte de l'espace de phases, cela ne change rien.

Si (u_h) est admissible, on va définir $\widehat{WF}(u_h)$, le *microsupport* de (u_h) , comme un sous-ensemble fermé du compactifié $\widehat{T^*X}$ du fibré cotangent obtenu en ajoutant la sphère à l'infini à chaque fibre ; topologiquement, c'est un fibré en boules fermées de dimension n sur X et on note

$$\widehat{T^*X} = T^*X \cup S^*X .$$

La définition s'inspire de celle de Hörmander : si T est une distribution sur une variété X , Hörmander définit un sous-ensemble conique fermé de $T^*X \setminus 0$ nommé *wave front set* et noté $WF_{Hörmander}(T)$ qui porte les singularités de T : la projection de $WF_{Hörmander}(T)$ sur X est le support singulier de T . La définition précise est la suivante :

$$(x_0, \xi_0) \notin WF_{Hörmander}(T)$$

si et seulement s'il existe $\varphi \in C_o^\infty(X)$ non nulle en x_0 telle que la transformée de Fourier $\mathcal{F}_1(\varphi T)(\xi)$ soit à décroissance rapide dans un voisinage conique de ξ_0 . Bien sûr, cette définition ne paraît pas très intrinsèque (dépendance de φ et des coordonnées locales), mais elle l'est.

On notera

$$\widehat{WF}(u_h) = WF(u_h) \cup WF^\infty(u_h)$$

pour distinguer la partie contenue dans T^*X de la partie contenue dans les sphères à l'infini.

DÉFINITION 26. *Soit (u_h) une famille admissible.*

- *Si (x_0, ξ_0) est un point de l'espace des phases T^*X , on dira que $(x_0, \xi_0) \notin WF(u_h)$, s'il existe une fonction $\varphi \in C_o^\infty(X)$ non nulle en x_0 , un voisinage compact U de ξ_0 et des coordonnées locales au voisinage de $\text{Supp } \varphi$ tels que, pour tout N :*

$$\mathcal{F}_h(\varphi u_h)(\xi)$$

(voir la section 3.1 pour la définition de \mathcal{F}_h) soit $O(h^N)$ uniformément sur U .

- *On dira que $(x_0, \infty\xi_0) \notin WF^\infty(u_h)$ si et seulement s'il existe $\varphi \in C_o^\infty(X)$ avec $\varphi(x_0) \neq 0$, des coordonnées locales au voisinage de x_0 , un voisinage compact V de ξ_0 et un $R > 0$ tels que, pour tout $\xi \in V$, pour tout N et pour tout $\tau \geq R$, on ait :*

$$|\mathcal{F}_h(\varphi u_h)(\tau\xi)| = O(h^N / \tau^N)$$

uniformément sur V .

Il n'est pas clair que ces définitions soient intrinsèques à cause de l'usage de la transformée de Fourier. La définition en termes d'opérateurs pseudo-différentiels (voir 7.1) permettra de donner une caractérisation plus souple. On a en particulier le :

THÉORÈME 23. *Pour toute famille admissible (u_h) , il y a équivalence entre $\widehat{WF}(u_h) = \emptyset$ et (u_h) est négligeable.*

Utilisant ces définitions, on peut définir le *faisceau* des microfonctions :

DÉFINITION 27. Si $U \subset \widehat{T^*X}$, une famille admissible (u_h) est négligeable dans U si $\widehat{WF}(u_h) \cap U = \emptyset$. On définit $\mathcal{M}(U)$ (les microfonctions dans U) comme le quotient des fonctions admissibles par celles qui sont négligeables dans U .

On dira aussi que $(u_h) = (v_h)$ microlocalement près de $z_0 = (x_0, \xi_0)$ si $(x_0, \xi_0) \notin \widehat{WF}((u_h - v_h))$.

On écrira aussi $u_h = v_h + O(h^\infty)$ dans U ou près de z_0 .

La collection des $\mathcal{M}(U)$ forme un faisceau sur $\widehat{T^*X}$ dont les sections sont les fonctions admissibles.

Rappelons que tout opérateur linéaire continu $A : C_o^\infty(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$ est donné par un noyau distribution $K(x, y)|dy|$ avec $K \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ (théorème des noyaux de Schwartz) de façon à avoir :

$$Au(x) = \int_Y K(x, y)u(y)|dy|.$$

DÉFINITION 28. Une famille d'opérateurs linéaires continus $A_h : C_o^\infty(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$ est dite admissible si les noyaux distributions $K_h(x, y)$ forment une famille admissible sur $X \times Y$.

On pose alors $\widehat{WF}'(A_h) = \{(x, y; \xi, -\eta) | (x, y; \xi, \eta) \in \widehat{WF}(K_h)\}$.

Une famille admissible d'opérateurs de noyaux $K_h(x, y)$ est dite propre s'il existe un fermé F de $X \times Y$ contenant les supports des K_h et de projections propres sur X et Y .

3. La phase stationnaire

La phase stationnaire est l'outil de base d'analyse des limites semi-classiques. Il donne une base analytique solide au principe de superposition de Huygens.

3.1. Transformée de Fourier. Fixons d'abord les conventions pour la transformée de Fourier dans \mathbb{R}^n . Si $u \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, on pose :

$$\mathcal{F}_h u(\xi) = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi/h} u(x)|dx|.$$

Et on a donc :

$$\mathcal{F}_h^{-1} v(x) = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi/h} v(\xi)|d\xi|.$$

On a alors la formule classique :

$$\int u \cdot \bar{v} |dx| = \int \mathcal{F}_h u(\xi) \overline{\mathcal{F}_h v(\xi)} |d\xi|.$$

Cette formule s'étend au cas où l'une des fonctions est une distribution tempérée, par exemple une fonction continue bornée.

On a aussi les relations :

$$\mathcal{F}_h \left(\frac{h}{i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) (\xi) = \xi_j \mathcal{F}_h(u)(\xi) ; \mathcal{F}_h(x_j u)(\xi) = -\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathcal{F}_h(u)(\xi).$$

3.2. Formule de la phase stationnaire. Fixons d'abord une convention agréable pour l'écriture des intégrales oscillantes :

DÉFINITION 29. On pose :

$$\int_{X_n}^* e^{if(x)/h} a(x) |dx| := \frac{e^{-in\pi/4}}{(2\pi h)^{n/2}} \int_{X_n} e^{if(x)/h} a(x) |dx| ,$$

où X_n est une variété de dimension n .

THÉORÈME 24. Soit

$$I(h) = \int_{\mathbb{R}^n}^* e^{if(x)/h} a(x) |dx| ,$$

où $a \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

- Lorsque f n'a pas de point critique dans le support de a , $I(h) = O(h^\infty)$.
- Si f admet un seul point critique x_0 non dégénéré dans le support de a , on a un développement asymptotique de la forme :

$$I(h) \sim e^{if(x_0)/h} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j h^j \right),$$

avec

$$a_0 = e^{-i\nu \frac{\pi}{2}} |\det(f''(x_0))|^{-\frac{1}{2}} a(x_0) ,$$

où ν est l'indice de Morse (nombre de carrés négatifs) de $Q = f''(x_0)$, les autres a_j ne dépendent (polynomialement) que des dérivées de a en x_0 (à f fixée).

- Le cas général où f est de Morse dans le support de a se réduit aux 2 cas précédents par une partition de l'unité.

On utilise le lemme de Morse : si f admet en x_0 un point critique non dégénéré, il existe des coordonnées locales tangentes à l'identité dans lesquelles f est égale à son développement de Taylor à l'ordre 2 (sans reste !!), c'est-à-dire

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} Q(x).$$

On notera encore a l'amplitude de l'intégrale obtenue après le passage dans ces coordonnées de Morse.

Il y a maintenant 2 démonstrations possibles, celle de Hörmander basée sur la transformée de Fourier des distributions et une autre basée sur une construction générale des intégrales de Fresnel

- (1) *Preuve de Hörmander* : une fois admis le lemme de Morse, l'étape principale de la preuve est le calcul de la transformée de Fourier \mathcal{F}_1 au sens des distributions de

$$f_Q(x) = e^{iQ(x)/2}$$

où Q est une forme quadratique réelle non dégénérée. On a :

$$\mathcal{F}_1^{-1} f_Q(\xi) = \mathcal{F}_1 f_Q(\xi) = |\det(Q)|^{-\frac{1}{2}} e^{i\sigma \frac{\pi}{4}} e^{-iQ^{-1}(\xi)/2} ,$$

où $Q^{-1}(\xi)$ est la forme quadratique associée à la matrice inverse de celle de Q .

En effet, on se ramène à calculer la transformée de Fourier de $e^{-zx^2/2}$ avec $\operatorname{Re}(z) > 0$ et à passer à la limite $z \rightarrow \pm ib$, $b \neq 0, b \in \mathbb{R}$.

On vérifie que :

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-zx^2/2} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-\xi^2/2z} ,$$

où la détermination de \sqrt{z} est celle qui est réelle > 0 sur l'axe réel.

Plus généralement, si $Q = Q_1 + iQ_2$ est une forme quadratique à valeurs complexes de partie réelle Q_1 définie positive, on a :

$$\mathcal{F}_1(e^{-Q/2})(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\det(Q)}} e^{-Q^{-1}(\xi)/2} ,$$

où on prend la détermination de la racine carrée qui est réelle positive lorsque $Q_2 = 0$.

On a donc, en posant

$$A(h) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\det(Q)|^{1/2}} e^{-i\nu\pi/4} ,$$

$$I(h) = A(h) \int e^{-ihQ^{-1}(\xi)/2} \mathcal{F}_1 a(\xi) |d\xi| .$$

Développant l'exponentielle en série et utilisant, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{it} = 1 + it + \dots + \frac{(it)^N}{N!} + O(t^{N+1}) ,$$

où le O est uniforme sur \mathbb{R} , il vient :

$$I(h) = A(h) \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{h}{2i}\right)^k \int (Q^{-1}(\xi))^k \mathcal{F}_1 a(\xi) |d\xi| + O(h^{N+1}) \right) ,$$

ou encore :

$$(8) \quad I(h) \sim \frac{1}{|\det(Q)|^{1/2}} e^{-i\nu\pi/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{h}{2i}\right)^k ((Q^{-1}(D))^k a)(0) \right) ,$$

où $D = \frac{1}{i} \partial_x$. On voit ainsi que si f est une forme quadratique, le d.a. de la phase stationnaire est calculé explicitement.

(2) *Preuve par les intégrales de Fresnel :*

a) Construction des intégrales de Fresnel : soit $Q(x)$ une forme quadratique ND sur \mathbb{R}^n . Soit, pour $m \in \mathbb{R}$, O^m l'espace de Fréchet des fonctions C^∞ sur \mathbb{R}^n dont les dérivées sont toutes $O(|x|^m)$. Alors C_o^∞ est dense dans O^m pour la topologie $O^{m+\alpha}$, $\alpha > 0$. On a : $a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (a(x) \chi(\varepsilon x))$ où $\chi \in C_o^\infty$ vaut 1 près de 0.

La fonctionnelle $a \rightarrow I(a) = \int e^{iQ(x)/2} a(x) |dx|$ s'étend à O^m par continuité. Il suffit de le voir sur les fonctions nulles sur la boule de centre 0 et de rayon 1. Soit V le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n \setminus 0$ défini par

$$V = \frac{1}{2} \frac{\text{grad}(Q)}{\|\text{grad}(Q)\|^2} .$$

On a :

$$\frac{1}{i} V(e^{iQ(x)/2}) = e^{iQ(x)/2} ,$$

et donc si P est le transposé formel de V/i ($P = -(V + \text{div} V)/i$), on a, pour $a \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$:

$$I(a) = I(Pa)$$

et P est continu de O^m dans O^{m-1} . On a ainsi

$$I(a) = I(P^N a)$$

et, si $N - m > n$, cette fonction est dans L^1 pour $a \in O^m$.

On a ainsi les intégrales de Fresnel.

$$\int e^{\pm i x^2/2} = \sqrt{2\pi} e^{\pm i\pi/4}.$$

b) Preuve de la phase stationnaire : par le lemme de Morse et $x = \sqrt{h}y$, on se réduit à :

$$I(a) = h^{n/2} \int e^{iQ(x)/2} a(\sqrt{h}y) |dy|.$$

Par Taylor :

$$a(\sqrt{h}y) = \sum_{l=0}^N h^{l/2} a_l(y) + h^{N+1/2} \sum_{|\alpha|=N+1} y^{|\alpha|} r_\alpha(\sqrt{h}y),$$

avec a_l polynôme homogène de degré l et $r_\alpha \in O^0$ (r_α est donné par la formule de Taylor avec reste intégral et les dérivées de a sont bornées). On vérifie que $y^{|\alpha|} r_\alpha(\sqrt{h}y)$ est borné dans $O^{N+1/2}$ quand $h \in [0, 1]$ et on intègre terme à terme. Il suffit de vérifier que les termes correspondants à l impair s'annulent (changer y en $-y$).

En dimension 1, on peut aussi intégrer avec des exponentielles de polynômes non quadratiques. Par exemple, pour l'intégrale d'Airy :

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(\frac{\theta^3}{3} + x\theta)} |d\theta|.$$

COROLLAIRE 3. *La transformée de Fourier d'une fonction oscillante $a(x)\exp(iS(x)/h)$ ($a \in C_o^\infty$) est donnée par :*

$$\mathcal{F}_h(ae^{iS/h})(\xi) \sim e^{-iS^*(\xi)/h} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j(\xi) h^j \right),$$

où S^* est la transformée de Legendre de S .

3.3. Calcul explicite du développement de la phase stationnaire.

Si on souhaite calculer explicitement un développement de la phase stationnaire, il n'est pas souhaitable de suivre la démarche de la démonstration en appliquant le lemme de Morse. On préfère faire des développements de Taylor de la phase $S(x) = S_2(x) + S_3(x) + \dots$ et de l'amplitude $a(x) = a_0 + a_1(x) + a_2(x) + \dots$ au point critique ($x_0 = 0$). Puis on reporte ces développements formels et on fait le changement $x = \sqrt{h}y$, cela donne :

$$I(h) = (2\pi i)^{-n/2} \int e^{i(S_2(y) + \sqrt{h}S_3(y) + \dots)} (a_0 + \sqrt{h}a_1(y) + ha_2(y) + \dots) |dy|.$$

On développe alors l'exponentielle pour obtenir :

$$\begin{aligned} I(h) &= (2\pi i)^{-n/2} \int e^{iS_2(y)} (a_0 + \sqrt{h}(ia_0S_3(y) + a_1(y)) \\ &+ h(a_0(is_4(y) - \frac{1}{2}S_3^2(y)) + a_2(y) + ia_1(y)S_3(y)) + \dots) |dy|. \end{aligned}$$

Les termes en puissances non entières de h s'annulent à cause de la parité. On est ainsi réduit à calculer des intégrales $\int e^{iS_2(y)} P(y) |dy|$ où P est un polynôme homogène de y . Le plus simple est en général d'effectuer une rotation qui rend $S_2(y)$ diagonale. On a alors des simplifications chaque fois que le monôme P admet une puissance impaire d'une des variables. Il reste ainsi à calculer les intégrales $J_{\pm,j} = \int_{\mathbb{R}} e^{\pm i y^2} y^{2j} |dy|$ qui se ramènent aisément à des fonctions Γ .

Calcul du 2ème terme en dimension 1.

On considère le cas réel :

$$J(h) = \int_{\mathbb{R}} e^{-S(x)/h} a(x) |dx|$$

avec $S(x) = s_2 x^2 + s_3 x^3 + s_4 x^4 + O(x^5)$, $s_2 > 0$, et $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + O(x^3)$. On a alors :

$$J(h) = \left(\frac{\pi h}{s_2}\right)^{\frac{1}{2}} (A_0 + A_1 h + O(h^2))$$

avec $A_0 = a_0$ et

$$A_1 = \frac{15}{16} \frac{a_0 s_3^2}{s_2^3} - \frac{3}{4} \frac{a_0 s_4 + a_1 s_3}{s_2^2} + \frac{1}{2} \frac{a_2}{s_2}.$$

3.4. Phase stationnaire et lemme de Morse isochore. Dans [CV79], nous avons prouvé le lemme de Morse *isochore* qui s'énonce ainsi :

LEMME 6. (*Lemme de Morse isochore*) On se donne une fonction S à valeurs réelles et ayant un point critique non dégénéré à l'origine et une densité $C^\infty > 0$ $d\mu$. Soit $Q(y) = S_2(y)$ le terme de degré 2 du développement de Taylor de S en 0 dans un système de coordonnées locales y , il existe alors des coordonnées locales x telles que : $S(x) = Q(x)$ et $d\mu = F \circ Q |dx|$ avec F lisse. De plus la série de Taylor de F en 0 est uniquement déterminée :

$$F(t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} f_j t^j.$$

Les coefficients f_j sont reliés simplement au développement de la phase stationnaire de

$$I(h) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iS(x)/h} a(x) |dx|.$$

On a :

$$I(h) \sim \sum_j f_j \left(\int e^{iQ(x)/h} Q(x)^j |dx| \right),$$

et donc :

$$I(h) \sim h^{n/2} \sum_j \alpha_j f_j h^j$$

avec

$$\alpha_j = \int e^{iQ} Q^j |dx|.$$

On calcule α_j par

$$\alpha_j = \left(\frac{1}{i} \frac{d}{d\lambda}\right)^j \int e^{i\lambda Q} |dx|.$$

3.5. La méthode du col. Il s'agit d'une variante holomorphe de la méthode de la phase stationnaire : on veut évaluer une intégrale du type $\int_{\gamma} e^{S(z)/h} a(z) dz$ où S et a sont holomorphes dans un ouvert U du plan complexe. Soient $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$ les 2 extrémités de γ . L'idée est de déformer γ de façon ce que $\sup_{\gamma} \Re(S(z))$ soit minimum. On pose donc $F(z) = \Re(S(z))$ et on suppose que $\inf(\sup_{\gamma} F(z)) = a$ est atteint pour des chemins qui passent par un col non dégénéré. Soit z_0 ce point col. On peut choisir γ tel que $\gamma(a) = z_0$ et $S(\gamma(t)) - S(z_0)$ soit réel près de a . $S(\gamma(t))$ admet ainsi un maximum non dégénéré en $t = a$ et on peut appliquer la formule de la phase stationnaire. Dans certaines applications, les chemins sont infinis. On peut aussi étendre au cas de plusieurs variables.

Le théorème de la phase stationnaire est la clé de voûte de la théorie des ΨDO ... et de beaucoup de questions d'analyse, par exemple l'évaluation asymptotique du nombre de points entiers dans un domaine de \mathbb{R}^n .

3.6. Lemme de Wick et applications.

3.7. Asymptotique du nombre de points entiers dans un domaine de \mathbb{R}^n . Pour ceci, on peut consulter le livre d'Arnold sur les singularités d'applications différentiables ([AVG87] p 169-177) et l'article [Col77b].

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine compact à bord lisse. On veut calculer le comportement asymptotique de

$$N(\lambda; D) = \# \lambda D \cap (\Gamma + a) ,$$

où Γ est un réseau de \mathbb{R}^n et $a \in \mathbb{R}^n$, lorsque λ tend vers l'infini.

La formule sommatoire de Poisson permet de se ramener à des estimations précises de la décroissance à l'infini de la transformée de Fourier de la fonction caractéristique de D . Par Stokes, cette transformée de Fourier se réécrit :

$$I(\xi) = \int_D e^{-ix\xi} |dx| = \frac{i}{\|\xi\|^2} \int_{\partial D} e^{-ix\xi} \sum \xi_j \hat{dx}_j .$$

Les points critiques de la phase sont les points de ∂D où le plan tangent a la co-direction ξ . On en déduit le :

THÉORÈME 25. *Si D est un domaine compact à bord C^∞ de \mathbb{R}^n dont la courbure (seconde forme fondamentale) est définie positive, la transformée de Fourier $\hat{\chi}$ de la fonction caractéristique de D vérifie :*

$$\hat{\chi}(\xi) = O(|\xi|^{-(n+1)/2}) .$$

On va en déduire le :

THÉORÈME 26. *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$N(\lambda; D) = \text{Vol}(D) \lambda^n + O(\lambda^{n-2+\frac{2}{n+1}}) .$$

Remarque : dans le cas où $n = 2$, on obtient $O(\lambda^{2/3})$. Dans le cas où D est un disque, on peut montrer que l'on ne peut pas remplacer $2/3$ par $1/2$. On conjecture que le reste est $O(\lambda^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$. Voir à ce sujet [Hej76].

Preuve. –

On choisit une fonction $\rho \geq 0$, C_o^∞ dont le support est la boule euclidienne de centre O et de rayon 1 et $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) |dx| = 1$. On pose

$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$ et $N_\varepsilon(\lambda; D) = \sum_{\nu \in \Gamma} (\chi(\cdot/\lambda) \star \rho_\varepsilon(\cdot))(\nu + a)$. On a alors par la formule de Poisson :

$$N_\varepsilon(\lambda; D) = \lambda^n \left(\sum_{\mu \in \Gamma^*} \hat{\chi}(\lambda\mu) \hat{\rho}(\varepsilon\mu) e^{-i\mu a} \right),$$

puis en séparant le terme $\mu = 0$ et en utilisant la décroissance de $\hat{\chi}$ et de $\hat{\rho}$:

$$N_\varepsilon(\lambda; D) = \text{Vol}(D) \lambda^n + O(\lambda^{-(n+1)/2} \varepsilon^{-(n-1)/2}).$$

On pose

$$D_+^t = \{x | \chi \star \rho_t > 0\}$$

et

$$D_-^t = \{x | \chi \star \rho_t = 1\}.$$

Lorsque t est assez petit, les estimations précédentes sont valables en remplaçant D par D_\pm^t . De plus

$$\text{vol}(D_\pm^t) = \text{vol}(D) + O(t).$$

On en déduit le théorème en choisissant $\varepsilon = \lambda^{-(n-1)/(n+1)}$ et $t = \varepsilon/\lambda$, car on a alors :

$$N_\varepsilon(\lambda, D_-^t) \leq N(\lambda; D) \leq N_\varepsilon(\lambda, D_+^t).$$

□

3.8. Cas des phases complexes. On peut étendre la phase stationnaire dans différents contextes : variétés à bord, points critiques dégénérés, f à valeurs complexes de partie imaginaire ≥ 0 .

Par exemple, il sera utile dans la suite de considérer des formes quadratiques non dégénérées à valeurs complexes de partie réelle ≥ 0 . On a évidemment, si $Q = Q_1 + iQ_2$ est une telle forme, une formule pour la transformée de Fourier de $e^{-Q/2}$. La formule est la même que dans le cas où $Q_2 = 0$: la fonction $\sqrt{\det(Q)}$ est holomorphe sur les Q telles que Q_1 est définie positive et s'étend en une fonction continue non nulle sur les Q non dégénérées telles que $Q_1 \geq 0$. On en déduit comme plus haut le calcul la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}_1(e^{-Q(x)/2})(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\det Q}} e^{-Q^{-1}(\xi)/2},$$

où la racine carrée du déterminant est obtenue en prenant la limite de la détermination holomorphe à l'intérieur du cône où Q_1 est définie positive, et la formule de la phase stationnaire :

$$\int e^{-Q(x)/2h} a(x) |dx| \sim \frac{(2\pi h)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{h}{2}\right)^k (Q^{-1}(D))^k a(0).$$

4. Symboles

Si Z est une variété C^∞ , on note

$$\Sigma^{m,\infty}(Z)$$

l'ensemble des fonctions $a_h(z)$ C^∞ ayant lorsque h tend vers 0, un développement asymptotique de la forme

$$a_h \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^{m+j} a_{m+j}(z) ,$$

où le d.a. est valable pour toutes les semi-normes C^k sur les compacts de Z .

On note aussi $\Sigma_o^m(Z) \subset \Sigma^{m,\infty}(Z)$ le sous-espace formé des symboles à support dans un compact fixe (i.e. indépendant de h).

Il est classique (théorème de Borel) que tout développement formel de la forme précédente avec les $a_i \in C^\infty(Z)$ provient d'un symbole (non unique).

Le théorème de la phase stationnaire s'étend au cas où a_h est dans $\Sigma_o^m(Z)$.

Par exemple, si $a_h \in \Sigma_o^m(X \times \mathbb{R}^N)$ et $q(\theta)$ est une forme quadratique non dégénérée sur \mathbb{R}^N , alors

$$A_h(x) = \int_{\mathbb{R}^N}^* e^{iq(\theta)/h} a_h(x, \theta) |d\theta|$$

est un symbole de $\Sigma_o^m(X)$.

4.1. Théorème de Borel. ¹

Soit E un espace de Fréchet (espace vectoriel topologique métrisable complet dont la topologie est donnée par un nombre dénombrable de semi-normes, par exemple $C^\infty(\bar{\Omega})$ où Ω est un ouvert relativement compact de \mathbb{R}^n), on se donne une suite $a_n \in E$, on a le :

THÉORÈME 27. *Il existe une fonction C^∞ , $f(h)$ de $[0, h_0]$ dans E telle que les a_n soit les coefficients de Taylor en 0 de f en 0. la série formelle $\sum_n a_n h^n$ est donc le développement asymptotique de f .*

Preuve.—

On choisit $\varphi(t) \in C_o^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ égale à 1 près de 0 et nulle pour $t \geq 1$.

On pose $f(h) = \sum_n a_n \varphi(b_n h) h^n$ où b_n tend vers l'infini assez vite pour que les sommes $\sum \|a_n\| b_n^{N-n}$ soient convergentes pour tout N et toute norme de E .

□

Dans la suite on appliquera ce résultat sans y faire attention, le problème réel étant de savoir si les (des) solutions exactes admettent les séries formelles trouvées comme développements asymptotiques. Cela n'est pas toujours vrai, en particulier pour les fonctions propres d'un hamiltonien quantique, comme il a été observé par Arnold dans son papier [Arn72] (voir aussi le chapitre 7).

4.2. Symboles sur les variétés coniques. Il est important de considérer des symboles sur des variétés ayant une structure conique, par exemple les espaces vectoriels ou plus généralement les fibrés vectoriels.

DÉFINITION 30. *Une variété C^∞ Z conique est une variété munie d'une action du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^+ \setminus 0$, notée $(\lambda, z) \rightarrow \lambda.z$, ayant les propriétés suivantes :*

¹Emile Borel (1871-1956), mathématicien français

- L'ensemble des points fixes de cette action est une sous-variété Z_0 de Z .
- Pour tout $z \in Z$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda.z \in Z_0$.
- $\forall z \notin Z_0$, il existe une carte au voisinage de z dite canonique de la forme $(y, t) \in U \times [1, \infty[= \Omega$ telle que, pour $\lambda \geq 1$, on ait : $\lambda.(y, t) = (y, \lambda t)$.
- L'action est propre en $+\infty$: l'application $(\lambda, z) \rightarrow \lambda z$ est propre de $(Z \setminus Z_0) \times [1, +\infty)$ dans $Z \setminus Z_0$.

On munit Z d'une fonction C^∞ partout ≥ 1 notée $\langle z \rangle$ telle que dans les cartes canoniques on ait $At \leq \langle z \rangle \leq Bt$ avec $A, B > 0$. Dans le cas d'un fibré vectoriel, on peut poser $\langle v \rangle = \sqrt{1 + \|v\|^2}$ où $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne sur le fibré.

On va définir sur Z une classe de symbole ayant un comportement à l'infini de type fonction homogène de degré l .

Un champ de vecteur V sur $Z \setminus 0$ est dit *invariant* s'il commute avec l'action de $\mathbb{R}^+ \setminus 0$. Dans les cartes canoniques, un champ de vecteur invariant est de la forme :

$$V = \sum a_j(y) \partial_{y_j} + \frac{b(y)}{t} \partial_t .$$

DÉFINITION 31. Un symbole conique de degré l est une fonction C^∞ σ sur Z telle que, pour toute suite V_j de N champs de vecteurs homogènes sur $Z \setminus 0$, on ait :

$$V_1 \cdots V_N \sigma(z) = O(\langle z \rangle^l) .$$

On note $S^l(Z)$ l'espace de ces symboles.

Par exemple, si $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ avec les homothéties sur \mathbb{R}^q , cela donne les estimations :

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \sigma(x, y) = O(\langle y \rangle^{l-|\beta|}) ,$$

sur tout compact de \mathbb{R}^p .

La somme $\oplus_{l \in \mathbb{Z}} S^l(Z)$ est munie d'une structure d'algèbre graduée donnée par le produit ponctuel des symboles. On vérifie sans mal le :

THÉORÈME 28. Si $\sigma \in S^l(Z)$, σ est inversible dans cette algèbre si et seulement si il existe $C > 0$ telle que : $|\sigma(z)| \geq C \langle z \rangle^l$.

4.3. Intégrales oscillantes. Soit Z une variété conique et $\varphi : Z \setminus Z_0 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ homogène de degré 1 sans point critique sur $Z \setminus Z_0$. Soit $a \in S^l(Z)$ à support dans un cône à base compacte, on veut définir l'intégrale

$$I(\varphi, a) = \int_Z e^{i\varphi/h} a |dz| .$$

Par cartes et partitions de l'unité, on se ramène à $\varphi(x, t) = tx_1$ au voisinage conique des points où $\varphi = 0$ et $\varphi(x, t) = t$ là où $\varphi \neq 0$. On utilise alors

$$\frac{h}{it} \frac{\partial}{\partial x_1} e^{itx_1/h} = e^{itx_1/h}$$

ou

$$\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial t} e^{it/h} = e^{it/h}$$

pour intégrer par parties. On pose $L = \frac{h}{it} \frac{\partial}{\partial x_1}$ dans le 1er cas, $L = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial t}$ dans le 2ème. Si a est à support compact, on a :

$$I(\varphi, a) = \int e^{i\varphi(x,t)/h} (L^t)^N a |dtdx| .$$

Si $a \in S^l(Z)$, à cause de la propriété des symboles, on a :

$$(L^t)^N a = O(h^N t^{l-N}) ,$$

et si N grand l'intégrale converge et on voit aussi que la contribution à l'intégrale du complémentaire d'un voisinage de la section nulle est $O(h^\infty)$.

Cela permet d'appliquer la phase stationnaire à des intégrales

$$\int e^{i\varphi/h} a$$

lorsque $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ où φ_1 est homogène de degré 1 sans points critique hors de Z_0 et φ_2 est un symbole de degré 0.

5. ΨDO compactement supportés dans \mathbb{R}^n

5.1. Définitions. On va définir maintenant une classe d'opérateurs notée

$$\Psi_o^m(X) ,$$

les opérateurs pseudo-différentiels à support compact dans un ouvert $X \subset \mathbb{R}^n$. Cette classe permet de se familiariser avec le *calcul pseudo-différentiel*, les règles formelles obtenues restant vraies pour la classe plus générale

$$\Psi^{m,l}(X) ,$$

où m réfère à l'ordre en h et l à la croissance en ξ . On aura en particulier

$$\Psi_o^m(X) \subset \Psi^{m,-\infty}(X) .$$

On étendra plus loin cette définition aux variétés.

Ces opérateurs dépendent de h et sont caractérisés par un type de comportement asymptotique quand h tend vers 0.

On se donne un symbole $a_h \in \Sigma_o^m(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ et on pose :

$$A_h u(x) = (2\pi h)^{-n} \int_X \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi/h} a_h(x, y, \xi) u(y) |dy d\xi| .$$

On note $A_h = Op_h(a_h)$.

Un tel opérateur a, pour chaque valeur de h , un noyau $K_{A_h}(x, y) \in C_o^\infty(X \times X)$ et donc opère sur $\mathcal{D}'(X)$. On a :

$$K_{A_h}(x, y) = (2\pi h)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi/h} a_h(x, y, \xi) |d\xi| .$$

La classe Ψ_o^m est formée des opérateurs qui sont du type précédent modulo un opérateur régularisant au sens suivant :

DÉFINITION 32. On dit qu'un opérateur A_h de noyau $K_h(x, y)$ est h -régularisant et on notera $A_h \in \Psi_o^\infty(X)$ si et seulement si :

- (i) K_h est, pour chaque h , C_o^∞ à support dans un compact indépendant de h .
- (ii) Les normes C^k de K_h sont toutes $O(h^N)$ pour tout N et tout k .

Si $a_h(x, y, \xi)$ est un symbole à support compact fixe disjoint de la diagonale $x = y$, $Op(a_h)$ est h -régularisant.

De même, si $a_h(x, y, \xi)$ est à support compact en x, y et vérifie des estimations

$$|D^\alpha a_h(x, y, \xi)| = O(h^N / (1 + \|\xi\|)^N)$$

pour tout N, α , alors $Op(a_h)$ est h -régularisant. Dans ce cas, on dira que $a_h \in \Sigma^{\infty, -\infty}$.

5.2. Symbole principal. On va définir l'application symbole principal

$$\sigma_p^m : \Psi_o^m(X) \rightarrow h^m C_o^\infty(X \times \mathbb{R}^n)$$

par

$$\sigma_p^m(A_h)(h, x, \xi) = h^m a_m(x, x, \xi) .$$

Remarquons qu'on a incorporé le h^m dans le symbole principal. On peut noter

$$h^m a_m(x, \xi) = \sigma_p^m(A_h) .$$

Il n'est pas évident que cette application soit bien définie ; cela résulte de :

$$A_h(e^{ix\xi/h}) \sim h^m a_m(x, x, \xi) e^{ix\xi/h} .$$

C'est une application simple de la phase stationnaire (exercice). Plus généralement, on peut étudier l'action d'un ΨDO d'ordre m sur une fonction oscillante :

$$A_h(u(x)e^{iS(x)/h}) \sim h^m a_m(x, x, S'(x))u(x)e^{iS(x)/h} .$$

Comme $(x, S'(x))$ est un point de l'espace de phases, il est naturel de voir le symbole principal comme une fonction sur T^*X .

De ceci, on peut déduire le résultat suivant : on a $\Psi_o^{m+1} \subset \Psi_o^m$ et σ_p^m passe au quotient et donne un isomorphisme sur $h^m C_o^\infty(T^*X)$:

THÉORÈME 29. *La suite :*

$$0 \rightarrow \Psi_o^{m+1} \rightarrow \Psi_o^m \rightarrow h^m C_o^\infty(T^*X) \rightarrow 0 ,$$

est exacte.

On doit surtout montrer que, si $\sigma_p^m(A_h) = 0$, $A_h \in \Psi_o^{m+1}$. On a alors, par Taylor :

$$a_m(x, y, \xi) = \sum (x_j - y_j) b_j(x, y, \xi)$$

où l'on peut supposer les b_j à supports compacts (multiplier tout par $F(x, y)$ où F vaut 1 au voisinage du support de a_h). Il suffit maintenant d'intégrer par parties.

5.3. Action sur les exponentielles. En fait, on a une caractérisation des opérateurs de $\Psi_o^m(X)$ par :

PROPOSITION 14. *Soit A_h une famille d'opérateurs donnés par un noyau K_{A_h} C^∞ à support dans un compact fixe de $X \times X$. On pose $e_\xi(x) = e^{i\xi x/h}$ et*

$$A_h e_\xi(x) = a_h(x, \xi) e_\xi(x) ,$$

Alors il est équivalent que $A_h \in \Psi_o^m(X)$ et que $a_h \in \Sigma_o^m(X \times \mathbb{R}^n)$.

DÉFINITION 33. $a_h(x, \xi)$ s'appelle parfois le symbole gauche de A_h et est noté $\sigma_g(A)$ (on a de même un symbole droite $\sigma_d(A)$).

Preuve.—

Dans un sens, il suffit de voir que les propriétés de a_h résultent de la phase stationnaire appliquée à la définition de $a_h(x, \xi_0) = e_{-\xi_0}(x) A_h(e_{\xi_0})$.

Dans l'autre, écrire $u = (2\pi h)^{-n/2} \int \hat{u}(\xi) e_\xi(x) |d\xi|$, puis développer par linéarité en utilisant l'action sur les e_ξ . Multiplier à droite par $F(y)$ pour avoir le symbole à support compact.

□

Il est facile de vérifier que, si P_h est un opérateur *différentiel* à coefficients polynômes en h , C^∞ en x , les composés à droite et à gauche de A_h avec P_h sont encore des ΨDO compactement supportés.

En fait la proposition précédente prouve que A_h admet une réécriture avec un symbole indépendant de y ; en faisant la même chose sur l'adjoint, on a une écriture indépendante de x . On a aussi des écritures avec un symbole symétrique, par exemple le symbole de Weyl : si $K(x, y)$ est un noyau C^∞ à support compact, on peut toujours écrire :

$$K(x, y) = (2\pi h)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi/h} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) |d\xi| .$$

En posant $u = x + y$, $v = x - y$, on voit que $K(u, v)$ apparaît à u fixé comme la transformée de Fourier inverse de $a(u/2, \cdot)$. Cela donne une formule pour a ; on vérifie ensuite par la phase stationnaire que a est un symbole :

$$(9) \quad a(x; \xi) = \int K\left(x + \frac{v}{2}, x - \frac{v}{2}\right) e^{-iv\xi/h} dv .$$

DÉFINITION 34. La fonction $a(x, \xi)$ définie par la formule (9) s'appelle le symbole de Wigner de l'opérateur A_h de noyau $K_h(x, y)$ et nous le noterons $\sigma_W(A)$. La mesure de Wigner μ_φ^W d'une fonction φ de norme L^2 égale à 1 est le symbole de Wigner du projecteur orthogonal sur l'espace engendré par cette fonction. On a donc :

$$\mu_\varphi^W(x, \xi) = \left(\int \varphi\left(x + \frac{v}{2}\right) \overline{\varphi\left(x - \frac{v}{2}\right)} e^{-iv\xi/h} dv \right) |dx d\xi| .$$

La mesure de Wigner jouit de propriétés remarquables : elle a une densité continue réelle et si π_x (resp π_ξ) sont les projections canoniques de $T^*\mathbb{R}^n$ sur ses 2 facteurs, on a :

$$\pi_x^*(\mu_\varphi^W) = |\varphi|^2 |dx|$$

et

$$\pi_\xi^*(\mu_\varphi^W) = |\widehat{\varphi}|^2 |d\xi| .$$

Elle présente l'inconvénient de ne pas être positive. Par exemple, si χ est la fonction caractéristique de $[-1, +1]$, on a :

$$\mu_\chi^W = \frac{1}{\pi\xi} \sin \frac{\xi(1 - |x|)}{h} .$$

La mesure de Husimi (voir la section 11.2) qui est une régularisée de celle de Wigner remédie à cet inconvénient.

5.4. Egalité microlocale de ΨDO et symboles complets.

DÉFINITION 35. Deux ΨDO A et B sont dits microlocalement égaux en $z_0 \in T^*X$ si $(z_0, z_0) \notin WF'(A - B)$.

On a le :

THÉORÈME 30. A et B sont microlocalement égaux près de z_0 si et seulement si leurs symboles droits (resp. gauches, resp. de Wigner) coïncident au voisinage de z_0 .

5.5. Action sur les $b(x)e^{ikx/h}$. Soit $A_h = Op(a(x, \xi))$ et $u(x) = b(x)e^{ikx/h}$ avec $b \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$. On peut ré-écrire $A_h u$ sous la forme :

$$A_h u(x) = \mathcal{F}_1^{-1}(a(x, k + h\eta)\mathcal{F}_1 b(\eta))$$

et par Taylor :

$$A_h u(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \sum \frac{h^m}{m!} P_m(x, \frac{1}{i} D_x) b(x)$$

où

$$P_m(x, \eta) = \sum_{|\alpha|=m} D_\eta^\alpha a(x, \eta)_{\eta=k}(\eta, \dots, \eta) .$$

5.6. Invariance par difféomorphisme. Soit $F : X' \rightarrow X$ un difféomorphisme C^∞ . On fait le changement de variables $x = F(x')$, $y = F(y')$ dans la définition de l'opérateur pseudo-différentiel $A_h u(x)$, on obtient ainsi :

$$A_h u(F(x')) = (2\pi h)^{-n} \int e^{i(F(x') - F(y'))\xi/h} a_h(F(x'), F(y'), \xi) u(F(y')) \\ |J_F(y')| |dy' d\xi| ,$$

où J_F est le jacobien de F . On remarque alors que

$$F(x') - F(y') = G(x', y')(x' - y')$$

par Taylor avec reste intégral avec $G(x', x') = F'(x')$. On peut du reste supposer $G(x, y) = G(y, x)$ dans cette formule par moyenne. On pose alors $\eta = {}^t G(x', y')\xi$. On peut faire ce changement près de la diagonale, ce qui néglige un opérateur régularisant.

On obtient :

$$A_h u(F(x')) = (2\pi h)^{-n} \int e^{i(x' - y')\eta/h} a_h(F(x'), F(y'), {}^t G(x', y')^{-1} \eta) \dots \\ \dots u(F(y')) |J_F(y')| |\det {}^t G(x', y')^{-1}| |dy' d\eta| .$$

On voit ainsi que A_h se transforme en un nouvel ΨDO A'_h de symbole principal :

$$a'_m(x', \eta) = a_m(F(x'), {}^t F'^{-1}(x')(\eta))$$

On retrouve qu'il est cohérent d'interpréter le symbole principal comme une fonction sur le cotangent de la variété.

5.7. Extension aux variétés. Ce qui précède permet d'étendre la classe Ψ_o^m aux variétés : on considère un atlas (U_α) de X localement fini, et des opérateurs de la forme $\sum_\alpha A_\alpha + R$ où R est régularisant.

Un opérateur de $\Psi_o^m(X)$ admet un symbole principal

$$\sigma_p^m(A_h) : T^*X \rightarrow \mathbb{C} .$$

5.8. Composition, adjoint.

THÉORÈME 31. Si $A_h \in \Psi_o^m(X)$, $B_h \in \Psi_o^p(X)$, alors le produit $A_h \circ B_h$ est un ΨDO d'ordre $m+p$ de symbole principal donné par le produit des symboles ; le crochet $[A_h, B_h]$ est un ΨDO d'ordre $m+p+1$ et dont le symbole principal est h/i fois le crochet de Poisson $\{\sigma_p^m(A_h), \sigma_p^l(B_h)\}$ des symboles principaux de A_h et B_h . L'adjoint de A_h est un ΨDO d'ordre m dont le symbole principal est le complexe conjugué du symbole principal de A_h .

Etudions par exemple la composition $A_h \circ B_h$ de 2 ΨDO à supports compacts d'ordres respectifs m et p . Il suffit d'après la caractérisation donnée dans la proposition 14 d'étudier l'action sur e_{ξ_0} :

$$A_h B_h(e_{\xi_0})(x) = (2\pi h)^{-n} \int e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} a(x, \xi) b(y, \xi_0) e_{\xi_0}(y) |dy d\xi| .$$

On applique la phase stationnaire et il vient facilement :

$$A_h B_h(e_{\xi_0})(x) \sim \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{h}{i} \right)^j \sum_{l=1}^n \frac{\partial^j}{\partial \xi_l^j} a(x, \xi)_{\xi=\xi_0} \frac{\partial^j}{\partial y_l^j} b(y, \xi_0)_{y=x} \right) e_{\xi_0}(x) .$$

De cette formule, on tire le symbole principal du produit et du crochet de 2 ΨDO ; en effet le crochet de Poisson est donné par :

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \right) .$$

5.9. Le cas de la quantification de Weyl. La formule pour le symbole de Weyl du composé de 2 ΨDO est souvent utile : si a et b sont des symboles sur $T^*\mathbb{R}^n$, on définit $a \# b$ par l'identité :

$$Op_W(a \# b) = Op_W(a) \circ Op_W(b)$$

et on a :

THÉORÈME 32.

$$(10) \quad a \# b(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{h}{2i} \right)^j (\square^j (a(x, \xi) \otimes b(y, \eta)))_{y=x; \eta=\xi} ,$$

où

$$\square = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial y_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \eta_k} .$$

En particulier :

$$a \# b = ab + \frac{h}{2i} \{a, b\} + O(h^2) .$$

Preuve. –

En utilisant la formule (9), on obtient :

$$a \# b(X, \Xi) = (2\pi h)^{-2n} \int e^{\frac{i}{h} \left((X + \frac{v}{2} - z) \xi + (z - X + \frac{v}{2}) \eta - v \Xi \right)} a\left(\frac{X+z}{2} + \frac{v}{4}, \xi\right) b\left(\frac{X+z}{2} - \frac{v}{4}, \eta\right) |d\xi d\eta dz dv|$$

et, en posant $x = z + \frac{v}{2}$, $y = z - \frac{v}{2}$,

$$a \# b(X, \Xi) = (2\pi h)^{-2n} \int e^{\frac{i}{h} \left((X|\xi - \eta) - (x-y|\Xi) + (x|\eta) - (y|\xi) \right)} a\left(\frac{X+x}{2}, \xi\right) b\left(\frac{X+y}{2}, \eta\right) |d\xi d\eta dx dy| .$$

On applique alors la formule de la phase stationnaire (8) avec $Q = 2(x\eta - y\xi)$ et l'opérateur \square qui en résulte à partir de Q^{-1} .

□

6. Opérateurs pseudo-différentiels généraux

6.1. Définition de la classe $\Psi^{m,l}(X)$. On peut d'abord définir une classe très générale pour être cohérent avec les définitions du chapitre suivant :

DÉFINITION 36. *Un opérateur pseudo-différentiel $P_h \in \Psi^{m,\infty}(X)$ est un opérateur admissible sur X tel que $\widehat{WF}'(P_h)$ est contenu dans la diagonale de $\widehat{T^*X}$ et microlocalement près de tout point de la $(x, \xi; x, -\xi)$ avec $(x, \xi) \in T^*X$ le noyau K_{P_h} est donné par un élément de $\Psi_o^m(X)$.*

On veut maintenant définir une classe plus petite où le comportement à l'infini est précisé, de ΨDO , notée $\Psi^{m,l}(X)$, (X une variété C^∞), opérant sur $C_o^\infty(X)$ et à valeurs dans $C^\infty(X)$ (bien sûr dépendant de h). On aura $\Psi_o^m \subset \Psi^{m,l} \subset \Psi^{m,\infty}$ pour tout l .

DÉFINITION 37. *Si Z est une variété conique, $\Sigma^{m,l}(Z)$ est l'ensemble des symboles sur Z admettant un développement asymptotique en puissances de h de la forme*

$$a \sim \sum_{j=m}^{\infty} h^j a_j$$

où $a_j \in S^l(Z)$.

$\Psi^{m,l}(X)$ est l'ensemble des ΨDO sur X donnés à l'aide de symboles $a(x, y, \xi) \in \Sigma^{m,l}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$.

THÉORÈME 33. *La suite :*

$$0 \rightarrow \Psi^{m+1,l}(X) \rightarrow \Psi^{m,l}(X) \rightarrow h^m S^l(T^*X) \rightarrow 0 ,$$

est exacte.

Si $u \in C_o^\infty(X)$,

$$A_h u_h(x) = (2\pi h)^{-n} \int_X \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi/h} a_h(x, y, \xi) u(y) |dy d\xi|$$

est bien définie, car la fonction phase $(y, \xi) \rightarrow (x - y)\xi$ n'a pas de point critique pour $\xi \neq 0$.

Il est facile de vérifier que le calculus de ces opérateurs est donné par les mêmes règles que celui des opérateurs compactement supportés. En particulier, si $a \in \Sigma^{m,l}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ et $b \in \Sigma^{m',l'}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$,

$$Op(ab) - Op(a)Op(b) \in \Psi^{m+m'+1,l+l'}$$

et

$$[Op(a), Op(b)] \in \Psi^{m+m'+1,l+l'} .$$

DÉFINITION 38. $\hat{P} \in \Psi^{0,l}$ est elliptique

- En $(x_0, \xi_0) \in T^*X$ si son symbole principal $p(x, \xi)$ ne s'y annule pas.
- En $(x_0, \infty\xi_0)$ si son symbole principal $p(x, \xi) \in S^l(T^*X)$ vérifie $|p(x, t\xi)| \geq C < t\xi >^l$ avec $C > 0$ dans un voisinage de (x_0, ξ_0) et pour t assez grand.

6.2. Opérateurs régularisants.

DÉFINITION 39. *Un opérateur régularisant sur X est un élément $A_h \in \cap_{m,l} \Psi^{m,l}(X)$.*

On aimerait avoir d'autres caractérisations indépendantes de la définition des ΨDO .

THÉORÈME 34. *A_h de noyau $K_h(x, y) \in \mathcal{D}'(X \times X)$ est régularisant si l'une des 2 conditions suivantes est satisfaite :*

- K_h est négligeable.
- Pour tout couple (s, s') , A_h envoie $H_0^s(X)$ dans $H_{loc}^{s'}(X)$ et toutes les semi-normes associées sont $O(h^\infty)$.

6.3. Propreté.

DÉFINITION 40. *Un opérateur A de noyau $K(x, y) \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ est dit propre si les projection du support de K sur X et Y sont propres.*

On peut toujours modifier un ΨDO par un opérateur régularisant pour qu'il soit propre.

6.4. Continuité.

THÉORÈME 35. *Si $A \in \Psi^{0,0}(X)$, A est continu de $L_o^2(X)$ dans $L_{loc}^2(X)$ et cette continuité est uniforme par rapport à h et la norme dans $\mathcal{L}(L^2(K))$ a pour limite, quand $h \rightarrow 0$, la norme $L^\infty(T^*K)$ du symbole principal.*

La démonstration, inspirée de Hörmander, consiste, après s'être ramené au cas où A est compactement supporté en X , à montrer que pour $C > \|\sigma_p(A)\|_\infty$, il existe $B \in \Psi^{0,0}$ tel que

$$A^*A = C\text{Id} - B^*B + R$$

avec R régularisant.

7. Ellipticité et microsupports

7.1. Caractérisation des microsupports en terme de ΨDO .

THÉORÈME 36. *Si $z_0 \in \widehat{T^*X}$, $z_0 \notin \widehat{WF}(u_h)$ si et seulement s'il existe $A_h \in \Psi^{0,0}(X)$ tel que Au_h est négligeable et A_h est elliptique en z_0 .*

Ce théorème montre l'invariance du WF par difféomorphisme. Il permet aussi de localiser le WF des solutions d'une EDP.

Preuve. –

L'équivalence des 2 définitions du WF provient dans un sens de l'introduction d'un ΨDO de symbole $\varphi(x)\varphi(y)\psi(\xi)$ où $\psi \in C_o^\infty(U)$. Dans l'autre sens, on utilise le fait qu'un opérateur elliptique est microlocalement inversible (voir plus bas).

□

7.2. Exemples. 1) Si $u_h(x) = a(x)e^{iS(x)/h}$ avec $a, S \in C^\infty$, S à valeurs réelles,

$$\widehat{WF}(u_h) = \{(x, S'(x)) | x \in \text{Supp}(a)\}.$$

Plus généralement, si

$$u_h(x) = \int e^{iS(x, \theta)/h} a(x, \theta) |d\theta|$$

où a est localement en x à support compact en θ , $a, S \in C^\infty$, S à valeurs réelles, on a :

$$\widehat{WF}(u_h) \subset \{(x, \partial_x S) | \exists (x, \theta) \in \text{Supp}(a), \partial_\theta S(x, \theta) = 0\}.$$

2) Si $u_h(x) = e^{ix_1/h^2}$,

$$\widehat{WF}(u_h) = \mathbb{R}^n \times \infty(1, 0, \dots, 0).$$

4) Si $T \in \mathcal{D}'(X)$ est indépendante de h ,

$$\widehat{WF}(T) = \text{Supp}(T) \times 0 \cup \overline{WF_{Hormander}(T)}$$

où l'adhérence est prise dans $\widehat{T^*X}$.

7.3. Opérations sur les microsupports. On a un certain nombre d'opérations ensemblistes sur les \widehat{WF} . Ici, on doit considérer les éléments de S^*X comme des demi-droites de T^*X et ainsi la somme $(x, \infty\xi) + (x, \infty\eta)$ désigne $\{\infty(a\xi + b\eta) \mid a \geq 0, b \geq 0, a + b = 1\}$. Les règles suivantes étendent celles données par Hörmander ([Hör71] pages 119 à 133) ; les démonstrations sont essentiellement les mêmes. Les règles sont d'un certain point de vue plus simples (par exemple le cas du produit ou de la composition).

(1) **Produit tensoriel.**

Si X, Y sont 2 variétés,

$$\widehat{WF}(u_h(x) \otimes v_h(y)) \subset \widehat{WF}(u_h) \times \widehat{WF}(v_h),$$

où $(x, \xi) \times (y, \infty\eta) = (x, y; 0, \infty\eta)$,

$$(x, \infty\xi) \times (y, \infty\eta) = (x, y; \infty(\xi, 0) + \infty(0, \eta))$$

et symétriquement.

(2) **Produit.**

On suppose que $WF^\infty(u_h) \cap (-WF^\infty(v_h)) = \emptyset$, alors on peut définir le produit $u_h v_h$ et on a :

$$\widehat{WF}(u_h v_h) \subset \widehat{WF}(u_h) + \widehat{WF}(v_h).$$

Remarquons que sous l'hypothèse précédente, le membre de droite est fermé.

(3) **Restriction.**

Si Z est une sous-variété de X et (u_h) tel que $\infty N^*Z \cap WF^\infty(u_h) = \emptyset$, on peut définir la restriction v_h de u_h à Z comme produit par la mesure de Dirac de Z et ce qui précède s'applique, on a :

$$\widehat{WF}(v_h) \subset (\widehat{WF}(u_h))|_{TZ}.$$

(4) **Composition.**

Soit A_h de noyau admissible $K(x, y)$.

Si $WF^\infty(u_h(y)) = \emptyset$, on a :

$$\widehat{WF}((A_h u_h)(x)) \subset \widehat{WF}'(A_h) \circ WF(u_h)$$

où la composition est ensembliste.

7.4. Ellipticité et inversibilité. On a le théorème fondamental :

THÉORÈME 37. *Si $A_h \in \Psi^{m,l}$ est elliptique en (x_0, ξ_0) , il existe B et B' dans Ψ_o^{-m} inverses microlocaux à droite et à gauche et ils coïncident microlocalement près de (x_0, ξ_0) . $(x_0, \xi_0) \notin WF(A_h B - "Id")$, $(x_0, \xi_0) \notin WF(B' A_h - "Id")$, et $(x_0, \xi_0) \notin WF(B - B')$, où " Id " est donné par un symbole qui vaut 1 près de (x_0, x_0, ξ_0) .*

Un énoncé analogue est vrai à l'infini avec des inverses dans $\Psi^{-m,-l}$.

Preuve.—

On construit par récurrence des $B_i \in \Psi_o^i$ tels que dans un voisinage microlocal fixe de (x_0, ξ_0) on ait :

$$A \circ (B_0 + B_1 + \cdots + B_N) - Id \in \Psi^{N+1}.$$

La construction est possible à cause de l'ellipticité de A . On construit maintenant par le procédé de Borel un B tel que $\forall N$, $B - (B_0 + \cdots + B_N) \in \Psi^{N+1}$.

□

Par exemple, si $WF'(A)$ est compact et $\subset T^*X$, et $\Pi \in \Psi_o^0$ est égal à Id sur un compact assez grand,

$$A \circ (Id - \Pi)$$

est régularisant.

7.5. Hamiltoniens semi-classiques. Nous pouvons maintenant définir l'objet principal de ces études. X est une variété C^∞ munie d'un volume $|dx|$.

DÉFINITION 41. *Un hamiltonien semi-classique \hat{H} est un opérateur pseudo-différentiel de $\Psi^{0,l}(X)$ (avec $l \geq 1$) auto-adjoint sur $L^2(X, |dx|)$. La plupart du temps \hat{H} est elliptique à l'infini. On note H_0 (resp. H_1) : $T^*X \rightarrow \mathbb{R}$ ses symboles principaux et sous-principaux. H_0 est l'hamiltonien classique.*

Les exemples principaux sont les suivants :

- $\hat{H} = h^2 \Delta$ où Δ est le laplacien sur une variété riemannienne complète. Alors $H_0 = \|\xi\|^2$ est la carré de la norme riemannienne sur T^*X et $H_1 = 0$.
- L'opérateur de Schrödinger : $\hat{H} = h^2 \Delta + V(x)$ où Δ est le laplacien sur une variété riemannienne et $V \in C^\infty(X, \mathbb{R})$. Il peut arriver que l'opérateur ainsi défini ne soit pas essentiellement auto-adjoint. On doit alors choisir une extension. Alors $H_0 = \|\xi\|^2 + V(x)$ et $H_1 = 0$.
- L'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique :

$$\hat{H}(u\sqrt{|dx|}) = \left(\frac{1}{2} \sum \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j(x) \right)^2 u(x) + V(x)u(x) \right) \sqrt{|dx|} ,$$

a pour symbole total

$$a(y, \xi, h) = \frac{1}{2} \|\xi - A(y)\|^2 + V(y) + \frac{h}{2i} \sum \frac{\partial a_j}{\partial y_j} .$$

On vérifie que son symbole principal est $H_0 = 1/2 \|\xi - A(x)\|^2$ et que son symbole sous-principal H_1 est nul.

7.6. Application à l'équation de Schrödinger stationnaire. Soit

$$\hat{H} = h^2 \Delta_g + V(x) - E ,$$

où Δ_g est le laplacien d'une variété riemannienne. Alors pour toute famille de solutions de $A_h u_h = 0$ à croissance modérée, et uniformément sur tout compact en E , on a :

$$\widehat{WF}(u_h) \subset \{(x, \xi) \mid \|\xi\|^2 + V(x) - E = 0\} ,$$

et en particulier $WF^\infty(u_h) = \emptyset$.

8. Résolvante d'un opérateur elliptique

Soit $\hat{H} \in \Psi^{0,l}(\Omega)$ avec $l \geq 1$ un opérateur symétrique (formellement) sur un ouvert dense Ω d'une variété X munie d'une densité $|dx|$, c'est-à-dire

$$\forall f, g \in C_o^\infty(\Omega), \quad \int \hat{H} f \cdot \bar{g} |dx| = \int f \overline{\hat{H} g} |dx| .$$

On suppose que \hat{H} a une extension autoadjointe, notée encore \hat{H} sur $L^2(X, |dx|)$ dont le domaine contient $C_o^\infty(\Omega)$ et que \hat{H} est elliptique à l'infini.

Par exemple, Ω est l'intérieur d'une variété riemannienne compacte à bord et on prend $\hat{H} = h^2 \Delta$ avec des conditions au bord de type Neumann ou Dirichlet, ou bien \hat{H} est un opérateur de Schrödinger avec un potentiel $V(x)$ minoré sur \mathbb{R}^n . On note H_0 le symbole principal de \hat{H} .

On a alors le :

THÉORÈME 38. *Soit Σ un fermé de \mathbb{R} tel que $H_0^{-1}(T^*\Omega) \subset \Sigma \subset \mathbb{R}$ et*

$$\forall h, \text{ Spectre}(\hat{H}) \subset \Sigma .$$

Si $z \notin \Sigma$, la résolvante $R(z) = (z - \hat{H})^{-1}$ de \hat{H} est un opérateur pseudo-différentiel de $\Psi^{0,-l}(\Omega)$ dont le symbole total dépend analytiquement de z et est indépendant de l'extension choisie. Le symbole complet de Weyl

$$p_h(x, \xi; z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j p_j(x, \xi; z)$$

de la résolvante est à croissance modérée près du spectre : les semi-normes dans l'espace $S^{-j-l}(T^\Omega)$ des $p_j(x, \xi, z)$ sont $O(|\Im z|^{-N})$ près du réel. Le symbole principal de la résolvante est $(z - H_0)^{-1}$ et le sous-principal $H_1/(z - H_0)^2$.*

Si le symbole de Weyl de \hat{H} ne contient que des puissances paires de h , il en est de même de celui de la résolvante.

Preuve. –

On peut construire $A, B \in \Psi^{0,-l}(X)$ propres tels que, pour $z \notin \Sigma$:

$$A \circ (z - \hat{H}) = \text{Id} + S ,$$

$$(z - \hat{H}) \circ B = \text{Id} + T ,$$

où S et T sont régularisants ; le symbole principal de A et B est $(z - H_0)^{-1}$. On en déduit :

$$R(z) = A - SB + SRT$$

qui montre que $R(z)$ est égal à A modulo un régularisant. Le calcul du sous-principal provient de l'identité $R(z)(z - \hat{H}) = \text{Id}$ et du calcul sous-principal. La croissance modérée vient par construction de A et B .

Parité : si $a(h)$ est le symbole de Weyl de $z - \hat{H}$ et qu'on a $a(-h) = a(h)$ et, si $b(h)$ est le symbole de Weyl de la résolvante, on a, en désignant par $a \#_h b$ le produit de Moyal défini dans l'équation 10 :

$$a(h) \# b(h) = 1, \quad a(-h) \#_{-h} b(-h) = 1$$

et

$$c \#_{-h} d = d \#_h c$$

d'où l'on tire

$$b(-h) \# a(h) = 1$$

et $b(-h) = b(h)$ par unicité du symbole de Weyl.

□

Le cas de l'opérateur de Schrödinger :

Soit

$$\hat{H} = -h^2 \Delta + V(x) + h^2 \hat{H}_2 + \dots$$

de symbole de Weyl

$$\|\xi\|^2 + V(x) + h^2 H_2(x, \xi) + O(h^3) .$$

Soit $R(z) = (z - \hat{H})^{-1}$ la résolvante et $R_0 + h^2 R_2 + O(h^3)$ son symbole de Weyl avec $R_0 = (z - H_0)^{-1}$. On a :

$$(11) \quad R_2 = R_0^2 H_2 + \frac{1}{2} R_0^3 \Delta V + \frac{1}{2} R_0^4 (\|dV\|^2 + 4\|\xi\|^2) .$$

Le calcul commence ainsi :

$$(z - H_0 - h^2 H_2 + O(h^3)) \# (R_0 + h^2 R_2 + O(h^3)) = 1$$

et on applique la formule du produit de Moyal (équation (10)).

9. Symbole sous-principal

Dans cette section, la variété X est munie d'une forme volume notée $|dx|$ à densité C^∞ . C'est le cas par exemple si X est une variété riemannienne.

9.1. Construction du symbole sous-principal. Dans cette situation, on peut non seulement définir de façon intrinsèque le symbole principal $\sigma_p(A_h)$ de A_h , mais le terme suivant appelé *symbole sous-principal* et noté $\sigma_{\text{sub}}(A_h)$ de A_h : si $A_h \in \Psi^{0,l}(X)$, $\sigma_p(A_h) + h\sigma_{\text{sub}}(A_h)$ est une fonction (dépendant de h) sur le cotangent de X .

On a vu plus haut que tout ΨDO A_h peut s'écrire modulo régularisant à l'aide d'un symbole $A_h(x, y, \xi)$ symétrique en x et y , par exemple la représentation de Weyl $b_w(\frac{x+y}{2}, \xi)$.

On utilise alors les 2 remarques suivantes :

1) Ce caractère symétrique est préservé par difféomorphisme de jacobien identiquement égal à 1 : il suffit d'observer que dans la formule donnée au §5.6, on peut choisir $G(x', y')$ symétrique.

2) Dans la phase stationnaire pour $I_h = \int e^{iS(z)/h} a(z) |dz|$, si on suppose qu'il existe une involution σ préservant le point critique non dégénéré et telle que S soit impaire (resp. $a|dx|$ paire) par rapport à σ , alors le second terme dans le d.a. de la phase stationnaire est nul : en effet, on peut supposer a à valeurs réelles et alors I_h est réelle (faire le changement de variable $x = \sigma(y)$ pour voir que I_h est égale à sa complexe conjuguée) alors que le second terme est donné (voir §1) par

$$\frac{h}{i} (Q^*(D)a)(0)$$

qui ici est imaginaire pur.

On a alors la :

PROPOSITION 15. *Si $A_h = Op(a_h) \in \Psi^{0,l}$ avec $a_h = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, y, \xi) h^j$ et a_h symétrique, la fonction*

$$a_0(x, x, \xi) + h a_1(x, x, \xi))$$

est bien définie sur la cotangent tant qu'on se restreint à des difféomorphismes de jacobien 1.

Preuve. –

Elle consiste à évaluer par la phase stationnaire l'intégrale

$$I_h = \langle A_h(u(x) e^{\frac{i}{h} S(x)}) | \bar{u}(x) e^{\frac{i}{h} S(x)} \rangle ,$$

où $\langle . | . \rangle$ est le produit L^2 , $\int u \bar{v} |dx|$:

$$I_h = \int A_h(u(x) e^{\frac{i}{h} S(x)}) u(x) e^{-\frac{i}{h} S(x)} |dx| .$$

Clairement, I_h dépend à la fois de A_h et du choix de $|dx|$.

On montre que :

$$I_h = \int a_h(x, x, S'(x)) u(x)^2 |dx| + O(h^2) .$$

En effet, développant l'intégrale, il vient :

$$I_h = (2\pi h)^{-n} \int e^{\frac{i}{h} ((x-y)\xi + S(y) - S(x))} a_h(x, y, \xi) u(x) u(y) |dx dy d\xi| .$$

L'involution $\sigma(x, y, \xi) = (y, x, \xi)$ a les propriétés voulues de parité. La phase a une variété critique : il faut donc utiliser les variables $u = x + y$; $v = x - y$ et intégrer d'abord à u fixé (u est préservée par σ).

□

Exemple : si g est une métrique riemannienne sur X et $|dx|$ le volume riemannien, on peut définir la laplacien riemannien $h^2\Delta_g$ qui est un ΨDO d'ordre 0, de symbole principal $\|\xi\|^2$ et de symbole sous-principal nul (exercice : montrer cette assertion, par exemple en évaluant I_h).

9.2. Symbole sous-principal et déformation. Si $H_0 : T^*X \rightarrow \mathbb{R}$ est un symbole, il existe un hamiltonien semi-classique \hat{H} (quantification de Weyl) de symbole principal H_0 et de symbole sous-principal nul. Soit $H_1 : T^*X \rightarrow \mathbb{R}$, on peut considérer un hamiltonien semi-classique de symbole principal H_0 et de sous-principal H_1 . Une façon de l'obtenir est de prendre une quantification à la Weyl de $H_0 + hH_1$. On peut voir ceci d'une façon différente, en considérant l'hamiltonien classique $H_0 + \varepsilon H_1$ dont on prend le quantifié de Weyl et on fait ensuite $\varepsilon = h$. Cette façon de voir est utile car elle permet d'utiliser directement des résultats de perturbation de mécanique classique, par exemple le théorème KAM et ainsi de construire par exemple des quasi-modes dans un cas où une attaque directe par le calcul pseudo-différentiel est vouée à l'échec.

9.3. Calcul sous-principal. Soit $p_h(x, \xi) = p_0 + hp_1 + \dots$ (resp. $q_h(y, \xi) = q_0 + hq_1 + \dots$) des symboles droits (resp. gauche) pour P_h . On a :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{sub}}(P_h) &= p_1(x, \xi) - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 p_0}{\partial x_j \partial \xi_j} \\ &= q_1(x, \xi) + \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 q_0}{\partial x_j \partial \xi_j} .\end{aligned}$$

Le symbole sous-principal du composé de 2 opérateurs est donné par :

$$\sigma_{\text{sub}}(P \circ Q) = \sigma_{\text{sub}}(P)\sigma_p(Q) + \sigma_{\text{sub}}(Q)\sigma_p(P) + \frac{1}{2i}\{\sigma_p(P), \sigma_p(Q)\} ,$$

et celui du crochet est donc :

$$\sigma_{\text{sub}}([P, Q]) = \frac{1}{i}\{\sigma_p(P), \sigma_p(Q)\} .$$

9.4. Action d'un ΨDO sur une fonction oscillante. Notons $A \in \Psi^{0,l}$ un ΨDO et par $p, q : T^*X \rightarrow \mathbb{C}$ les symboles principaux et sous-principaux. Désignons par L_p l'opérateur différentiel d'ordre 1 défini par :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}_p}((\pi^*(u(x)|dx|^{\frac{1}{2}})) = \pi^*((L_p u)(x)|dx|^{\frac{1}{2}}) ,$$

où $\pi : \Lambda_S \rightarrow X$ est la projection canonique de la variété lagrangienne Λ_S graphe de S' sur X , \mathcal{X}_p le gradient symplectique de p , \mathcal{L} la dérivée de Lie (ici d'une demi-densité) ; et donc

$$L_p u(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}(x, S'(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \xi_j}(x, S'(x)) u(x) \right) .$$

On a alors :

$$\begin{aligned}A_h(u(x)e^{\frac{i}{h}S(x)}) &= h^m e^{\frac{i}{h}S(x)} [p(x, S'(x))u(x) + \\ &\quad + h(q(x, S'(x))u(x) + \frac{1}{i}L_p u(x)) + O(h^2)] .\end{aligned}$$

On va faire le calcul dans des coordonnées où la densité est $|dx|$ et $S(x) = x_1$. On obtient alors une formule que l'on exprime de façon plus intrinsèque.

Il s'agit donc d'évaluer l'intégrale :

$$I_h(x) = (2\pi h)^{-n} \int e^{\frac{i}{h}((x-y)\xi + y_1)} a(x, y, \xi) u(y) |dy d\xi| .$$

Comme la phase est quadratique, on peut appliquer le calcul des coefficients de la phase stationnaire, en particulier le 2ème terme est donné par :

$$h^m \frac{h}{i} \sum \frac{\partial^2}{\partial y_j \xi_j} (a_m(x, y, \xi) u(y))|_{y=x, \xi=S'(x)} ,$$

que l'on interprète au moyen de l'opérateur L_p une fois remarqué que la symétrie de a_m implique :

$$\frac{\partial a_m}{\partial y_j}(x, y = x, \xi) = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_j}(x, \xi) .$$

10. Calcul fonctionnel

Soit $\hat{H} \in \Psi^{0,l}(\Omega)$ avec $l \geq 1$ un opérateur symétrique (formellement) sur un ouvert dense Ω d'une variété X munie d'une densité $|dx|$, c'est-à-dire

$$\forall f, g \in C_o^\infty(\Omega), \quad \int \hat{H} f \cdot \bar{g} |dx| = \int f \overline{\hat{H} g} |dx| .$$

On suppose que \hat{H} a une extension autoadjointe, notée encore \hat{H} sur $L^2(X, |dx|)$ dont le domaine contient $C_o^\infty(\Omega)$.

Par exemple, Ω est l'intérieur d'une variété riemannienne compacte à bord et on prend $\hat{H} = h^2 \Delta$ avec des conditions au bord de type Neumann ou Dirichlet, ou bien \hat{H} est un opérateur de Schrödinger avec un potentiel $V(x)$ minoré sur \mathbb{R}^n .

On peut alors pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définir $f(\hat{H})$ au sens de la théorie spectrale : si \hat{H} est diagonalisable et si (φ_j) est une b.o.n de $L^2(X)$ formée de fonctions propres telles que $\hat{H} \varphi_j = E_j \varphi_j$, on pose $f(\hat{H}) \varphi_j = f(E_j) \varphi_j$.

Par exemple, on peut définir la racine carrée du laplacien.

On a le :

THÉORÈME 39. *Soit $\hat{H} \in \Psi^{0,l}(\Omega)$ avec $l \geq 1$, autoadjoint et elliptique à l'infini et $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors $f(\hat{H})$ est un ΨDO de $\Psi^{0,-\infty}(\Omega)$.*

Si $H_0 \in S^l(T^\Omega)$ est le symbole principal de \hat{H} , celui de $f(\hat{H})$ est $f(H_0)$ et le sous-principal est $f'(H_0) \sigma_{sub}(\hat{H})$.*

Si le symbole de Weyl de \hat{H} ne contient que des puissances paires de h , il en est de même de celui de $\chi(\hat{H})$.

COROLLAIRE 4. *Si \hat{H} est un hamiltonien semi-classique sur une variété compacte ou un opérateur de Schrödinger sur \mathbb{R}^n avec $V_0 = \inf V < V_\infty = \liminf_{x \rightarrow \infty} V$ et $\chi \in C_o^\infty(]-\infty, V_\infty])$*

$$Z_\chi(h) = \text{trace}(\chi(\hat{H})) = \sum \chi(E_j)$$

admet un développement asymptotique complet

$$Z_\chi(h) \sim (2\pi h)^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} a_j h^j$$

où les a_j sont des intégrales sur $\text{Supp}(\chi \circ H_0)$ de fonctions polynômiales des symboles de \hat{H} et de leurs dérivées. On a :

$$a_0 = \int \chi \circ H_0 |dL|, \quad a_1 = \int (\chi' \circ H_0) \cdot H_1 |dL| .$$

Preuve. –

On utilise une *extension quasi-analytique* de f à \mathbb{C} , c'est une fonction $F \in C_o^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ qui étend f et telle que $\bar{\partial}F$ soit plat sur \mathbb{R} .

On alors la formule

$$f(\hat{H}) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} F(z)(z - \hat{H})^{-1} dz ,$$

où γ_ε est une famille de chemins qui convergent vers l'axe réel tout en faisant le tour du support de f .

Ou encore, par Stokes,

$$f(\hat{H}) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}F(z - \hat{H})^{-1} |dxdy| ,$$

où l'intégrale converge dans les opérateurs bornés sur $L^2(X)$, car la norme de la résolvante croît au plus comme l'inverse de la distance de z au spectre soit $O(|y|^{-1})$. On utilise ensuite le résultat sur la résolvante donné dans la section 8 pour voir que $f(\hat{H})$ est dans $\Psi^{0,-l}$. Soit $R(z) = (z - \hat{H})^{-1}$ la résolvante et $\sum_{j=0}^\infty h^j p_j(x, \xi; z)$ son symbole de Weyl. Chacune des intégrales

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}F p_j(x, \xi; z) |dxdy| ,$$

définit un élément $q_j(x, \xi)$ de S_o et on construit ainsi un pseudo-diff. B de Ψ_o^0 par

$$B = Op_W(\sum h^j q_j) .$$

On vérifie alors que $B - \chi(\hat{H})$ est régularisant en tronquant le symbole de R et donc de B à l'ordre N .

Reprenant le calcul de la section 8 en tronquant à l'ordre N , on obtient avec des notations évidentes :

$$B_N \circ (z - \hat{H}) = \text{Id} + S_N ,$$

$$(z - \hat{H}) \circ B_N = \text{Id} + T_N ,$$

où S_N et T_N sont dans $\Psi^{N, -l-N}$ et à croissance modérée près du réel. On en déduit :

$$R(z) = B_N - S_N B_N + S_N R T_N$$

qui montre que $R(z)$ est égal à B_N modulo un régularisant d'ordre N à croissance modérée au voisinage de \mathbb{R} .

Dans le cas de Schrödinger dans \mathbb{R}^n , les estimations en termes de la distance d'Agmon (voir chapitre 9) montrent que le noyau de $f(\hat{H})$ est à décroissance en $e^{-C(d(0,x)+d(0,y))/h}$ à l'infini.

□

Exemple : le cas de Schrödinger .

Soit $\hat{H} = -h^2\Delta + V + h^2W$, on vérifie que :

(12)

$$\sigma_W(\chi(\hat{H})) = \chi(H_0) + h^2(\chi'(H_0)W + \frac{1}{4}\chi''(H_0)\Delta V + \frac{1}{12}\chi'''(H_0)(\|dV\|^2 + 4\|\xi\|^2)) + O(h^3).$$

10.1. Application à la formule de Weyl. On suppose $H_0 : T^*X \rightarrow \mathbb{R}$ propre et on veut évaluer la trace de $f(\hat{H})$ où \hat{H} vérifie les hypothèses précédentes. Alors, d'après le corollaire 4, les mesures de Radon

$$f \rightarrow Tr(f(\hat{H}))$$

ont un équivalent semi-classique égal à $(2\pi h)^{-n} H_0^*(|dL|)$ où $|dL|$ est la mesure de Liouville.

On en déduit la formule asymptotique de Weyl :

$$\#\{A \leq E_j(h) \leq B\} \sim \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{A \leq H_0(x, \xi) \leq B} |dx d\xi|.$$

11. Quantification de Wick, mesures de Husimi

11.1. Quantification de Wick. Un opérateur pseudo-différentiel $A = Op(a)$ de symbole réel ≥ 0 n'est pas nécessairement un opérateur ≥ 0 au sens que $\langle Au|u \rangle \geq 0$ pour toute $u \in C_o^\infty$.

Un exemple très simple est donné en dimension 1 par le symbole $H_0 = (x\xi)^2$, on vérifie que

$$Op_W H_0 = Op_W(x\xi)^2 - \frac{h^2}{4}$$

et que le spectre de $Op_W(x\xi)$ est \mathbb{R} .

On va, dans ce §, donner une quantification Op_+ , dite de Wick, qui aura l'avantage d'être de façon évidente positive au sens suivant : l'opérateur $Op_+(a)$ associé à un symbole $a \in S^0(T^*\mathbb{R}^n)$ partout ≥ 0 est autoadjoint ≥ 0 .

On vérifiera sans difficultés que $Op_+(1) = Id$.

Soit

$$e_{x, \xi}(y) = (\pi h)^{-n/4} e^{-(x-y)^2/2h} e^{i\xi y/h}.$$

Lorsque h est petit cette fonction se localise en x et sa transformée de Fourier en ξ (de façon optimale par rapport aux relations d'incertitude). On note $\Pi_{x, \xi}$ le projecteur orthogonal sur la droite de $L^2(\mathbb{R}^n)$ engendrée par $e_{x, \xi}$.

On pose

$$Op_+(a) = (2\pi h)^{-n} \int a(y, \eta) \Pi_{y, \eta} |dy d\eta|.$$

Si $a \in L^1$, $Op_+(a)$ est à trace et on a : $Tr(Op_+(a)) = (2\pi h)^{-n} \int a$.

On va montrer la :

PROPOSITION 16. *Si $a \in S^0(T^*\mathbb{R}^n)$, $Op_+(a) \in \Psi^{0,0}(\mathbb{R}^n)$ et admet a comme symbole principal.*

Preuve. –

On commence par calculer le symbole de Weyl de $\Pi_{0,0}$ dont on déduit celui de $\Pi_{y,\eta}$ par translation. La formule (9) pour la transformée de Wigner donne immédiatement :

$$\sigma_W(\Pi_{0,0}) = 2^n e^{-(x^2+\xi^2)/h} ,$$

d'où l'on déduit, en posant $\varepsilon(x, \xi) = (\pi h)^{-n/2} e^{-(x^2+\xi^2)/h}$, que :

$$Op_+(a) = Op_W(a \star \varepsilon) .$$

Il est facile de vérifier que si $a \in S^0$, il en est de même de $a \star \varepsilon$ et que $a - a \star \varepsilon \in hS^0$. D'où le résultat. \square

On peut aussi définir une quantification positive sur une variété en utilisant une partition de l'unité φ_α^2 subordonnée à un atlas et

$$Op_+(a) = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x) Op_{+,\mathbb{R}^n}(\varphi_{\alpha}a) .$$

11.2. Mesures de Husimi. On mesure la localisation de fonctions (φ_h) de norme L^2 toutes égales à 1 au moyen des *mesures de Husimi* définies par :

$$\mu_+^{\varphi_h}(a) = \langle Op_+(a) \varphi_h | \varphi_h \rangle .$$

Ce sont des mesures de probabilités sur $\widehat{T^*X}$, car $Op_+(1) = Id$.

Elles ont les propriétés suivantes :

(i) La projection sur X est donnée dans le cas $X = \mathbb{R}^n$ par :

$$\pi_X(\mu_+^{\varphi_h}) = (|\varphi_h|^2 \star |e_{0,0}|^2) |dx| ,$$

et donc en général :

$$\pi_X(\mu_+^{\varphi_h}) \rightarrow |\varphi|^2 |dx| ,$$

quand $h \rightarrow 0$.

(ii) Si $K \cap WF(\varphi) = \emptyset$, $\mu_+^{\varphi_h}(K) \rightarrow 0$.

On applique ceci aux fonctions propres φ_j d'un hamiltonien semi-classique \hat{H} .

On a les relations suivantes :

$$i) \sum_j \mu_j = (2\pi h)^{-n} |dx d\xi| ,$$

en effet

$$\sum_j \mu_j(a) = (2\pi h)^{-n} \int a(y, \eta) \sum_j \langle \Pi_{y,\eta} \varphi_j | \varphi_j \rangle |dy d\eta| ,$$

où la somme par rapport à j vaut la trace de $\Pi_{y,\eta}$ qui vaut 1.

ii) Si $E_j \rightarrow E$, les μ_j se concentrent sur $a_0^{-1}(E)$, au sens que si $K \cap a_0^{-1}(E) = \emptyset$, on a :

$$\mu_j(K) \rightarrow 0 .$$

Lorsque l'on est sur une variété les μ_j ne sont pas canoniques, mais $\mu_j(a)$ est bien défini à $o(1)$ près quand $h \rightarrow 0$.

iii) Les mesures μ_j sont presque invariantes par le flot classique φ_t :

$$(13) \quad \forall t, \mu_j(a \circ \varphi_t) = \mu_j(a) + O(h) .$$

La preuve est simple. Pour $a \in C_o^\infty$, on a :

$$0 = \langle U(-t)Op_+(a)U(t)\varphi_j | \varphi_j \rangle ,$$

où $U(t) = e^{-it\hat{H}/h}$. En dérivant par rapport à t en $t = 0$:

$$\langle \frac{i}{h}[\hat{H}, Op_+(a)]\varphi_j | \varphi_j \rangle = 0$$

et donc

$$\langle Op_+(\{H, a\})\varphi_j | \varphi_j \rangle = O(h)$$

qui implique

$$\frac{d}{dt}_{t=0} \mu_j(a \circ \varphi_t) = O(h) ,$$

d'où le résultat par intégration sur $(0, t)$.

On en déduit le :

THÉOREME 40. *Si μ_∞ est une limite vague de mesures de Husimi de fonctions propres de \hat{H} quand $h \rightarrow 0$, μ_∞ est invariante par le flot hamiltonien classique de H_0 .*

12. Constantes de Planck effectives

Je remercie Hervé Kunz qui m'a suggéré d'inclure cette section.

Dans un certain nombre de problèmes, on doit deviner la façon d'introduire un petit paramètre h , appelé alors constante de Planck effective, de façon à pouvoir utiliser les méthodes semi-classiques.

12.1. Asymptotique des grandes énergies. On considère un opérateur de Schrödinger sur une variété X , soit $\hat{H} = \Delta_g + V(x)$ où g est une métrique riemannienne et $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ est propre. Il admet un spectre $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$. On considère l'opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 $\hat{K} = h^2 \hat{H}$ de spectre $h^2 \lambda_k$. Son symbole principal est la métrique riemannienne sur T^*X et son sous-principal est nul. Le terme $h^2 V$ est *sous-sous-principal*. Le spectre de \hat{K} dans un intervalle $[E_-, E_+]$ fixé est formé des $h^2 \lambda_k$ avec $\lambda_k \in [E_-/h^2, E_+/h^2]$. Donc l'asymptotique semi-classique pour \hat{K} dans un intervalle d'énergie fixé équivaut à l'asymptotique des grandes énergies pour \hat{H} .

Dans le même ordre d'idée le développement asymptotique de l'équation de la chaleur, cher aux géomètres riemanniens (voir [BGM71]), peut s'interpréter comme la trace de

$$e^{-h^2 \Delta_g}$$

qui n'est autre que la fonction e^{-t} du laplacien semi-classique.

12.2. Oscillateurs harmoniques. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, il existe une autre stratégie pour voir la limite des hautes énergies comme limite semi-classique c'est de faire un changement de variable en x de la forme $x' = \sqrt{h}x$ qui transforme l'oscillateur harmonique $\Omega = -\Delta + V_2(x)$ en

$$\frac{1}{h}(-h^2 \Delta + V_2(x')) .$$

Dans le cas d'un opérateur différentiel qui commute avec Ω , le même changement conduit à un régime semi-classique pour l'étude du spectre joint aux grandes énergies. C'est ce qu'on appelle les *polyades* pour l'étude des valeurs propres dans le régime semi-excité par la forme normale de Birkhoff (voir chapitre 8).

12.3. Limite adiabatique quantique. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{i} \frac{dX}{dt} = A(\varepsilon t)X ,$$

où $\tau \rightarrow A(\tau)$ est une application C^∞ de l'intervalle $[0, T]$ dans les matrices complexes $N \times N$. L'inconnue $X(t)$ est dans \mathbb{C}^N . La limite $\varepsilon \rightarrow 0$ s'appelle la limite adiabatique. Le temps t varie entre 0 et T/ε . Posant $s = \varepsilon t$ et $h = \varepsilon$, on obtient :

$$\frac{h}{i} \frac{dX}{ds} = A(s)X ,$$

qui est une équation de type semi-classique avec un hamiltonien vectoriel dont le symbole de Weyl sur l'espace des phases $T^*([0, T])$ est

$$\sigma \text{Id} - A(s)$$

et la variété caractéristique Z est la réunion des graphes des valeurs propres :

$$Z = \{\det(\sigma \text{Id} - A(s)) = 0\} .$$

13. Crochets

CHAPITRE 4

LA METHODE BKW EN DIMENSION 1

Dans ce chapitre, je vais présenter la méthode BKW et la méthode de Maslov pour l'équation de Schrödinger en dimension 1. On considère donc l'opérateur

$$\hat{H} = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

où V est C^∞ et pourrait dépendre de h sous la forme $V_h(x) = V_0(x) + h^2 W(x)$ où V_0 et W sont C^∞ à valeurs réelles ; le cas $V_0 = 0$ correspond à l'asymptotique des grandes valeurs propres pour $-\frac{d^2}{dx^2} + W(x)$. Dans la suite nous supposons $W = 0$ et $V = V_0$. On cherche à résoudre l'équation de Schrödinger 1d stationnaire

$$(\hat{H} - E)u = 0$$

1. L'Ansatz BKW

L'Ansatz primitif est de chercher u sous la forme d'une fonction rapidement oscillante

$$u = a(x)e^{iS(x)/h},$$

mais on peut le perfectionner en prenant pour a une série formelle en h . Prenons par exemple ce qui est le plus adapté ici

$$a_h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \left(\frac{h}{i}\right)^j.$$

On obtient en appliquant brutalement $\hat{H} - E$ à l'Ansatz :

$$(\hat{H} - E)u = ((S'(x))^2 + V(x) - E)a_h(x) + \frac{h}{i}(2a'_h S' + a_h S'') - h^2 a''_h) e^{iS(x)/h},$$

soit, pour $j \geq 0$,

$$a''_j + (2a'_{j+1} S' + a_{j+1} S'') + a_{j+2}((S')^2 + V - E) = 0$$

avec la convention $a_j = 0$ si $j < 0$.

1.1. Equation eiconale pour S . Le terme en h^0 dans $(\hat{H} - E)u$ est

$$(S'(x))^2 + V(x) - E)a_0(x)e^{iS(x)/h}.$$

L'annulation de ce premier terme s'appelle *équation eiconale* (eiconale pour image, icône) ou de *Hamilton-Jacobi* :

$$(e) \quad S'(x)^2 + V(x) - E = 0$$

avec S lisse, cela signifie que le graphe de S' est contenu dans la couche d'énergie $C_E = \{\xi^2 + V(x) = E\}$: on doit donc éviter les caustiques (tangentes verticales de C_E). Dans tout intervalle où $V(x) < E$, il y a 2 solutions à une constante près, $\pm S$, avec $S' = \sqrt{E - V(x)}$. Si on regarde la phase sur C_E , on a $dS = \xi dx$.

1.2. Equation de transport. Si l'équation eiconale est satisfaite, on a :

$$(\hat{H} - E)u = \frac{h}{i}(2a'_0S' + a_0S'')e^{iS(x)/h} + O(h^2)$$

Donc a_0 doit satisfaire l'équation (t) dite de transport :

$$(t) \quad 2a'_0S' + a_0S'' = 0$$

Si $S' \neq 0$, on a

$$a_0 = C|S'(x)|^{-\frac{1}{2}}$$

Soit $\omega = a(x)^2|dx| = |u(x)|^2 + O(h^\infty)$ et $V = 2S'(x)\partial_x$ la projection du champ hamiltonien sur \mathbb{R}_x ; on a :

$$\mathcal{L}_V\omega = 0 ,$$

car

$$\mathcal{L}_V\omega = a_0(2da_0(V) + a_0\text{div}V)|dx|$$

et on a :

$$2da_0(V) + a_0\text{div}V = 2a'_0S' + a_0S''$$

L'image réciproque de ω sur C_E par la projection sur \mathbb{R}_x est donc une densité invariante par la dynamique classique. Donc $a_0(x)e^{iS(x)/h}$ contient comme informations la variété C_E (la phase) et la densité invariante sur C_E .

1.3. Calcul des a_j pour $j \geq 1$. On a :

$$2S'a'_j + S''a_j + a''_{j-1} = 0 ,$$

et donc a_j est déterminé par sa valeur en x_0 . On peut ainsi choisir les a_j réels.

1.4. Remarque. on peut aussi utiliser l'Ansatz équivalent

$$u_h(x) = e^{\sum_{j=-1}^{\infty} \left(\frac{h}{i}\right)^j S_j(x)} .$$

Ici $S_{-1} = S$ sera donné par l'équation eiconale, $e^{S_0} = a_0$ et ainsi de suite. Dans ce cas, les S_j peuvent être choisis réels.

1.5. Un énoncé. On en déduit :

THÉORÈME 41. *Sur tout intervalle où $V(x) < E$ (zone classiquement permise), si x_0 est donné, il existe une unique solution BKW (série formelle) dite normalisée en x_0*

$$u_+(x) = e^{iS(x)/h} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \left(\frac{h}{i}\right)^j \right)$$

telle que $S(x_0) = 0$, $S'(x) > 0$, $a_0(x_0) = 1$ et les $a_j(x_0)$ sont nuls pour $j \geq 1$. Les a_j sont réels. Toute autre solution BKW (avec $S' > 0$) est de la forme $v_+ = e^{iA/h} \left(\sum b_j \left(\frac{h}{i}\right)^j \right)$. Les solutions BKW u_- avec $S' < 0$ sont les complexes conjuguées des précédentes aussi obtenues en changeant h en $-h$.

2. Développement asymptotique des vraies solutions

Supposons que $E > V(x)$ sur $[a, b]$. Soit $u(x)$ la solution de $(\hat{H} - E)u = 0$ vérifiant $u(x_0) = A$, $u'(x_0) = B$ avec $A, B = O(h^{-N})$. Soit $u_{\pm}(x)$ les 2 solutions BKW normalisées comme plus haut. Soit α_{\pm} telles que $w = \alpha_+ u_+ + \alpha_- u_-$ a les mêmes données de Cauchy que u . Alors $u - w = O(h^{\infty})$: les développements BKW sont les d.a. des vraies solutions.

On cherche à évaluer $u - w$ par variations des constantes à partir des solutions BKW u_{\pm} .

$$u - w = \beta_+ u_+ + \beta_- u_-$$

avec $\beta_{\pm}(x_0) = 0$ et $\beta'_+ u_+ + \beta'_- u_- = 0$. On arrive en posant $\beta = (\beta_+, \beta_-)$ à

$$\|\beta'\| \leq O(h^{\infty}) \|\beta\|$$

et on conclut que $\beta(x) = O(h^{\infty})$.

3. Spectre pour Schrödinger périodique

On suppose V de période T . \hat{H} est alors un opérateur essentiellement autoadjoint sur $L^2([0, T])$ avec comme domaine les fonctions C^2 périodiques sur \mathbb{R} . L'opérateur \hat{H} admet un spectre discret

$$E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_j \leq \dots$$

s'accumulant en $+\infty$. Les E_j dépendent de h et lorsque $h \rightarrow 0$ avec j fixé $E_j(h) \rightarrow \inf V$. Le spectre devient de plus en plus dense dans la demi-droite $[\inf V, \infty[$. La formulation du comportement asymptotique des E_j quand $h \rightarrow 0$ est donc assez subtile. Soit $\sup V < E_- < E_+$ et $I = [E_-, E_+]$. Le but de ce qui suit est de décrire le comportement asymptotique du spectre dans I .

On a le :

THÉORÈME 42. *Soit $Z_h \subset I$ défini comme l'ensemble des E tels que $A(E) = \int_0^T S'(x) dx \in 2\pi h \mathbb{Z}$. Il existe une série formelle $\varepsilon_h(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j(E) h^{2j}$ avec les $\varepsilon_j \in C^{\infty}$ telle que si on choisit $\Phi_h(E) \sim E + \varepsilon_h(E)$ et qu'on pose*

$$\tilde{Z}_h = \Phi_h(Z_h)$$

alors \hat{H} admet, pour tout N , exactement 2 valeurs propres dans tout intervalle de taille h^N centré en un point de \tilde{Z}_h et pas d'autres valeurs propres dans I .

LEMME 7. *On a :*

$$\frac{dA}{dE} = T(E)$$

où $T(E)$ est la période de la trajectoire d'énergie E .

Preuve. –

On prend comme coordonnées dans un anneau $E_- \leq H(x, \xi) \leq E_+$ le couple (t, H) . Ce sont des coordonnées canoniques : $\omega(\partial_t, \partial_H) = -dH(\partial_H) = -1$

□

On en déduit que l'écart asymptotique de 2 points de Z_h situés près de E est $2\pi h/T(E)$.

Preuve. –

- *La série formelle ε .*

Soit $u_+(x)$ la série BKW. Il est clair que $u_+(x+T)e^{-iA(E)/h}$ est une autre série BKW et donc

$$u_+(x+T) = e^{iA(E)/h} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \left(\frac{h}{i}\right)^j\right) u_+(x)$$

Réalisant la série formelle précédente, donne pour la périodicité de u_+ une équation implicite en (E, h) de la forme :

$$e^{i(A(E)-A(E_0))/h} (1 + b(E, h)) = 1$$

avec $E_0 \in Z_h$. On renormalise cette équation en posant $E = E_0 + \alpha h$ ce qui donne une équation implicite

$$\Phi(\alpha, h, E_0) = 0$$

avec $\Phi(0, 0, E_0) = 0$ et la dérivée $\partial_\alpha \Phi(0, 0, E_0)$ vaut $T(E_0)$ qui est non nul. On obtient ainsi

$$\alpha = f(h, E_0) = O(h)$$

et une série formelle

$$\varepsilon = \alpha h = \sum_{j \geq 2} \varepsilon_j(E_0) h^j$$

- *Usage de la symétrie $\xi \rightarrow -\xi$ et parité de ε .* Le caractère auto-adjoint de \hat{H} implique facilement que les ε_j sont réels. Il est clair que le passage de u_+ à u_- (changement de h en $-h$) préserve la solution trouvée et ainsi seuls les termes pairs dans la série sont non nuls.
- *Existence de valeurs propres.* On a donc pour $E \in \tilde{Z}_h$ 2 solutions périodiques u_+ et u_- de $(\hat{H} - E) = O(h^\infty)$, d'autres part le produit scalaire L^2 de u_+ et u_- est $O(h^\infty)$ (phase stationnaire) et on en déduit par le minimax l'existence des 2 valeurs propres dans chaque intervalle de largeur $O(h^\infty)$ autour de $E \in \tilde{Z}_h$.
- *Il n'y en a pas d'autres.* Le fait qu'il n'y ait pas d'autres valeurs propres résulte du calcul de la trace de $\chi(\hat{H})$ ($\chi \in C_o^\infty(I, \mathbb{R})$), comme somme des valeurs propres et comme ΨDO dont le symbole principal est $\chi \circ H_0$ et le sous-principal nul (voir le théorème 39).
- *L'asymptotique de Weyl.* Il est facile de vérifier que le nombre de valeurs propres de \hat{H} dans I est équivalent au cardinal de Z_h qui est lui-même équivalent à $1/2\pi h$ fois l'aire de la région $\{H(x, \xi) \in I\}$. C'est l'équivalent de Weyl.

□

4. L'Ansatz de Maslov

Soit x_0 tel que $V(x_0) = E$ et $V'(x_0) > 0$. Le cas $V'(x_0) < 0$ se traite de façon similaire. Le point x_0 est alors dit caustique et l'Ansatz BKW, $u \sim |\xi|^{-\frac{1}{2}} e^{iS(x)/h}$ diverge. Près de $(x_0, 0)$, C_E est le graphe d'une fonction $x = T'(\xi)$. Soit $\xi \in J$ où

$J = [-A, A]$ est un intervalle contenant 0 et $x_0 > x_1 = T'(A)$. Il est donc naturel d'essayer une forme BKW pour $\mathcal{F}_h u$ dans $I = [x_1, x_0 + 1]$, soit

$$u(x) = (2\pi h)^{-\frac{1}{2}} \int e^{i(x\xi - T(\xi))/h} b(\xi) d\xi$$

où b est un symbole en h . Lorsque x est voisin de x_0 on doit retrouver l'Ansatz BKW, ou plus précisément une combinaison linéaire de u_+ et de u_- . Cela donne ensuite une règle de raccordement qui donnera les règles de quantification (sélection des valeurs propres).

THÉORÈME 43. *Il existe une unique série formelle*

$$b_h(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x) h^j$$

avec $b(0) = 1$ telle que

$$u_{Maslov}(x) = (2\pi h)^{-\frac{1}{2}} \int e^{i(x\xi - T(\xi))/h} b_h(\xi) d\xi$$

soit solution de $(\hat{H} - E)u = O(h^\infty)$ dans I .

Preuve.—

Soit

$$u(x) = (2\pi h)^{-\frac{1}{2}} \int e^{i(x\xi - T(\xi))/h} b(\xi) d\xi ,$$

avec $b \in C_o^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$(\hat{H} - E)u(x) = (2\pi h)^{-\frac{1}{2}} \int e^{i(x\xi - T(\xi))/h} (\xi^2 + V(x) - E)b(\xi) d\xi .$$

On va utiliser le fait que $\xi^2 + V(x) - E$ s'annule sur $C_E = \{z(\xi) = (T'(\xi), \xi)\}$ pour intégrer par parties ; on peut écrire :

$$(14) \quad \xi^2 + V(x) - E = c(x, \xi)(x - T'(\xi))$$

où $c(z(\xi)) = V'(T'(\xi)) := W(\xi)$ et

$$\frac{d}{d\xi} W(\xi) = \partial_x c T''(\xi) + \partial_\xi c$$

soit

$$\partial_\xi c(z(\xi)) = \frac{1}{2} W'(\xi) ,$$

car $V''(x(\xi)) = 2\partial_x c(z(\xi))$ qui vient de l'équation (14). Comme on a :

$$\frac{h}{i} \frac{d}{d\xi} e^{i(x\xi - T(\xi))/h} = (x - T'(\xi)) e^{i(x\xi - T(\xi))/h} ,$$

on peut intégrer par parties :

$$u(x) = -\frac{h}{i} (2\pi h)^{-\frac{1}{2}} \int e^{i(x\xi - T(\xi))/h} \frac{\partial}{\partial \xi} (c(x, \xi) b(\xi)) d\xi .$$

On choisit $b = b_0$ de façon que, dans J , $\frac{\partial}{\partial \xi} (c(x, \xi) b(\xi))$ s'annule sur C_E , ce qui permettra d'itérer et donne $(\hat{H} - E)u = O(h^{2-\frac{1}{2}})$. Cette équation se réécrit :

$$Wb'(\xi) + \frac{1}{2} W'(\xi) b(\xi) = 0$$

et comme la projection sur \mathbb{R}_ξ de la dynamique classique est $-W \frac{d}{d\xi}$, on interprète cette équation de transport comme l'invariance de $b_0^2 |d\xi|$ par la dynamique. On obtient $b_0 = c|W|^{-\frac{1}{2}}$. Itérant la méthode d'intégration par parties donne le résultat. Lorsque $x > x_0$, on obtient, par la phase non stationnaire, $u(x) = O(h^\infty)$ ainsi que ses dérivées.

□

5. Recollement des Ansatz

Soit u_\pm des solutions BKW normalisées de façon que $S(x_0) = 0$ $a_0(x) = |S'(x)|^{-\frac{1}{2}}$. On a :

THÉORÈME 44. *Soit u_{Maslov} normalisée par $T(0) = 0$ et $b_0(\xi) = |W(\xi)|^{-\frac{1}{2}}$. Pour tout x tel que $x_1 \leq x < x_0$, on a :*

$$u_{Maslov} = C_+(h)u_+ + C_-(h)u_- + O(h^\infty)$$

où C_\pm sont des séries formelles en h avec

$$C_\pm(h) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\pi/4} + O(h) .$$

Preuve.—

Cela provient de l'application de la phase stationnaire et de l'identité

$$\sqrt{2} \frac{b_0(\xi)}{|T''(\xi)|^{\frac{1}{2}}} = a_0(x) ,$$

avec $x = T'(\xi)$. Cette identité provient de $2\xi + Wx'(\xi) = 0$ sur C_E , car $S'(x) = \xi$.

□

On voit ainsi que la solution $u_+(x) + \alpha(h)u_-$ se prolonge à un voisinage de x_0 en une solution $O(h^\infty)$ pour $x > x_0$ si et seulement si $\alpha(h) = e^{-i\pi/2} + \sum \alpha_j h^j$. On a alors :

$$\alpha(h)u_-(x_1) = u_+(x_1) e^{i\left(\frac{1}{h} \int_{x_+}^{x_-} \xi dx - \frac{\pi}{2} + O(h)\right)} ,$$

où $z_\pm = (x_1, \pm S'(x_1))$ et l'intégrale est sur C_E .

6. Asymptotique près de la caustique

Il est intéressant de comprendre l'asymptotique précise de u_{Maslov} près de la caustique. Soit $T(\xi) = x_0 - a\xi^3 + O(\xi^4)$ près de 0. On montre dans la section 3 du chapitre 5 que $h^{1/6} u_{Maslov}(a^{-1/3} h^{-2/3} x)$ ($x = O(h^{2/3})$) converge lorsque $h \rightarrow 0$ vers un multiple de la fonction de Airy qui fabrique ainsi la transition de la zone classiquement permise à la zone classiquement interdite de façon universelle.

Donnons une version heuristique de ce calcul :

$$u = ch^{-\frac{1}{2}} \int e^{\frac{i}{h}((x-x_0)\xi - a\xi^3 + O(\xi^4))} (1 + O(\xi)) d\xi$$

et on pose $\xi = (h/a)^{1/3} \xi_1$ et $x - x_0 = a^{1/3} h^{2/3} x_1$, ce qui donne

$$u(x) = Ch^{-1/6} Ai(a^{-1/3} h^{-2/3} x) + O(h^{1/3}) .$$

7. Les conditions de Bohr-Sommerfeld

La recherche de solutions stationnaires négligeables dans la zone classiquement interdite est une extension du cas traité dans la section 3. la condition $\int_{C_E} \in 2\pi h\mathbb{Z}$ doit être remplacée par une condition modifiée $\int_{C_E} \in 2\pi h(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ pour tenir compte du déphasage supplémentaire créé par les caustiques. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, cela donne lieu à des formules exactes, car $-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^2$ est conjugué à $h(-\frac{d^2}{dx_1^2} + x_1^2)$ par la transformation unitaire $f(x_1) \rightarrow h^{1/4}f(\sqrt{h}x)$.

8. Réciproque des conditions de Bohr-Sommerfeld

Soit \hat{H} comme plus haut et $J = [E_-, E_+]$ un intervalle ne rencontrant pas les valeurs critiques de V . On veut montrer que toutes les valeurs propres dans cet intervalle sont données par les conditions de Bohr-Sommerfeld. Pour cela on choisit $\chi \in C_o^\infty$ qui vaut 1 sur J et dont le support ne rencontre aucune valeur critique de V . On évalue la trace de $\chi(\hat{H})$ de 2 façons à $O(h)$ près.

(1) A l'aide du calcul pseudo-différentiel, on obtient

$$\text{Trace}\chi(\hat{H}) = \frac{1}{2\pi h} \int_{\mathbb{R}^2} \chi(\xi^2 + V(x)) |dx d\xi| + O(h) .$$

(2) En écrivant $A(E_j) = 2\pi h(j + \frac{1}{2})$ et $E_j^{BS} = E_j + O(h^2)$, on obtient par la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum \chi(E_j^{BS}) = \frac{1}{2\pi h} \int (\chi \circ A^{-1})(t) dt + O(h) .$$

Les 2 expressions coïncident à $O(h)$ près, ce qui exclut que l'on ait pu manquer des valeurs propres dans J car alors on aurait une différence supérieure à un entier non nul entre la première et la deuxième expression de la trace.

9. Les termes suivants dans Bohr-Sommerfeld

Écrivons les conditions de Bohr-Sommerfeld sous la forme

$$A_h(E) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

où

$$A_h(E) = A_0(E) + h^2 A_2(E) + h^3 A_3(E) + \dots$$

et $A_0(E) = \int_{C_E} \xi dx$. Le problème posé est celui du calcul des $A_j(E)$, $j \geq 2$ qui équivaut à calculer le terme suivant dans le développement asymptotique des valeurs propres. L'idée est de calculer la trace de $\chi(\hat{H})$ comme plus haut de 2 façons, mais en poussant le développement plus loin que $o(1)$.

On a :

$$\text{trace}\chi(\hat{H}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \chi(A_h^{-1}(2\pi h j))$$

et par Poisson et en posant $E = A_h(t)$:

$$\text{trace}\chi(\hat{H}) = \frac{1}{2\pi h} \int \chi(E) A'_h(E) dE + O(h^\infty)$$

ce qui détermine A'_h comme distribution sur $[E_-, E_+]$ et donc à une constante indépendante de E près.

D'autre part, il est facile de voir que

$$I = \int F(H_0(x, \xi)) G(x, \xi) |dx d\xi| = \int F(E) \left(\int_{C_E} G dt \right) dE$$

et donc si $F = \chi^{(m)}$, on a $I = \langle T | \chi \rangle$ où T est la distribution

$$T = (-1)^m \frac{d^m \bar{G}(E)}{dE^m}$$

avec $\bar{G}(E) = \int_{C_E} G dt$.

On en déduit le calcul de $A'_2(E)$ grâce à la formule 12 du chapitre 3.

Pour le terme $A_2(E)$, on trouve :

$$A_2(E) = \frac{d\bar{G}_1(E)}{dE} - \frac{d^2\bar{G}_2(E)}{dE^2} + C(h)$$

avec $G_1 = \frac{1}{4}V''$ et $G_2 = \frac{1}{12}((V')^2 + 4\xi^2)$.

La constante est nulle, car elle est nulle pour l'oscillateur harmonique et on peut toujours raccorder C^∞ à un oscillateur harmonique.

CHAPITRE 5

FONCTIONS LAGRANGIENNES

Les références pour ce chapitre sont principalement [Dui74], [Mas72], [MF81] et [HR81]. Il s'agit d'étudier systématiquement les fonctions définies par des intégrales rapidement oscillantes en vue de construire des solutions BKW de l'équation de Schrödinger même au voisinage des caustiques.

L'idée est d'associer à chaque variété lagrangienne $\Lambda \subset T^*(X)$ une classe de fonctions dépendant d'un paramètre h tendant vers 0, bien définie modulo $O(h^\infty)$. Ces espaces $O^m(X, \Lambda)$ ($m \in \mathbb{Z}$) sont emboîtés :

$$O^\infty(X, \Lambda) \subset \dots \subset O^{m+1}(X, \Lambda) \subset O^m(X, \Lambda) \subset \dots \subset O(X, \Lambda) .$$

Le fait important est que les quotients successifs O^m/O^{m+1} peuvent se décrire de façon très géométrique comme sections d'un fibré en droites au-dessus de Λ dépendant de h d'une façon précisée.

L'étape suivante est la résolution approchée d'équations aux dérivées partielles dépendant de h de la forme

$$P(x, hD_x)u(x, h) = O(h^\infty) .$$

On a en vue l'équation de Schrödinger (stationnaire ou non) avec $h = \hbar$ et l'équation des ondes avec $h = 1/\omega$.

Après avoir décrit les espaces $O^m(X, \Lambda)$, on s'attaquera à la partie difficile du calcul symbolique global, i.e. la description du quotient O^0/O^1 .

1. L'Ansatz BKW

Dès les débuts de la mécanique quantique, les physiciens ont proposés des formes *a priori* ou *Ansatz* pour les solutions de l'équation de Schrödinger (stationnaire ou non). Le plus célèbre est l'Ansatz BKW (Brillouin-Kramers-Wentzell) qui propose des fonctions d'ondes de la forme $u_h(x) = a(x)e^{iS(x)/h}$. L'insertion de u dans les équations de Schrödinger fournit immédiatement dans le régime semi-classique l'équation de Hamilton-Jacobi qui est une EDP du premier ordre non-linéaire portant sur S . Dans le cas stationnaire, cette équation s'écrit

$$\|S'(x)\|^2 + V(x) = E .$$

Si on introduit la variété lagrangienne Λ_S qui est le graphe de S' , on peut reformuler géométriquement l'équation de Hamilton-Jacobi comme le problème de trouver une variété lagrangienne Λ telle que $\Lambda \subset \{\frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x) - E = 0\}$. Une telle variété lagrangienne est invariante par la dynamique classique et va donc en général présenter des caustiques (enveloppes de trajectoires) près desquelles l'Ansatz BKW ne s'applique pas. Suivant une vieille idée de Huyghens, Maslov a proposé un Ansatz de superposition de fonctions BKW. Cet Ansatz permet effectivement de franchir les caustiques. Développé ensuite par Hörmander et Duistermaat, il a donné lieu à

la théorie des opérateurs intégraux de Fourier dont nous présentons ici une version avec un petit paramètre h .

2. Fonctions lagrangiennes

L'idée de Maslov-Hörmander est d'utiliser le principe de Huyghens et de représenter les fonctions associées à une variété lagrangienne comme superpositions continues de fonctions oscillantes simples.

DÉFINITION 42. Soit $\Lambda = \Lambda_\varphi$, on note $O^m(X, \Lambda_\varphi)$ l'espace des fonctions de la forme

$$u_h(x) = I(\varphi, a) = e^{i\alpha(h)} \int_{\mathbb{R}^N}^* e^{i\varphi(x, \theta)/h} a_h(x, \theta) |d\theta| ,$$

où $a \in \Sigma^m(X \times \mathbb{R}^N)$ est supposé à support compact en θ et $\alpha(h)$ est un réel dépendant de h . Dans la suite, on incorpore le terme $e^{i\alpha(h)}$ à a_h .

On a le

THÉORÈME 45. Si $\Lambda_\varphi = \Lambda_\psi$, toute fonction de $O^m(X, \Lambda_\varphi)$ est aussi dans $O^m(X, \Lambda_\psi)$.

Ce théorème peut se prouver en utilisant le fait que l'on peut passer de φ à $\psi + c$ par changement de variables fibré et par adjonction de formes quadratiques : le premier cas est trivial, le second résulte de la phase stationnaire et de la convention pour \int^* .

Une démonstration qui n'a pas recours à ce théorème difficile est donnée dans [GS94] et consiste à se réduire au cas où il n'y a pas de caustique. Nous donnons cette preuve :

Preuve. –

Supposons d'abord que (x_0, ξ_0) n'est pas un point caustique de Λ et soit $\varphi(x, \theta)$ un germe de fonction génératrice de Λ près de (x_0, ξ_0) . Alors la projection de C_φ sur X est près de (x_0, θ_0) un difféomorphisme local. Cela équivaut à ce que la différentielle seconde par rapport à θ soit non dégénérée. On peut donc appliquer la phase stationnaire. Ce qui montre que

$$I(\varphi, a) = e^{iS(x)/h} (b_0(x) + hb_1(x) + \dots ,$$

avec $b_0(x) = a_0(x, \theta(x))A(x)$ et A ne s'anule pas. On a ainsi une application $a \rightarrow b$ qui est visiblement surjective modulo $O(h^\infty)$.

Dans le cas général, on peut trouver des coordonnées locales (y, z) près de x_0 telle que la projection de Λ sur $Y \oplus Z^*$ est un difféomorphisme local (i.e. on peut prendre $\varphi(y, z, \zeta) = z\zeta - S(y, \zeta)$). On se ramène ainsi au cas sans caustique à l'aide d'une transformée de Fourier partielle.

□

DÉFINITION 43. Une famille admissible $u = (u_h)$ est un élément de $O^m(X, \Lambda)$ si $\widehat{WF}(u_h) \subset \overline{\Lambda}$ et, microlocalement près de tout $(x_0, \xi_0) \in \Lambda$, il existe φ tel que $\Lambda = \Lambda_\varphi$ et $v_h \in O^m(X, \Lambda_\varphi)$ avec $(x_0, \xi_0) \notin WF(u_h - v_h)$.

$O^\infty(X, \Lambda) = \cap O^m(X, \Lambda)$ est l'ensemble des familles $u = (u_h)$ telles que $\widehat{WF}(u) \subset \overline{\Lambda} \cap S^*X$.

On dit que $(u_h) \in O_o^m(X, \Lambda) \subset O^m(X, \Lambda)$ si u_h est à support dans un compact fixe de X et $\widehat{WF}(u_h) \subset\subset K \subset T^*X$ avec K compact.

On remarque que la définition donnée ne coïncide pas avec celle des ΨDO , car on n'a imposé aucune condition à l'infini. On pourrait le faire si la variété lagrangienne Λ a une structure sympathique à l'infini : par exemple si Λ est *asymptotiquement conique* ou si Λ est immergée comme une feuille d'adhérence compacte d'un *feuilletage lagrangien* C^∞ . On pourrait alors définir des espaces $O^{m,l}(\Lambda)$ généralisant les $\Psi^{m,l}$.

On a maintenant la filtration annoncée :

$$O^\infty(X, \Lambda) \subset \dots \subset O^{m+1}(X, \Lambda) \subset O^m(X, \Lambda) \subset \dots \subset O(X, \Lambda)$$

On peut avoir une description simple du quotient O^m/O^{m+1} grâce au

LEMME 8. Si $a_m(x, \theta)$ s'annule identiquement sur C_φ , $u_h(x) \in O^{m+1}$.

La preuve se fait en écrivant par Taylor que

$$a_m(x, \theta) = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} b_j(x, \theta)$$

et en calculant l'intégrale par intégration par parties.

On voit ainsi que $a_m(x, \theta)$ restreinte à C_φ représente exactement O^m/O^{m+1} .

Un des buts de ce chapitre est d'avoir une interprétation géométrique de cette fonction comme section d'un fibré sur la variété lagrangienne Λ donnant ainsi un symbole principal indépendant du choix de φ .

On peut maintenant s'interroger sur l'allure de ces fonctions oscillantes.

3. La singularité-pli et la fonction de Airy

A quoi ressemblent les éléments de $O^0(X, \Lambda)$?

Hors de la caustique, on a des fonctions oscillantes du type

$$a(x, h)e^{iS(x)/h},$$

où Λ est le graphe de dS et $a(x, h)$ un symbole d'ordre 0 en h .

Le but de tous ces préparatifs est bien entendu de franchir les *caustiques*, en particulier les plus simples d'entre elles : les *singularités-plis*. De même que la fonction exponentielle est universelle hors de la caustique, il existe des fonctions universelles pour les singularités *stables*, par exemple le pli : on tombe dans ce cas sur la fameuse fonction de Airy [Air38], [GS73], [Dui74].

3.1. La fonction de Airy. La fonction de Airy peut être caractérisée ainsi :

PROPOSITION 17. L'équation différentielle

$$(15) \quad y'' - xy = 0$$

admet une unique solution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ qui est d'intégrale totale (semi-convergente) égale à 1.

On pose ensuite la :

DÉFINITION 44. La fonction de Airy, notée $\text{Ai}(x)$, est l'unique solution tempérée de l'équation (15) dont l'intégrale totale (semi-convergente) est égale à 1.

Preuve. –

Si y est une solution tempérée de l'équation (15), sa transformée de Fourier $z = \hat{y}$ satisfait l'équation du 1er ordre

$$z'(\theta) = i\theta^2 z(\theta) .$$

On a donc formellement

$$y(x) = c \int_{\mathbb{R}} e^{i(\frac{\theta^3}{3} + x\theta)} d\theta$$

où l'intégrale est semi-convergente. Si on intègre sur un chemin γ dans \mathbb{C} qui est de la forme $\gamma(t) = t + is(t)$ avec $s = 0$ au voisinage de 0 et $0 < s(t) < (\sqrt{3} - \varepsilon)|t|$ au voisinage de l'infini, l'intégrale devient absolument convergente. On doit prendre $c = 1/2\pi$ pour normaliser la solution. On a donc

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} e^{i(\frac{\theta^3}{3} + x\theta)} d\theta .$$

□

La fonction de Airy

Appliquant la phase stationnaire, on vérifie que $\text{Ai}(x) = O(x^{-\infty})$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ et

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}|x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)(1 + O(|x|^{-3/2}))$$

lorsque $x \rightarrow -\infty$.

3.2. La variété lagrangienne $x = -\xi^2$. La sous-variété lagrangienne $\Lambda = \{x = -\xi^2\} \subset T^*\mathbb{R}$ admet la fonction phase $\varphi(x, \theta) = \frac{\theta^3}{3} + x\theta$. La caustique se réduit à l'origine.

Au voisinage de 0 une fonction de $O^0(\mathbb{R}, \Lambda)$ admet donc la représentation

$$u_h(x) = \int^{\star} e^{i\varphi(x, \theta)/h} a_h(x, \theta) |d\theta| ,$$

où a est un symbole d'ordre 0 à support compact.

Cette intégrale ressemble fort à celle qui définit la fonction de Airy. En fait, on a mieux que cela :

PROPOSITION 18. *La fonction $u_h(x) \in O^0(\mathbb{R}, \Lambda)$ admet un développement asymptotique de la forme*

$$u_h(x) = h^{-1/6} \left(A(x, h) \text{Ai}\left(\frac{x}{h^{2/3}}\right) + h^{1/3} B(x, h) \text{Ai}'\left(\frac{x}{h^{2/3}}\right) \right)$$

où A et B sont des symboles d'ordre 0.

En particulier, en général $u_h(0) \sim ch^{-1/6}$ alors que, pour $x \neq 0$, $u_h(x) = O(1)$.

COROLLAIRE 5. *Si on pose $x = yh^{2/3}$, $h^{1/6}u_h(y)$ converge lorsque h tend vers 0 vers $a.\text{Ai}(y)$.*

C'est un fait général que les fonctions lagrangiennes sont d'un ordre supérieur en h sur la projection de la caustique.

Preuve.—

On montre d'abord le :

LEMME 9. *Toute fonction C^∞ , $a(x, \theta)$ s'écrit sous la forme*

$$a(x, \theta) = b(x) + c(x)\theta + (\theta^2 + x)r(x, \theta) ,$$

où les fonctions b, c, r sont C^∞

Utilisant le lemme, on fait apparaître la fonction de Airy et sa dérivée, le terme $(\theta^2 + x)r(x, \theta)$ est susceptible d'une intégration par partie car $\theta^2 + x = \partial_\theta \varphi$.

□

3.3. Singularités-plis. Ce que nous venons de voir pour la variété lagrangienne $x = -\xi^2$ est en fait beaucoup plus général. Commençons par définir une singularité-pli :

DÉFINITION 45. *Soit $F : X \rightarrow Y$ une application C^∞ entre 2 variétés de mêmes dimensions. Soit $\Sigma \subset X$ une sous-variété de codimension 1. On dira que F admet une singularité-pli le long de Σ si*

- (1) $F|_\Sigma$ est un plongement.
- (2) F est un difféomorphisme local sur $X \setminus \Sigma$.
- (3) Si $y_1 = 0$ est une équation locale de $Z = F(\Sigma)$, la fonction $f = y_1 \circ F$ admet Σ comme variété critique non dégénérée au sens de Bott.

Il résulte de cette définition qu'il existe des coordonnées locales telles que $F(x_1, x') = (x_1^2, x')$.

On dira que la caustique Σ de la variété lagrangienne Λ admet une singularité-pli s'il en est ainsi de la projection canonique $\pi : \Lambda \rightarrow X$. Σ est alors de codimension 1 dans Λ .

On a alors :

PROPOSITION 19. *Si Λ admet une singularité-pli au voisinage de $z_0 = (x_0, \xi_0)$, il existe des coordonnées locales près de x_0 et une fonction phase $\varphi(x, \theta) = S(x) + x_1\theta + \frac{\theta^3}{3}$ telle que $\Lambda = \Lambda_\varphi$ près de z_0 .*

On en déduit que près de x_0 , une fonction u_h de $O^0(X, \Lambda)$ admet le développement asymptotique suivant :

$$u_h(x) = h^{-1/6} e^{iS(x)/h} \left(A(x, h) \text{Ai}\left(\frac{x_1}{h^{2/3}}\right) + h^{1/3} B(x, h) \text{Ai}'\left(\frac{x_1}{h^{2/3}}\right) \right) .$$

La fonction de Airy est donc universelle pour les singularités-plis.

4. Opérateurs intégraux de Fourier

Soit χ un difféomorphisme canonique de T^*Y dans T^*X (en fait, souvent χ sera seulement défini sur un ouvert de T^*Y). On note $n = \dim X = \dim Y$.

On va associer à χ une classe d'opérateurs de $C_o^\infty(Y)$ dans $C^\infty(X)$ qui, lorsque $\chi = Id$, coïncide avec $\Psi^m(X)$.

$\Gamma'_\chi = \{(x, \xi; y, -\eta) | (x, \xi) = \chi(y, \eta)\}$ est une sous-variété lagrangienne de $T^*(X \times Y)$.

DÉFINITION 46. *Un opérateur intégral de Fourier (Hörmander) ou transformation canonique quantifiée (Maslov) d'ordre m est un opérateur linéaire de $C_o^\infty(Y)$ dans $\mathcal{D}'(X)$ dont le noyau de Schwartz est dans $O^m(X \times Y, \Gamma'_\chi)$. On note $\Psi^m(X, Y; \chi)$ l'ensemble de ces opérateurs.*

*L'opérateur A est dit elliptique en $(y_0, \eta_0) \in T^*Y$ si son symbole principal ne s'y annule pas.*

Lorsque $\chi = Id$, on peut prendre $\varphi = (x - y|\xi)$ et on a $\Psi^m(X, X; Id) = \Psi^{m, \infty}(X)$.

On a de plus le théorème de composition suivant :

THÉORÈME 46. *Si $A_h \in \Psi^m(X, Y; \chi)$, $B_h \in \Psi^l(Y, Z; \chi_1)$, alors*

$$A_h \circ B_h \in \Psi^{m+l}(X, Z; \chi \circ \chi_1) .$$

Plus précisément $\varphi(x, y, \theta) + \varphi_1(y, z, \theta_1)$ est une fonction génératrice pour $\chi_1 \circ \chi$ et le symbole principal s'obtient par produit.

La preuve est immédiate, une fois vérifié que

$$\varphi(x, y, \theta) + \varphi_1(y, z, \theta_1)$$

vue comme une fonction des variables oscillantes (θ, y, θ_1) est une fonction génératrice non dégénérée de $\chi_1 \circ \chi$. Pour cela, il faut vérifier que $\partial_{y_j} \varphi + \partial_{y_j} \varphi_1 = 0$ ont des différentielles indépendantes sur $C_{\varphi + \varphi_1}$. Par difféomorphisme, on se ramène à montrer que les différentielles $d(\eta_j - \eta'_j)$ sont indépendantes sur l'ensemble des

$$((x, \xi; y, \eta); (y, \eta; z, \zeta)) \in \Gamma_\chi \times \Gamma_{\chi'} ;$$

c'est évident car on peut prendre $(y, \eta; y', \eta')$ comme coordonnées locales sur le produit des graphes.

5. Théorème d'Egorov et applications

5.1. Énoncé du théorème d'Egorov. Une des applications intéressantes des OIF est la méthode des formes normales qui peut s'étendre du cas classique au cas semi-classique.

Un OIF $U \in \Psi^0(X, Y; \chi)$ elliptique en (y_0, η_0) est microlocalement inversible près de ce point ; son inverse étant associé à χ^{-1} (la preuve est la même que pour les ΨDO).

On a le théorème d'Egorov :

THÉORÈME 47. *Si A est un ΨDO sur X de symbole principal a et U un OIF elliptique d'ordre 0 associé à χ , $B = U^{-1} \circ A \circ U$ est près de $z_0 = (y_0, \eta_0)$ un ΨDO sur Y de symbole principal $a \circ \chi$.*

Preuve. –

On sait déjà à cause du théorème de composition des OIF que B est un ΨDO . L'application qui au symbole principal a de A associe celui b de B est clairement un homomorphisme d'algèbre et le symbole b en z_0 ne dépend que de $a(z_0)$ comme il est clair par la phase stationnaire. Si $A = Id$, $B = Id$ modulo régularisant. On en déduit que : $b(z_0) = \lambda a(\chi(z_0))$ et $\lambda = 1$.

□

5.2. Forme normale d'un ΨDO dans le cas générique.

THÉORÈME 48. *Si A est un ΨDO dont le symbole principal a est à valeurs réelles et s'annule en (x_0, ξ_0) et da ne s'annule pas en ce point. Alors A est microlocalement équivalent à $\frac{h}{i}\partial_{x_1}$.*

Preuve. –

Il existe une transformation canonique $\chi : T^*\mathbb{R}^n \rightarrow T^*X$ telle que $a \circ \chi = \xi_1$. On a donc :

$$U_0^{-1}AU_0 = A_0 + A_1$$

où $A_0 = \frac{h}{i}\partial_{x_1}$ et A_1 est un ΨDO d'ordre 1. On montre alors facilement l'existence d'un ΨDO C d'ordre 0 elliptique au point $\chi^{-1}(x_0, \xi_0)$ tel que

$$C \circ (A_0 + A_1) \circ C^{-1} = Id + \Psi^\infty .$$

En effet cela revient à résoudre des équations différentielles

$$\partial_{x_1} c = d$$

pour les symboles successifs.

De plus, si A est autoadjoint, on peut supposer U microlocalement unitaire.

En effet, on remarque que l'on peut choisir U_0 unitaire (prendre une racine carrée du ΨDO $U^* \circ U$.) Puis, si maintenant A et donc $A_0 + A_1$ sont autoadjoints, on peut aussi choisir C unitaire : c'est une condition d'être imaginaire pur sur les symboles successifs.

□

On peut généraliser à k opérateurs qui commutent près d'un zéro commun de leurs symboles principaux si les différentielles sont indépendantes.

5.3. Solutions microlocales de l'équation de Schrödinger stationnaire

1d. Soit $\hat{H} = -h^2\partial_x^2 + V(x) - E$ l'opérateur de Schrödinger en dimension 1. Soit x_0 tel que $V(x_0) < E$ et $S(x)$ une primitive au voisinage de x_0 de $\sqrt{E - V(x)}$. Alors il existe à homothétie près un unique symbole

$$a(x, h) = a_0(x) + ha_1(x) + \cdots + h^k a_k(x) + \cdots$$

tel que l'on ait :

$$\hat{H}(a(x, h)e^{iS(x)/h}) = O(h^\infty) .$$

Preuve. –

On calcule

$$\hat{H}(a(x)e^{iS(x)/h}) = ((S'^2 + V - E)a - ih(2S'a' + S''a) - h^2a'')e^{iS/h} .$$

Cela force $a_0 = \lambda(E - V(x))^{-1/4}$. Puis les autres termes sont déterminés par des équations :

$$a_{k-1}'' + i(2S'a_k' + S''a_k) = 0$$

dont la solution est unique à un multiple de a_0 près.

□

On a donc construit ainsi une solution microlocale dite solution BKW de \hat{H} près de $(x_0, \xi_0 = S'(x_0))$. Cette solution microlocale est unique à homothétie près. En effet, on peut se ramener à l'opérateur $\frac{h}{i}\partial_x$ microlocalement, pour lequel la seule solution est la fonction constante.

On peut étendre ce qui précède en présence de caustique et pour un ΨDO quelconque :

THÉORÈME 49. *Si \hat{H} est un ΨDO d'ordre 0 sur \mathbb{R} , de symbole principal H_0 à valeurs réelles et $H_0(z_0) = 0$ avec $dH_0(z_0) \neq 0$, il existe au voisinage de z_0 une unique (à homothétie près) solution de $\hat{H}u = O(h^\infty)$ appelée solution BKW.*

La démonstration est claire à partir du théorème 48.

On peut étendre ceci au cas de systèmes en involution lagrangiens ou holonomes. Un tel système est une famille de n opérateurs qui commutent dans X de dimension n de façon que les symboles principaux soient microlocalement de différentielles indépendantes et à valeurs réelles.

La construction de solution globales fait apparaître les conditions de quantification sur E qui vont déterminer le spectre L^2 .

5.4. Propagation des singularités.

THÉORÈME 50. *Soit A_h un ΨDO d'ordre 0 et de symbole principal a supposé réel. Alors $WF(u_h)$ est une réunion de courbes intégrales du gradient symplectique \mathcal{X}_a de a contenue dans $\{a = 0\}$.*

Il n'y a rien à prouver pour les points où $da = 0$; en effet, en ces points \mathcal{X}_a est nulle.

Pour les autres points, on peut se ramener au cas où A_h est la multiplication par x_1 . On a donc :

$$x_1 u_h = v_h$$

avec $(x_0, \xi_0) \notin WF(v_h)$. Soit $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que φ vaille 1 au voisinage de x_0 et φv ait une transformée de Fourier $O(h^\infty)$ dans un voisinage U de (x_0, ξ_0) . On a alors

$$x_1(\varphi u_h) = \varphi v_h$$

et prenant les transformées de Fourier, il vient :

$$\frac{h}{i}\partial_{\xi_1}\mathcal{F}_h(\varphi u_h)(\xi_1, \xi') = \mathcal{F}_h(\varphi v_h)(\xi_1, \xi') ,$$

qui est $O(h^\infty)$ dans U . On voit ainsi que si la transformée de Fourier de φu_h est $O(h^\infty)$ en un point de U elle l'est le long de la courbe $\xi' = C^{te}$ passant par ce point tant qu'elle est contenue dans U .

5.5. Lemme de Morse semi-classique. On considère maintenant un opérateur pseudo-différentiel \hat{H} sur \mathbb{R} dont le symbole principal H_0 à valeurs réelles admet en $z_0 = (x_0, \xi_0)$ un point critique non dégénéré de valeur critique nulle. On souhaite étudier les solutions microlocales de $\hat{H}u = 0$. On pose $Z = H_0^{-1}(0)$. On peut appliquer au symbole principal H_0 le lemme de Morse isochore (cf ??) qui donne l'existence d'un germe de transformation canonique $\chi : (T^*\mathbb{R}, O) \rightarrow (T^*\mathbb{R}, z_0)$ tel que $H_0 \circ \chi = f(y\eta)$ que l'on peut ré-écrire

$$(16) \quad H_0 \circ \chi = W(y, \eta)y\eta .$$

Une extension de ce lemme au cadre semi-classique est donnée dans le :

THÉORÈME 51. *Il existe un OIF \hat{U} associé à χ , un ΨDO \hat{W} , elliptique au point O , et une unique série formelle*

$$(17) \quad \varepsilon(h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j h^j$$

tels que :

$$(18) \quad \hat{H}\hat{U} = \hat{U}\hat{W}(y\eta - h\varepsilon(h)) ,$$

microlocalement près de O .

$$(19) \quad y\eta = \frac{h}{i} \left(y \frac{d}{dy} + \frac{1}{2} \right)$$

est le quantifié de Weyl de $y\eta$. On a :

$$(20) \quad \varepsilon_0 = \pm \frac{H_1(s)}{|\det(H_0''(s))|^{1/2}} .$$

Le signe \pm est l'opposé de celui de $W(0)$.

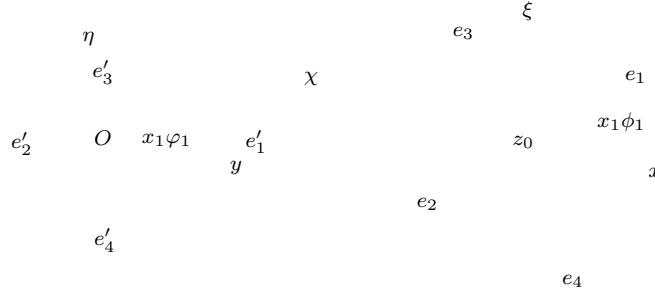


FIGURE 1. Le choix des e_i et de χ .

Nous donnons une preuve simple n'utilisant pas le lemme de Morse : *Preuve.*—

- Prouvons d'abord l'existence de χ . On peut supposer $z_0 = O$ et que les 2 branches de Z près de z_0 sont tangentes respectivement aux axes $\{\eta = 0\}$ et $\{y = 0\}$ par une transformation canonique affine. Il suffit ensuite d'utiliser des transformations canoniques $\chi_1(y, \eta) = (y, \eta - a(y))$ et $\chi_2(y, \eta) = (y - b(\eta), \eta)$ avec des fonctions a et b appropriées de façon que les branches de Z près de O soient les axes. H_0 se transforme ainsi en un hamiltonien $K_0(y, \eta)$ qui s'annule sur les axes et peut être divisé par $y\eta$ en gardant la lissité.
- Si \hat{U}_0 est un OIF associé à χ nous avons par le théorème d'Egorov

$$\hat{U}_0^{-1} \hat{H} \hat{U}_0 = \hat{W}_0(y\eta + h\hat{P}_1)$$

où \hat{W}_0 et \hat{P}_1 sont des ΨDO d'ordre 0. La première étape est de trouver des ΨDO $\hat{\Pi}$ et \hat{R}_1 d'ordre 0, tels que

$$\hat{\Pi}^{-1}(\hat{y}\eta + h\hat{P}_1)\hat{\Pi} = (\text{Id} + h\hat{R}_1)(\hat{y}\eta + \varepsilon_0 h + h^2\hat{P}_2)$$

où \hat{P}_2 est d'ordre 0. Notons avec des minuscules les symboles principaux on obtient

$$\frac{1}{i\pi}\{y\eta, \pi\} = \varepsilon_0 + r_1 y\eta - p_1$$

Cette équation a une solution π si et seulement si le développement de Taylor du membre de droite ne contient pas de puissances de $y\eta$ (voir [CV79] p. 286 ou [GS94] p. 175) ce qui peut être réalisé grâce à un choix approprié de ε_0 et r_1 . C'est la première étape de la preuve par récurrence, les autres sont semblables.

- L'unicité de la série formelle $\varepsilon(h)$ se prouve de façon géométrique comme dans [CLP99] : nous associons à la situation microlocale un invariant naturel qui utilise un *birapport*.
- Il reste à prouver la formule (20). Comme H_0 s'annule et est critique au point z_0 , le symbole sous-principal $H_1(s)$ de \hat{H} en z_0 est le même que celui de $\hat{W}(\hat{y}\eta - h\varepsilon_0)$ en O . Ce dernier vaut $-W(O)\varepsilon_0$. Pour évaluer $W(O)$, il suffit de calculer le déterminant du Hessien de H_0 en z_0 qui est préservé par χ . Nous trouvons ainsi :

$$(21) \quad |W(O)| = |\det(H_0''(s))|^{\frac{1}{2}}.$$

Dans les applications, il peut être préférable de ne pas supposer $W(O) > 0$. Nous préférons supposer que l'image par χ du premier quadrant pointe vers le haut (voir la figure 1), alors $W(O)$ est > 0 ou < 0 suivant le signe de H_0 dans ce domaine. Le signe de ε_0 doit être changé suivant la même règle.

□

DÉFINITION 47. La série formelle $\varepsilon(h) = \varepsilon_0 + O(h)$ est l'invariant semi-classique du point col z_0 .

Grâce à la forme normale précédente

$$(22) \quad (\hat{y}\eta - h\varepsilon(h))u = 0$$

il devient facile de décrire les solutions microlocales de $\hat{H}u = 0$ près du sommet z_0 de Z . Nous obtenons le :

THÉORÈME 52. Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème 51, le module des solutions microlocales près de z_0 est un module libre de rang 2. Plus précisément, avec les choix de la figure 1, et notant \mathcal{M}_j , $j = 1, 2, 3, 4$ le module libre de rang 1 des solutions microlocales sur l'arête e_j il existe une base ϕ_j de \mathcal{M}_j telle que $(x_j\phi_j)_{j=1,\dots,4}$ s'étend en une solution microlocale près de z_0 si et seulement si

$$(23) \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = T(\varepsilon) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

où $T(\varepsilon)$ est donnée par

$$(24) \quad T(\varepsilon) = \mathcal{E} \begin{pmatrix} 1 & ie^{-\varepsilon\pi} \\ ie^{-\varepsilon\pi} & 1 \end{pmatrix},$$

avec :

$$(25) \quad \mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon\right) e^{\varepsilon(\frac{\pi}{2} + i \ln h)}$$

$$(26) \quad = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\pi\varepsilon}}} e^{i \arg \Gamma(1/2 + i\varepsilon) + i\varepsilon \ln(h)}.$$

Preuve. –

Grâce à l'équation (18), il suffit de prouver le résultat pour $\hat{H}_0 = \hat{y}\eta - h\varepsilon(h)$ et de trouver des solutions microlocales φ_j de \hat{H}_0 qui satisfassent les assertions du théorème. les φ_j 's sont de petites variations de celles de [CP94b], les formules sont les suivantes :

$$(27) \quad \varphi_1(y) = Y(y)|y|^{-1/2} e^{i\varepsilon \ln |y|}$$

$$(28) \quad \varphi_2(y) = Y(-y)|y|^{-1/2} e^{i\varepsilon \ln |y|}$$

$$(29) \quad \varphi_3(y) = \int^\star Y(\eta) |\eta|^{-1/2} e^{i\frac{y\eta}{h}} e^{-i\varepsilon \ln |\eta|} d\eta$$

$$(30) \quad \varphi_4(y) = \int^\star Y(-\eta) |\eta|^{-1/2} e^{i\frac{y\eta}{h}} e^{-i\varepsilon \ln |\eta|} d\eta$$

où

$$\int^\star = (2\pi h)^{-1/2} e^{-i\pi/4} \int$$

et Y est la fonction d'Heaviside. les φ_j sont des générateurs des solutions microlocales de l'équation (22) sur les arêtes e'_j (voir la figure 1).

On pose alors $\phi_j = \hat{U}\varphi_j$.

□

Le résultat précédent s'applique à l'équation de Schrödinger 1d près d'un maximum local non dégénéré du potentiel et aussi à des systèmes couplés de ΨDO en dimension 1 (voir [CP99] et [CLP99]).

6. Calcul symbolique des fonctions lagrangiennes

6.1. Demi-densités. Une demi-densité dans un ouvert de \mathbb{R}^n s'écrit sous la forme

$$a(x) \sqrt{|dx|},$$

où a est une fonction à valeurs complexes. Son carré est une mesure positive

$$|a(x)|^2 |dx|,$$

où $|dx|$ désigne la mesure de Lebesgue.

Si on fait un changement de coordonnées, $x = f(y)$, on peut considérer

$$f^\star(a(x) \sqrt{|dx|}) = a(f(y)) |J_f(y)|^{\frac{1}{2}} \sqrt{|dy|},$$

où J_f est le jacobien de f qui est compatible avec le changement de variables sur les mesures.

Dans le cas d'une variété riemannienne, on fera systématiquement l'identification entre demi-densités et fonctions donnée par

$$f(x) \rightarrow f(x) \sqrt{v_g},$$

où v_g est la mesure canonique sur la variété riemannienne.

Les demi-densités à support compact forment de façon intrinsèque un espace préhilbertien canonique sur Z qui ne dépend pas de la donnée d'une mesure de Radon. Les densités généralisées (distributions de Schwartz) d'ordre α sont le dual des densités C_o^∞ d'ordre $1-\alpha$. En particulier, dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $C_o^\infty(X, \Omega^{\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{D}'(X, \Omega^{\frac{1}{2}})$. C'est une découverte importante due à Duistermaat et Hörmander ([DH72]) que le calcul symbolique des fonctions lagrangiennes s'exprime de façon très naturelle et élégante dans le formalisme des demi-densités.

Si $K_h(x, y)$ est une demi-densité sur $X \times Y$ de la forme (en coordonnées locales) $K(x, y) = A(x, y)|dxdy|^{\frac{1}{2}}$, on peut lui associer un opérateur \hat{K} par

$$\hat{K}(f(y)|dy|^{\frac{1}{2}}) = \left(\int_Y A(x, y)f(y)|dy| \right) |dx|^{\frac{1}{2}} .$$

Pour cela bien sûr, il faut faire quelques hypothèses, par exemple que $A(x, y) \in C_o^\infty(X \times Y)$.

6.2. Le symbole principal d'une fonction lagrangienne.

PROPOSITION 20. Soit $u = (u_h) \in O^0(X, \Lambda)$ une famille de fonctions lagrangiennes et $c \in C_o^\infty(T^*X)$, on a :

$$\langle Op(c)u_h | u_h \rangle = \int_\Lambda c d\mu_u + O(h)$$

où Op désigne n'importe quelle quantification raisonnable (Weyl, droite, Wick, Antiwick) et $d\mu_u$ est une mesure de Radon positive à densité C^∞ sur Λ .

On remarque que $d\mu_u$ est la limite faible des mesures de Husimi de u_h . Le caractère lisse de $d\mu_u$ provient de l'évaluation de $\langle Op(c)u_h | u_h \rangle$ par la méthode de la phase stationnaire avec variété critique non dégénérée au sens de Bott.

DÉFINITION 48. Soit $\Lambda = \Lambda_\varphi$ et $u = (u_h) \in O^0(X, \Lambda)$ donnée par :

$$u_h(x) = \int^\star e^{i\varphi(x, \theta)/h} a(x, \theta) |d\theta| ,$$

on définit le symbole principal $\sigma_\varphi(u)$ comme la demi-densité $\omega = b(\lambda)|d\lambda|^{\frac{1}{2}}$ sur Λ définie par :

$$|\omega|^2 = d\mu_u$$

et

$$\text{Arg}b = \text{Arg}a \circ j_\varphi^{-1} .$$

Il est facile de vérifier que $b \in C^\infty$: on le vérifie pour $a = 1$ et on a une formule relative :

$$\frac{\sigma_\varphi(u_1)}{\sigma_\varphi(u_2)} = \frac{a_1}{a_2} \circ j_\varphi^{-1} .$$

PROPOSITION 21. • Si on est en dehors du lieu singulier et que

$$u(x) = a(x)e^{\frac{i}{h}S(x)}\sqrt{|dx|} + O(h) ,$$

$\sigma_S(u)$ est l'image réciproque par la projection sur X de la demi-densité :

$$a(x)\sqrt{|dx|} .$$

- Dans le cas où $\varphi(x, \xi) = x\xi - F(\xi)$ et où

$$u(x, h) = \int^{\star} e^{\frac{i}{h}(x\xi - F(\xi))} a(\xi, h) |d\xi| \sqrt{|dx|} ,$$

$\sigma_{\varphi}(u)$ est l'image réciproque par la projection $(x, \xi) \rightarrow \xi$ définie sur Λ de $a_0(\xi) \sqrt{|d\xi|}$ ($\sqrt{d\xi}$ vient de $\sqrt{|d\xi dx|}/\sqrt{|dx|}$).

Il est agréable d'avoir une construction purement algébrique du symbole à partir de la représentation

$$u_h(x) = \int_E^{\star} e^{i\varphi(x, \theta)/h} a(x, \theta) |d\theta| |dx|^{\frac{1}{2}} .$$

Soit $\mathcal{X} = T_{x_0}X$, $\mathcal{E} = T_{\theta_0}E$ et $A : \mathcal{X} \oplus \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ la différentielle de $(x, \theta) \rightarrow \partial_{\theta}\varphi$. A est surjective et le noyau de A est $\mathcal{C} = T_{(x_0, \theta_0)}C_{\varphi}$. On a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{X} \oplus \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow 0$$

d'où l'on tire un isomorphisme J

$$J : \Omega^{\frac{1}{2}}(\mathcal{C}) \rightarrow \Omega^{\frac{1}{2}}(\mathcal{X}) \otimes \Omega^1(\mathcal{E}) .$$

PROPOSITION 22.

$$J^{-1}(a(x, \theta) |dx|^{\frac{1}{2}} |d\theta|) = \sigma_{\varphi}(u_h) .$$

On montre facilement la proposition si $\varphi = S(x)$, puis lorsque $\varphi = x\xi - T(\xi)$. Le cas général s'en suit par adjonction de formes quadratiques (théorème de Hörmander 13).

Que se passe-t'il si on change de phase, i.e. si localement $\Lambda_{\varphi} = \Lambda_{\psi}$? Posons $\tilde{\varphi}(\lambda) = \varphi(j_{\varphi}^{-1}(\lambda))$ et soit $ind_{\varphi}(\lambda)$ l'indice de Morse de la dérivée seconde en θ de φ au point $j_{\varphi}^{-1}(\lambda)$, et de même pour ψ .

PROPOSITION 23. On a :

$$(31) \quad \sigma_{\psi}(u) = \sigma_{\varphi}(u) e^{i(\tilde{\varphi}(\lambda) - \tilde{\psi}(\lambda))/h} e^{-i\frac{\pi}{2}(ind_{\varphi}(\lambda) - ind_{\psi}(\lambda))} .$$

On introduit alors le cocycle

$$(32) \quad \gamma_{\varphi, \psi} = \frac{\tilde{\varphi}(\lambda) - \tilde{\psi}(\lambda)}{h} - \frac{\pi}{2}(ind_{\varphi}(\lambda) - ind_{\psi}(\lambda)) : \Lambda_{\varphi} \cap \Lambda_{\psi} \rightarrow \mathbb{R} .$$

D'après le théorème 13, ce cocycle est localement constant, ce qui permet de définir le fibré des phases L_h sur Λ comme le fibré en droites plat sur Λ trivial au-dessus de chaque Λ_{φ} et dont les formules de transition sont données par l'équation (31).

Le symbole principal de (u_h) peut alors être défini indépendamment de φ :

DÉFINITION 49. Si $u = (u_h) \in O^0(X, \Lambda)$, le symbole principal de u est la section C^{∞} du fibré $\Omega^{\frac{1}{2}} \otimes L_h$ définie dans chaque trivialisations au-dessus de Λ_{φ} par $\sigma_{\varphi}(u)$.

6.3. Les conditions de Bohr-Sommerfeld. Si Λ est donné, il est intéressant de déterminer explicitement L_h à isomorphisme près et en particulier de savoir s'il est trivial comme fibré plat. Si γ est un lacet de Λ , il faut calculer l'holonomie de L_h le long de ce lacet.

On a :

PROPOSITION 24. *L'holonomie $\text{hol}(\gamma)$ de L_h sur un lacet γ est donnée par :*

$$\text{hol}(\gamma) = e^{\frac{i}{h} \int_{\gamma} \xi dx - i\mu(\gamma) \frac{\pi}{2}} ,$$

où $\mu(\gamma)$ est l'indice de Maslov.

DÉFINITION 50.

- On dit que les conditions de Bohr-Sommerfeld sont satisfaites pour le couple (Λ, h) si L_h est trivial.
- Si les conditions de Bohr-Sommerfeld sont satisfaites, on peut modifier les φ par des scalaires (dépendant de h) de façon que le cocycle prenne ses valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$: on dit qu'on a alors un système cohérent de fonctions génératrices pour Λ . Le calcul du symbole principal se réduit alors au calcul des demi-densités (car L_h est trivialisé) grâce à la définition 48.

Exemple 1 : les variétés $\xi = c^{te}$ dans le cotangent d'un tore \mathbb{R}^n/Γ , on obtient la condition $(1/2\pi h)\xi \in \Gamma^*$.

Exemple 2 : les courbes

$$H(\xi, x) = \frac{\xi^2}{2} + V(x) = E ,$$

où V est une fonction d'une variable. On tombe sur la condition :

$$\frac{1}{2\pi h} \int \xi dx = r + \frac{1}{2}, \quad r \in \mathbb{Z} ,$$

où l'intégrale porte sur les cycles de $H = E$.

Exemple 3 : le cas complètement intégrable. Dans ce cas, il existe une transformation canonique (coordonnées actions-angles)

$$\chi : \Omega \subset T^*\left(\frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n}\right) \rightarrow \Omega' \subset T^*(X) ,$$

transformant donc le feuilletage lagrangien $\xi = cte$ de Ω en un feuilletage lagrangien de Ω' . Soit γ_i les cycles images par χ des cycles $\gamma_{i,o}(t) = (0, \dots, t, 0, \dots, 0; \xi)$ ($0 \leq t \leq 1$) et $\mu = (\mu_i)$ leur indice de Maslov. La condition B-S sélectionne les variétés $\Lambda_{\xi} = \chi(\xi = \xi_0)$ telles que :

$$\left(\frac{1}{2\pi h}\right)\xi - \frac{1}{4}\mu \in \mathbb{Z}^n .$$

6.4. Le cas des OIF. Utilisant ce qui précède, si on suppose que A_h est un OIF d'ordre 0 associé à une transformation canonique χ de T^*X dans T^*X , son symbole s'identifie à une demi-densité sur le graphe de χ et donc à une demi-densité sur T^*X que l'on peut comparer à la demi-densité de Liouville. On obtient ainsi que le symbole principal de A est une section du fibré plat L_h . Cela a donc un sens de parler d'un OIF de symbole constant si les conditions de Bohr-Sommerfeld sont satisfaites.

On a le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 53. Soient $A_j \in O^0(X \times X, \chi_j; \Omega^{\frac{1}{2}})$, $j = 1, 2$ de noyaux $K_j(x, y)|dx dy|^{\frac{1}{2}}$ et de symboles σ_{φ_j} . Alors si $B = A_2 \circ A_1$, $B \in O^0(X \times X, \chi_2 \circ \chi_1; \Omega^{\frac{1}{2}})$ et le symbole de B est le produit $\omega_2 \circ \chi_1.\omega_1$ en prenant comme phase $\varphi_2(x, z, \theta) + \varphi_1(z, y, \theta')$.

7. Calcul symbolique : produits scalaires, etc...

7.1. Produit \star de 2 demi-densités. Soit Λ_j ($j = 1, 2$) 2 sous-variétés lagrangiennes de (Z, ω) . On suppose que Λ_1 et Λ_2 se coupent de façon transversale au sens de Bott le long d'une variété W .

Soit ω_j , $j = 1, 2$ des demi-densités sur Λ_j . On va définir une densité $\omega_1 \star \omega_2$ sur W . On part de la suite exacte:

$$0 \rightarrow K \rightarrow F_1 \oplus F_2 \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow 0,$$

avec $K = T_{w_0}W$, $F_i = T_{w_0}\Lambda_i$, $E = T_{w_0}Z$ et les flèches $k \rightarrow (k, k)$, $(f_1, f_2) \rightarrow f_1 - f_2$, $C = E/K^o$ est le conoyau de cette dernière application et $E \rightarrow C$ la surjection canonique.

On a le :

LEMME 10. ω mets K et C en dualité.

Preuve. –

En effet, il est clair que $\text{Im}(F_1 \oplus F_2 \rightarrow E) = F_1 + F_2$ est l' ω -orthogonal de $K = F_1 \cap F_2$.

□

On écrit alors que le produit tensoriel alterné des $\frac{1}{2}$ -densités des espaces de la suite est canoniquement \mathbb{R} . Cela donne un isomorphisme canonique de $\Omega^{\frac{1}{2}}(F_1) \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}(F_2)$ dans $\Omega^{\frac{1}{2}}(K) \otimes \Omega^{-\frac{1}{2}}(C)$ en utilisant que E est muni d'une $\frac{1}{2}$ -densité canonique induite par la structure symplectique. Comme $\Omega^{-\frac{1}{2}}(C)$ est canoniquement isomorphe à $\Omega^{\frac{1}{2}}(K)$, cela donne la construction.

Une construction voisine et équivalente est la suivante : soit $F'_i = F_i/K$. On a :

$$\Omega^{\frac{1}{2}}(F_j) = \Omega^{\frac{1}{2}}(K) \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}(F'_j)$$

et on écrit ainsi

$$\omega_j = |dw|^{\frac{1}{2}} \otimes \omega'_j$$

On identifie alors les F'_j à des sous-variétés lagrangiennes transversales de la variété réduite K^o/K . On peut ainsi définir le scalaire

$$\omega'_1 \star \omega'_2 = \frac{\omega'_1 \otimes \omega'_2}{L}$$

où L est la demi-densité de Liouville sur K^o/K . On a alors :

$$\omega_1 \star \omega_2 = \omega'_1 \star \omega'_1 |dw|.$$

PROPOSITION 25. *Sous les hypothèses précédentes, il existe une densité intrinsèque $\omega = \omega_1 \star \omega_2$ sur W .*

EXEMPLE 7.1. Soit $Z = T^*X$, $\Lambda_j = \{(x, S'_j(x))\}$ et $W = (x_0, \xi_0) = z_0$ avec $S'_1(x_0) = S'_2(x_0) = \xi_0$ et $S''_1(x_0) - S''_2(x_0)$ est non dégénérée. Soit $|dx|$ une densité sur X , elle donne lieu par transport sur les Λ_j de $|dx|^{\frac{1}{2}}$ à des demi-densités ω_j . On a :

$$\omega_1 \star \omega_2 = \frac{\delta(z_0)}{|\det(S''_1(x_0) - S''_2(x_0))|^{\frac{1}{2}}}.$$

Ceci est analogue au volume riemannien : si Q est une forme quadratique non dégénérée sur E munie d'une mesure de Lebesgue $|dx|$, $\det(Q)^{\frac{1}{2}}|dx|$ est la mesure riemannienne et le quotient est le nombre cherché.

7.2. Points fixes d'une transformation canonique. Supposons que $\chi : Z \rightarrow Z$ est un difféomorphisme canonique ayant W comme variété de points fixes ND au sens de Bott au sens que le graphe C_χ de χ et la diagonale de Z se coupent transversalement au sens de Bott. On munit C_χ et $\Delta = C_{Id}$ des demi-densités ω_χ et ω_{Id} rappelées de la demi-densité de Liouville sur un des facteurs Z . Ainsi W se trouve muni d'une densité canonique

$$d\mu = \omega_\chi \star \omega_{Id} .$$

PROPOSITION 26. *Si on suppose que l'on a un point fixe isolé z_0 tel que $\text{Id} - \chi'(z_0)$ est inversible, on a :*

$$d\mu = |\det(\text{Id} - \chi'(z_0))|^{-1/2} \delta(z_0) .$$

Preuve. –

Soit $E = T_{z_0}Z$. Les graphes de Id (Δ) et de $\chi'(z_0)$ (Γ) sont des lagrangiens transversaux de $(E \oplus E, \omega_2 - \omega_1)$. L'application $F : E \oplus E \rightarrow E \oplus E$ donné par

$$F(z_1, z_2) = (z_1, z_1) + (z_2, \chi(z_2)) = (z, z')$$

est un isomorphisme linéaire de déterminant $a = \det(\text{Id} - \chi'(z_0))$.

On a donc

$$|dzdz'|^{1/2} = a^{1/2} |dz_1 dz_2|^{1/2}$$

où les $|dz_\star|$ désignent les mesures de Liouville. Cela donne le résultat voulu. □

PROPOSITION 27. *Soit $Z = T^*G$ avec G espace vectoriel et $(x, y) \in Z$ des coordonnées canoniques. Supposons que $\chi(x, y) = (x, y + \Omega(x))$ avec $\Omega = \sum \Omega_i dx_i$ fermée et soit $\Omega(x_0) = 0$ un zéro transversal de Ω . Alors la mesure sur $W = T_{x_0}^*G$ est*

$$\frac{|dx|}{|\det(\Omega'(x_0))|^{1/2}} .$$

7.3. Produit scalaire.

THÉORÈME 54. *Si $u_j \in O_o^0(X, \Lambda_j; \Omega^{1/2})$, $j = 1, 2$ sont 2 $\frac{1}{2}$ -densités lagrangiennes d'ordre 0, associées à des variétés lagrangiennes Λ_j qui se coupent transversalement au sens de Bott suivant une variété W connexe, le produit scalaire $I(h) = \int_X^* u_1 \bar{u}_2$ admet un développement asymptotique complet en puissances de h . Si $\omega_j = \sigma_{\varphi_j}(u_j) \in \Omega^{1/2}(\Lambda_j)$ sont leurs symboles principaux, on a :*

$$I(h) \sim e^{i\Phi(W)/h} e^{-i\mu\pi/2} \int_W^* \omega_1 \star \bar{\omega}_2 ,$$

où $\Phi(W)$ est la valeur (constante) de $\varphi_1 \circ j_{\varphi_1}^{-1} - \varphi_2 \circ j_{\varphi_2}^{-1}$ sur W et μ est un entier défini comme l'indice de la dérivée seconde de $\varphi_1 - \varphi_2$ par rapport à toutes les variables (x, θ_1, θ_2) .

Le théorème se prouve facilement en dehors des caustiques et, par Fourier, en dehors des ξ -caustiques (voir exemple 7.1). Si $\xi \neq 0$, un changement de variables en x élimine les ξ -caustiques et donne ainsi le cas général.

7.4. La phase stationnaire pour les variétés critiques non dégénérées.

On veut calculer le comportement asymptotique d'une intégrale oscillante

$$I(h) = \int^\star e^{i\Phi(x)/h} a(x) |dx| ,$$

lorsque h tend vers 0 où Φ admet dans le support de a une variété W de points critiques non dégénérés transversalement ; cela veut dire que, pour tout point $w \in W$, la hessienne $\Phi''(w)$ admet $T_w W$ comme noyau. On peut reformuler cette hypothèse de non dégénérescence, appelée *variété critique non dégénérée au sens de Bott*, comme une hypothèse d'*intersection transverse au sens de Bott* de X vue comme la section nulle de son cotangent et de Λ_Φ , le graphe de $d\Phi$.

Le comportement asymptotique de $I(h)$ se décrit en terme d'une densité $a(w)|dw|_\Phi$ sur W construite à partir de $a(x)|dx|$ et de Φ .

On a alors le

THÉORÈME 55. *Sous les hypothèses précédentes,*

$$I(h) = e^{i\Phi(W)/h} e^{-i\nu\pi/2} \left(\int^\star a(w)|dw|_\Phi + a_1 h + a_2 h^2 + \dots \right) + O(h^\infty) ,$$

où $a(w)|dw| = |dx|^{\frac{1}{2}} \star \pi^\star(a(x)|dx|^{\frac{1}{2}})$ est associée à l'intersection de la section nulle et de la section Λ_Φ de $T^\star X$.

Remarque : on notera ici l'agrément procuré par les \int^\star !!

Preuve. –

On applique le lemme de Morse avec paramètres pour se ramener au cas de coordonnées (x', x'') telles que $\Phi(x', x'') = \Phi(W) + Q(x'')$, où Q est une forme quadratique non dégénérée. Le résultat découle alors de la phase stationnaire ordinaire par Fubini en intégrant d'abord par rapport à x' .

□

7.5. Exemple. Soit $u_1 \in O^{m_1}(\Lambda_1)$ et $Y \subset X$ une sous-variété compacte de codimension k . On s'intéresse au comportement asymptotique de $I_h = \int_Y u_1$. Pour définir cette intégrale plus canoniquement, on doit voir le courant d'intégration sur Y comme une fonction oscillante $\delta_Y \in O^{-\frac{k}{2}}(N^\star Y)$: en coordonnées locales, si $x'_1 = \dots = x'_k = 0$ sont les équations de Y et x''_i les coordonnées locales sur Y :

$$\delta_Y = (2\pi h)^{-k} \int_{\mathbb{R}^k} e^{\frac{i}{h} \sum x'_i \zeta_i} a(x'') d\zeta \sqrt{|dx|} .$$

On est donc amené à supposer que $N^\star Y$ et Λ_1 se coupent transversalement au sens de Bott.

8. Equation de transport

Il s'agit maintenant de décrire l'action d'un opérateur pseudo-différentiel sur une demi-densité oscillante de $O^0(X, \Lambda)$ de façon à pouvoir résoudre les EDP dans la classe des fonctions oscillantes, par exemple l'équation de Schrödinger (stationnaire ou non).

On souhaite évaluer le comportement asymptotique de :

$$A(u(x)|dx|^{\frac{1}{2}}) = (2\pi h)^{-n} \left(\int e^{\frac{i}{h}(x-y|\xi)} a(y, \xi) u(y) |dy d\xi| \right) |dx|^{\frac{1}{2}} ,$$

avec $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, \xi) h^j$ et donc :

$$\sigma_p(A) = a_0(x, \xi), \quad \sigma_{\text{sub}}(A) = a_1 + \frac{1}{2i} \sum_j \frac{\partial^2 a_0}{\partial x_j \partial \xi_j}.$$

On a le résultat suivant :

THÉORÈME 56. *Si $u\sqrt{|dx|} \in O^0(X, \Lambda)$ et A est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, $A(u\sqrt{|dx|})$ est dans la classe $O^0(X, \Lambda)$ et son symbole principal est donné par :*

$$\sigma_{\varphi}(A(u\sqrt{|dx|})) = a_0(\lambda) \sigma_{\varphi}(u\sqrt{|dx|}).$$

Si ce symbole s'annule, c'est-à-dire si $\sigma_p(A)$ est nul sur Λ (équation eiconale), $A(u\sqrt{|dx|})$ est dans $O^1(X, \Lambda)$ et son symbole principal est donné par

$$\sigma_{\varphi}(A(u\sqrt{|dx|})) = \left(\frac{1}{i} \mathcal{L}_{\mathcal{X}_{a_0}} + \sigma_{\text{sub}}(A) \right) \sigma_{\varphi}(u\sqrt{|dx|}).$$

Ici $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ désigne la dérivée de Lie : \mathcal{X}_{a_0} est tangent à Λ et le fibré L_h est plat, il s'agit donc uniquement de la dérivée de Lie de la partie demi-densité donnée par :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(a(\lambda)|d\lambda|^{\frac{1}{2}}) = (da(\mathcal{X}) + a\text{Div}(\mathcal{X}))|d\lambda|^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve.—

Supposons pour simplifier que l'on se place en dehors de la caustique. On a donc :

$$u_h(x) = e^{\frac{i}{h}S(x)} b(x) |dx|^{\frac{1}{2}}$$

et on doit donc évaluer par la phase stationnaire l'intégrale :

$$I(x) = (2\pi h)^{-n} \left(\int e^{\frac{i}{h}((x-y|\xi)+S(y))} a(y, \xi) b(y) |dy d\xi| \right) |dx|^{\frac{1}{2}}.$$

Lorsque x est fixé, il n'y a qu'un point critique $(y, \xi) = (x, S'(x))$ qui est non dégénéré de signature 0. Cela donne immédiatement le terme principal :

$$I(x) = e^{\frac{i}{h}S(x)} a_0(x, S'(x)) b(x) + O(h).$$

Lorsque a_0 s'annule identiquement sur Λ , on a $I(x) = O(h)$ et on va calculer le terme suivant en supposant bien sûr que $a_1 = 0$. Comme $a_0(x, \xi)$ est nulle sur $\xi = S'(x)$, on peut écrire la formule de Taylor :

$$(33) \quad a(x, \xi) = \sum_j \alpha_j(x, \xi) (\xi_j - \partial_j S(x)),$$

ce qui permet d'intégrer par parties $I(x)$ car, si on pose $\varphi = (x - y|\xi) + S(y)$,

$$\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial y_j} (e^{\frac{i}{h}\varphi(x, y, \xi)}) = (\partial_j S(y) - \xi_j) e^{\frac{i}{h}\varphi(x, y, \xi)}.$$

On obtient ainsi :

$$I(x) = \frac{h}{i} e^{\frac{i}{h}S(x)} \left(\sum_j \alpha_j(x, S'(x)) \frac{\partial b}{\partial x_j} + b \left(\sum_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j}(x, S'(x)) \right) \right) + O(h^2).$$

On identifie facilement le 1er terme à $db(\mathcal{X})$ et il reste à montrer que, si $\mathcal{X} = \sum_j \frac{\partial a_0}{\partial \xi_j}(x, S'(x)) \frac{\partial}{\partial x_j}$, on a :

$$\frac{1}{2}(\text{Div}(\mathcal{X}) + \sigma_{\text{Sub}}(A)) = \sum_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial \xi_j}(x, S'(x)) .$$

On a :

$$\sigma_{\text{Sub}}(A) = \frac{1}{2i} \sum_j \frac{\partial^2 a_0}{\partial x_j \partial \xi_j}$$

et on obtient la relation cherchée en dérivant l'identité (33) par rapport à x_l puis ξ_l et en y faisant $\xi = S'(x)$.

□

9. Le problème de Cauchy semi-classique

9.1. Le problème. Dans cette section, on montre comment résoudre le problème de Cauchy, pour une équation de type Schrödinger avec données initiales oscillantes, dans la classe des intégrales oscillantes.

Si u_0 est une demi-densité de carré intégrable, on peut résoudre le problème de Cauchy

$$\frac{h}{i} \frac{\partial u}{\partial t} = -\hat{H}u, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

où \hat{H} est un hamiltonien semi-classique de symbole principal H_0 . La solution est donnée par le groupe à un paramètre

$$u(., t) = U(t)u_0 = e^{-\frac{i}{h}t\hat{H}}u_0 .$$

On considérera u comme une demi-densité sur $X \times \mathbb{R}$ quitte à la multiplier par la demi-densité canonique \sqrt{dt} sur \mathbb{R} .

On suppose que $u_0 \in O_o^0(X, \Lambda_0)$ où Λ est une sous-variété lagrangienne de T^*X .

Par exemple, u_0 peut être une *distribution de Dirac tronquée* :

$$u_0(x) = (2\pi h)^{-n} \chi(x) \int e^{-\frac{i}{h}(x-x_0|\xi)} A(\xi) d\xi \sqrt{|dx|} ,$$

où $\chi \in C_o^\infty(X)$ et $A \in C_o^\infty(T_{x_0}^*X)$.

On pourrait généraliser sans problème au cas où \hat{H} dépend de t . Le but de ce qui suit est de montrer que $u(x, t) \in O^0(X \times \mathbb{R}, \Lambda)$ où Λ est une sous-variété lagrangienne de $T^*(X \times \mathbb{R})$, solution d'un *problème de Cauchy classique* et de calculer le symbole principal de u .

9.2. Le problème de Cauchy classique. On associe à Λ_0 et H_0 une variété lagrangienne $\Lambda \subset T^*(X \times \mathbb{R})$ qui est la *solution classique du problème de Cauchy* : si X_{H_0} est le gradient symplectique de H_0 et φ_t son flot, on note par $\Phi : \Lambda_0 \times \mathbb{R} \rightarrow T^*(X \times \mathbb{R})$ l'application définie par :

$$\Phi(\lambda, t) = (\varphi_t(\lambda); t, -H_0(\lambda)) .$$

L'image de Φ est une sous-variété lagrangienne Λ de $T^*(X \times \mathbb{R})$ contenue dans $E + H(x, \xi) = 0$, où on note E la variable duale de t : en effet elle s'obtient à partir de la variété isotrope $\tilde{\Lambda}_0 = \{(\lambda; 0, -H(\lambda)) | \lambda \in \Lambda_0\}$ en prenant les trajectoires caractéristiques de l'hamiltonien $H_0 + E$ qui en sont issues.

Fonctions génératrices :

Il est souvent important de choisir une bonne fonction génératrice pour Λ lorsque t reste voisin de 0.

On a le :

LEMME 11. *Si $\varphi(x, \theta)$ est une fonction génératrice pour Λ_0 , Λ admet, pour t petit, une fonction génératrice ψ qui satisfait :*

$$\psi(x, t, \theta) = \varphi(x, \theta) - tH_0(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}) + O(t^2) .$$

Preuve. –

ψ est donnée par la solution du problème de Cauchy (dépendant de θ) non linéaire :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -H_0(x, \frac{\partial \psi}{\partial x}) , \quad \psi(x, 0, \theta) = \varphi(x, \theta) ,$$

que l'on résoud par la méthode usuelle (variété lagrangienne).

Il est alors clair que ψ est une fonction génératrice non dégénérée associée à Λ .

□

Remarque : on aura besoin dans certain cas de fonctions génératrices plus subtiles ; celle de Hörmander en est une.

Si $\Lambda_0 = T_{x_0}^*(X)$ et que l'on se place au voisinage d'un point ξ_0 où $\sum \xi_i \frac{\partial H_0}{\partial \xi_i} \neq 0$, on peut trouver une fonction génératrice de la forme $\psi(x, t, \xi) = \varphi(x, \xi) - tH_0(x, \xi)$ où φ définit la variété $T_{x_0}^*X$ au voisinage de ξ_0 (le problème est de bien choisir φ).

Pour chaque ξ , on choisit $\varphi(., \xi)$ telle que : φ soit nulle sur l'hyperplan P d'équation $(x - x_0)|_{\xi} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \xi$ sur P et $H_0(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}) = H_0(x, \xi)$.

Cela est possible sous la condition indiquée.

9.3. La solution du problème de Cauchy semi-classique. On suppose que Λ_0 vérifie les conditions de Bohr-Sommerfeld, ce qui n'est pas en général une hypothèse contraignante, car $(u_h) \in O^0(X, \Lambda_0)$. Alors Λ vérifie aussi les conditions de Bohr-Sommerfeld, car elle se rétracte sur Λ_0 .

Venons-en au calcul symbolique associé à l'opération de restriction en $t = 0$.

On a une opération naturelle sur les demi-densités dans le contexte suivant : W_0 est une sous-variété de codimension 1 d'une variété W et Z est un champ de vecteurs transverse à W_0 . Dans ce cas on a une flèche canonique surjective de $\Omega^{1/2}(W)$ sur $\Omega^{1/2}(W_0)$ obtenue par *division*.

Le symbole d'une intégrale oscillante sur Λ donne ainsi le symbole de la restriction en $t = 0$ divisé par \sqrt{dt} en appliquant ce qui précède à $\Lambda_0 \subset \Lambda$ et au champ $Z = X_{H_0} + \frac{\partial}{\partial t}$.

On le vérifie trivialement dans le cas des fonctions oscillantes et aussi dans le cas où $\varphi = x\xi - F(\xi)$.

Sous les hypothèses précédentes, on a le

THÉORÈME 57. *La solution $u(x, t)$ du problème de Cauchy est dans $O^0(\Lambda)$ et admet, dans la trivialisation de L_h sur Λ qui prolonge celle de Λ_0 , un symbole principal dont le pull-back par Φ vaut :*

$$\sigma_p(u_0)(\lambda) e^{-i \int_0^t H_1(\varphi_s(\lambda)) ds} \otimes \sqrt{dt} .$$

Preuve. –

On construit $v \in O^0(\Lambda)$ comme somme asymptotique $\sum_{j=0}^{+\infty} v_j$ avec $v_j \in O^j(\Lambda)$ de façon que si $P = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{H}$, on ait $P(v_0 + \dots + v_j) \in O^{(j+2)}(\Lambda)$, $(v_0 + \dots + v_j)|_{t=0} - u_0 \in O^{(j+1)}(\Lambda_0)$.

Si on fait cela, on aura :

$$P(u - v) \in O^\infty(\Lambda), \quad (u - v)|_{t=0} \in O^\infty(\Lambda_0).$$

On en déduit que $u - v \in O^\infty(\Lambda)$ en résolvant les équations précédentes par la méthode de variations des constantes et en utilisant le fait que u_0 est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées et à support compact, il en est de même de u .

Pour construire les v_j , on procède par récurrence : $v_0 \in O^0(\Lambda)$ a le symbole principal donné dans le théorème, cela suffit à assurer que $Pv_0 \in O^2(\Lambda)$, car le symbole principal du second membre est nul (équation eiconale) et le symbole principal d'ordre -1 l'est aussi (équation de transport qui se réduit à $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H_1(\varphi_t(\lambda))$) en considérant l'image réciproque des demi-densités par Φ et le fait que alors $\sqrt{d\lambda} \otimes \sqrt{dt}$ est invariante par le flot. De plus $u_0 - (v_0)|_{t=0} \in O^1(\Lambda_0)$ comme il résulte du calcul symbolique pour la restriction à $t = 0$.

On peut alors continuer la récurrence et on aura à chaque étape à résoudre une équation de transport avec second membre, ce qui ne pose pas de problème.

□

9.4. Le propagateur semi-classique. Soit \hat{H} un Hamiltonien semi-classique de symbole principal H_0 sur X (ici X est supposée sans bord). Par exemple \hat{H} est un opérateur de Schrödinger sur une variété riemannienne compacte.

L'équation de Schrödinger

$$\frac{h}{i} \partial_t u = -\hat{H}u$$

admet une solution $u(t)$ pour toute donnée initiale dans L^2 . De plus $u(t)$ est donnée par un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires : $u(t) = U(t)u(0)$.

THÉORÈME 58. Soit $\Pi \in \Psi_o^0(X)$. Alors

$$U(t) \circ \Pi$$

est un OIF associé au flot hamiltonien de H_0 à l'instant t . On montre, ce qui est plus général, que le noyau $p(t, x, y) |dx dy dt|^{\frac{1}{2}}$ de $U(t) \circ \Pi$ est un élément de $O^0(X \times X \times \mathbb{R}, \Lambda)$ où Λ est définie par

$$\Lambda = \{(x, \xi; y, -\eta; t, E) | (x, \xi) = \varphi_t(y, \eta), E = -H_0(x, \xi)\}.$$

et le symbole du noyau p est l'image de $e^{-iB(t, y, \eta)} |dy d\eta dt|^{\frac{1}{2}}$, avec

$$B(t, y, \eta) = \int_0^t H_1(\varphi_s(y, \eta)) ds,$$

par l'application :

$$(t, y, \eta) \rightarrow (\varphi_t(y, \eta); y, -\eta; t, -H_0(y, \eta)).$$

Preuve.—

□

9.5. La formule de Van Vleck. On souhaite décrire le *propagateur* $p(t, x, y_0)|dx|^{\frac{1}{2}} = U(t)(\delta(y_0)|dy|^{\frac{1}{2}})$. Cette distribution est en général très singulière, car il y a une infinité de trajectoires classiques qui joignent y_0 à x dans le temps t . Il est nécessaire de tronquer l'énergie ; on est ainsi conduit à considérer le cas où u_0 est une masse de Dirac en y_0 tronquée en fréquence :

$$u_0(y) = \chi(y)(2\pi h)^{-n} \int e^{-\frac{i}{h}(y-y_0|\xi)} A(\xi) d\xi \sqrt{dy} .$$

La variété lagrangienne Λ est alors donnée par

$$\Lambda = \{(\varphi_t(y_0, \eta), t, -H_0(y_0, \eta)) | t \in \mathbb{R}^+, \eta \in \text{Supp}(A)\} .$$

On supposera que H_0 provient d'un lagrangien strictement convexe $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ par rapport à \dot{x} et que l'hypothèse de Hörmander $\sum \xi_j \frac{\partial a}{\partial \xi_j}$ est satisfaite en tout point du support de A .

On notera $\text{Exp}_{y_0}^t(\eta)$ la projection sur X de $\varphi_t(y_0, \eta)$. On considère un point x de X tel que, $\forall \eta \in \text{Supp}(A)$ tel que $\text{Exp}_{y_0}^t(\eta) = x$,

$$\zeta \rightarrow \text{Exp}_{y_0}^t(\zeta)$$

soit un difféomorphisme local près de η . En d'autres termes les points y_0 et x ne sont conjugués sur aucune trajectoire classique qui les joint en temps t et dont l'impulsion initiale est dans le support de A .

La *formule de Van Vleck* exprime alors

$$u = U(t)u_0$$

près d'un tel x comme une fonction oscillante :

THÉORÈME 59. *Sous les hypothèses précédentes et si on pose*

$$B(t, \eta) = \int_0^t H_1(\varphi_s(y_0, \eta)) ds ,$$

on a :

$$u(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi i h}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{\eta_\alpha} \frac{A(\eta_\alpha)}{\sqrt{J_{y_0}(\eta_\alpha)}} e^{i\left(\frac{1}{h} \int_{\gamma_\alpha} \mathcal{L} ds - B(t, \eta_\alpha) - \frac{\pi}{2} \text{ind}(\gamma_\alpha)\right)} \sqrt{dx} ,$$

où la somme (finie) porte sur les $\eta_\alpha \in \text{Supp}(A)$ tels que $\text{Exp}_{y_0}^t(\eta) = x$ et $J_{y_0}(\eta_\alpha)$ est le jacobien de $\text{Exp}_{y_0}^t$ en η_α . On note γ_α l'extrémale de $\int_0^t \mathcal{L}$ à extrémités y_0 et x et ind son indice de Morse. Ici $\frac{1}{i} \frac{n}{2} = e^{-in\frac{\pi}{4}}$.

Preuve.—

L_h est un fibré plat globalement trivial sur

$$\Lambda = \{(\varphi_t(y_0, \eta); t, -H_0(y_0, \eta))\}$$

dont la trivialisation près de $t = 0$ est donnée par une fonction génératrice $(x - y_0|\eta) - tH_0(x, \eta) + O(t^2)$. On utilise un système cohérent de fonctions génératrices et le symbole principal au point $(\varphi_t(y_0, \eta); t, -H_0(y_0, \eta))$ est l'image de $(2\pi h)^{-n/2} A(\eta) e^{-iB(t, \eta)} |d\eta|^{\frac{1}{2}}$ par le flot à l'instant t . La 1-forme de Liouville sur Λ est $\xi dx -$

$H_0(x, \xi)dt$ dont l'intégrale le long des trajectoires classiques donne l'intégrale du lagrangien. Il ne reste qu'à tenir compte des indices de Maslov qui sont égaux à ceux de Morse.

□

10. Transformation des mesures de Husimi et théorème ergodique semi-classique

10.1. Mesures de Husimi des fonctions propres. Soit \hat{H} un hamiltonien semi-classique tel que H_0 est propre et $\varphi_\alpha(h)$ une famille de fonctions propres normalisées de valeurs propres $E_\alpha(h)$ telles que $\lim_{h \rightarrow 0} E_\alpha(h) = \bar{E}$. Soit μ_α les mesures de Husimi associées. On a le :

THÉORÈME 60. *Si μ_∞ est une limite vague quelconque des μ_α quand $h \rightarrow 0$, μ_∞ est une mesure de probabilité sur la couche d'énergie $H_0^{-1}(\bar{E})$ invariante par le flot classique de H_0 .*

Preuve. –

On a déjà donné une preuve directe s'appuyant sur le calcul pseudo-différentiel (voir l'équation 13). Donnons une preuve basée sur Egorov qui a l'avantage de s'appliquer dans le cas du temps discret. L'assertion sur le support est claire, car $WF(\varphi_\alpha) \subset H_0^{-1}(\bar{E})$. L'invariance résulte du théorème d'Egorov ; si $\hat{U}(t)$ est le groupe unitaire engendré par \hat{H} et $a \in C^\infty(T^*X)$, on a :

$$\langle Op_+(a)\hat{U}(t)\varphi_\alpha | \hat{U}(t)\varphi_\alpha \rangle = \langle Op_+(a)\varphi_\alpha | \varphi_\alpha \rangle$$

et $\hat{U}(-t)Op_+(a)\hat{U}(t) = Op_+(a \circ \varphi_t) + B$ où B est d'ordre 1 d'après Egorov :

$$\int a \circ \varphi_t d\mu_\alpha = \int a d\mu_\alpha + O(h)$$

et cela suffit pour conclure.

□

10.2. Le théorème de Shnirelman. Le but de cette section est de prouver un résultat remarquable découvert par Shnirelman (appendice de [Laz93]) et dont les preuves ont été données par Zelditch ([Zel87]) dans le cas des surfaces de Riemann à courbure constante et par moi-même dans le cas général (voir [Col85]).

THÉORÈME 61. *Soit \hat{H} un hamiltonien semi-classique tel que H_0 est propre et soit $I = [E_-, E_+]$ tel que le flot hamiltonien de H_0 soit ergodique sur les surfaces de niveaux $H_0 = E$ lorsque $E \in I$. On suppose aussi que H_0 n'a pas de valeur critique dans I . Soit $\varphi_{\alpha(h)}$ ($\alpha(h) \in A(h)$) une famille orthonormale de fonctions propres de \hat{H} de valeurs propres $E_\alpha(h)$ telles que $\{E_\alpha(h) | \alpha(h) \in A(h)\} = \sigma(\hat{H}) \cap I$. Soit $\mu_{\alpha(h)}$ les mesures de Husimi des $\varphi_{\alpha(h)}$.*

Alors il existe des sous-ensembles $B(h) \subset A(h)$ tels que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|B(h)|}{|A(h)|} = 1 ,$$

et que, pour toute suite $\alpha(h) \in B(h)$ telle que $\lim E_{\alpha(h)} = \bar{E}$, les mesures $\mu_{\alpha(h)}$ convergent vaguement vers la mesure de probabilité microcanonique $dL_{\bar{E}}$ de $H_0^{-1}(\bar{E})$.

COROLLAIRE 6. Si (X, g) est une variété riemannienne compacte dont le flot géodésique est ergodique, il existe une sous-suite λ_j de densité 1 du spectre du laplacien telle que les mesures de Husimi μ_j des fonctions propres φ_j (on pose $h^2\lambda_j = 1$ pour les définir) convergent vers la mesure de Liouville sur le fibré unitaire cotangent lorsque $j \rightarrow \infty$.

En particulier, si $D \subset X$ est un domaine à bord C^1 , on a

$$\lim \int_D |\varphi_j|^2 dx = \frac{\text{vol}(D)}{\text{vol}(X)}$$

pour une sous-suite de densité 1.

Preuve. –

Soit $K = H_0^{-1}(I)$, $dL_K = \chi_K dL$ la mesure de Liouville restreinte à K , $N = (2\pi h)^{-n}$ et, pour $z \in K$ et $a \in C_o^\infty(K)$, $\bar{a}(z) = \int_{H_0=E} a(z) dL_E$ où dL_E est la mesure de probabilité microcanonique. On pose aussi

$$a_T(z) = \frac{1}{T} \int_0^T a(\varphi_t(z)) dt$$

et

$$\hat{a}_T = a_T - \bar{a} .$$

D'après l'ergodicité, \hat{a}_T tend vers 0 presque partout dans K et, par le théorème de Lebesgue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe T_0 , tel que

$$\int_K |\hat{a}_{T_0}| dL \leq \varepsilon/2 .$$

Comme

$$\frac{1}{N} \sum_{\alpha(h) \in A(h)} \mu_{\alpha(h)}$$

converge vaguement vers dL_K (variante de Weyl-Hörmander, voir le théorème 71), on a, pour h assez petit :

$$\sum_{\alpha(h) \in A(h)} \mu_{\alpha(h)}(|\hat{a}_{T_0}|) \leq \varepsilon N .$$

On en déduit par l'inégalité de Chébychev que, si

$$E^\varepsilon(h) = \{\alpha(h) \in A(h) \mid \int |\hat{a}_{T_0}| d\mu_{\alpha(h)} \leq \sqrt{\varepsilon}\}$$

alors

$$\frac{|E^\varepsilon(h)|}{|A(h)|} \geq 1 - c\sqrt{\varepsilon} .$$

D'après le théorème d'Egorov, si

$$D^\varepsilon(h) = \{\alpha(h) \in A(h) \mid \int (a_{T_0} - a) d\mu_{\alpha(h)} \leq \sqrt{\varepsilon}\} ,$$

$D^\varepsilon(h) = A(h)$ pour h assez petit. Si

$$C^\varepsilon(h) = \{\alpha(h) \in A(h) \mid \int (a - \bar{a}) d\mu_{\alpha(h)} \leq 2\sqrt{\varepsilon}\} ,$$

$E^\varepsilon(h) \cap D^\varepsilon(h) \subset C^\varepsilon(h)$ et on a ainsi :

$$\frac{|C^\varepsilon(h)|}{|A(h)|} \geq 1 - c' \sqrt{\varepsilon} ,$$

pour h assez petit. Par un argument de suite diagonale, on construit $C_a(h) \subset A(h)$, tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|C_a(h)|}{|A(h)|} = 1 ,$$

et $\lim_{h \rightarrow 0} \int (a - \bar{a}) d\mu_{\alpha(h)} = 0$ pour $\alpha(h) \in C_a(h)$. On utilise ensuite une base dénombrable de $L^2(K)$ et un nouveau procédé diagonal pour obtenir un $C(h)$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|C(h)|}{|A(h)|} = 1 ,$$

et, pour tout $a \in C^0(K)$, $\lim_{h \rightarrow 0} \int (a - \bar{a}) d\mu_{\alpha(h)} = 0$ pour $\alpha(h) \in C(h)$. Soit $E_{\alpha_j}(h)$, $\alpha_j(h) \in C(h)$ telle que $\lim_{h \rightarrow 0} E_{\alpha_j}(h) = \bar{E}$ et, pour $a \in C^0(K)$, $a(\bar{E}) = \int a dL_{\bar{E}}$, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int (\bar{a} - a(\bar{E})) d\mu_{\alpha_j(h)} = 0$$

car $\bar{a} = a(\bar{E})$ sur $H_0^{-1}(\bar{E})$. On en déduit le résultat. \square

10.3. L'unique ergodicité semi-classique. Sous les mêmes hypothèses que plus haut, soit μ_∞ une limite vague d'une suite $\mu_{\alpha_j(h)}$ lorsque $h \rightarrow 0$ et $E_{\alpha_j(h)} \rightarrow \bar{E}$. La probabilité μ_∞ est invariante par le flot classique sur $H_0^{-1}(\bar{E})$. Sous l'hypothèse d'ergodicité, peut-il exister des suites exceptionnelles telles que μ_∞ n'est pas la mesure de Liouville $dL_{\bar{E}}$? La réponse à cette question n'est pas connue. Dans le cas du laplacien sur une surface de Riemann arithmétique, Luo et Sarnak (voir [Sar95]) ont montré un résultat de ce type si on choisit une base de fonctions propres qui diagonalise les opérateurs de Hecke. Dans leur cas, c'est plutôt les opérateurs de Hecke qui forcent l'unique ergodicité. Dans le cas complètement intégrable, il n'est pas difficile de voir qu'il existe des μ_∞ qui sont la mesure de probabilité portée par une trajectoire périodique (voir [CP94b]).

11. Fonctions oscillantes attachées aux intersections lagrangiennes

11.1. Introduction. Dans ce qui précède nous avons montré comment utiliser les fonctions lagrangiennes pour résoudre des équations pseudo-différentielles $\hat{P}u = 0$. Une hypothèse importante était celle de la lissité de la variété caractéristique (non nullité de la différentielle du symbole principal) et des variétés lagrangiennes considérées. Il arrive que ces hypothèses ne soient pas satisfaites : équation de Schrödinger stationnaire avec une valeur critique de l'énergie, système de ΨDO avec un symbole principal dont les valeurs propres ne sont pas de multiplicité 1 partout. Dans ce cas, on a besoin d'un Ansatz plus singulier. Nous étudions le cas le plus simple, celui où $\sigma_p(\hat{P}) = p_1 p_2$ et où les variétés caractéristiques $p_j^{-1}(0)$ (de codimension 1) se coupent transversalement. On a ainsi un outil plus souple que celui des formes normales de la section 5.5. Le WF des fonctions considérées est la réunion de 2 variétés lagrangiennes Λ_j , $j = 1, 2$ qui se coupent transversalement au

sens de Bott suivant une variété W de codimension 1 dans chacune. Si $\alpha : W \rightarrow \mathbb{C}$ est donnée, on introduit des espaces $O^{\alpha,l}(X; \Lambda_1, \Lambda_2)$. On commence par étudier le cas simple où les Λ_j sont les 2 axes de coordonnées de T^*R . On ramène le cas général à celui-là avec un paramètre sur W .

L'analogie sans petit paramètre de cet Ansatz a été étudié sous le nom de symbole singulier par Melrose-Uhlmann ([MU79]) et Guillemin-Uhlmann ([GU81]).

11.2. Le modèle.

11.2.1. *Formulaire.* Rappelons les formules pour les transformées de Fourier des distributions x_{\pm}^{α} , d'après [GS64] p. 170-174 :

THÉORÈME 62. Si $\alpha \notin -\mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{F}_1(x_+^{\alpha}) = ie^{i\alpha\pi/2}\Gamma(\alpha+1)(\xi+i0)^{-\alpha-1}$$

et

$$\mathcal{F}_1(x_-^{\alpha}) = -ie^{-i\alpha\pi/2}\Gamma(\alpha+1)(\xi-i0)^{-\alpha-1}.$$

Et aussi :

$$\mathcal{F}_h(x_+^{\alpha}) = ih^{\frac{1}{2}+\alpha}\Gamma(\alpha+1)(e^{i\alpha\pi/2}\xi_+^{-\alpha-1} - e^{-i\alpha\pi/2}\xi_-^{-\alpha-1})$$

et

$$\mathcal{F}_h(x_-^{\alpha}) = -ih^{\frac{1}{2}+\alpha}\Gamma(\alpha+1)(e^{-i\alpha\pi/2}\xi_+^{-\alpha-1} - e^{i\alpha\pi/2}\xi_-^{-\alpha-1}).$$

11.2.2. *Le modèle en dimension 1.* Soit $\Lambda_1 = \mathbb{R} \oplus 0$ et $\Lambda_2 = 0 \oplus \mathbb{R}$ vues comme sous-variétés lagrangiennes de $\mathbb{R}^2 = T^*\mathbb{R}$. On veut définir des espaces de fonctions admissibles microlocalisées sur $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$.

DÉFINITION 51. Soit E^{α} ($\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$) les sous-espaces de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ engendré par les 2 distributions (fonctions L_{loc}^1) x_{\pm}^{α} . Soit Ψ_o^l l'algèbre des ΨDO d'ordre l compactement supportés. On pose $O^{l,\alpha}(\mathbb{R}, \Lambda_1, \Lambda_2) = \Psi_o^l(E^{\alpha})$ et on note $O^{l,\alpha}$ cet espace dans la suite.

On a les résultats plus ou moins évidents suivants :

THÉORÈME 63. • $O^{l,\alpha}$ est transformé en $h^{\frac{1}{2}+\alpha}O^{l,-1-\alpha}$ par la transformée de Fourier \mathcal{F}_h

- Si $A \in \Psi_o^m$, $AO^l \subset O^{m+l}$
- Au voisinage de $z \in \Lambda \setminus 0$, toute fonction $u_h \in O^{0,\alpha}$ induit une fonction lagrangienne au sens usuel d'ordre 0 sur Λ_1 et d'ordre $\frac{1}{2} + \Re(\alpha)$ sur Λ_2 .

Le premier point se prouve ainsi : si $T \in E^{\alpha}$ ($\mathcal{F}_h T = T' \in h^{\frac{1}{2}+\alpha}E^{-1-\alpha}$) et $A \in \Psi_o^l$,

$$(34) \quad \mathcal{F}AT = \mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T = BT'$$

et $B \in \Psi_o^l$.

Pour ce qui est du 2ème, le symbole se décompose en σ_j , $j = 1, 2$ sur les 2 variétés lagrangiennes avec $\sigma_1 = p(x, o)(\lambda_+ x_+^{\alpha} + \lambda_- x_-^{\alpha})$ et $\sigma_2 = h^{\frac{1}{2}+\alpha}p(o, \xi)(\mu_+ \xi_+^{-1-\alpha} + \mu_- \xi_-^{-1-\alpha})$.

11.2.3. *Calcul symbolique.* Soit $u_h \in O^{0,\alpha}(\mathbb{R}, \Lambda_1, \Lambda_2)$, on définit le symbole principal σ_p de u_h comme la demi-densité sur $\Lambda \setminus 0$ qui s'obtient par le calcul symbolique lisse. Il se décompose donc en $\sigma_j, j = 1, 2$ où σ_2 contient $h^{\frac{1}{2}+\alpha}$ en facteur.

THÉORÈME 64. (1) On a alors sur chacune des 4 branches $|x|^{-\alpha}\sigma_1(x)$ (resp. $h^{-\frac{1}{2}-\alpha}|\xi|^{1+\alpha}\sigma_2(\xi)$) sont C^∞ jusqu'en 0.

(2) Les 4 limites (λ_\pm, μ_\pm) vérifient la condition de compatibilité C^α (la même que dans Colin-Parisse) suivante :

$$(35) \quad \begin{pmatrix} \mu_+ \\ \mu_- \end{pmatrix} = i\Gamma(1+\alpha)e^{i\alpha\pi/2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\alpha\pi} \\ e^{-i\alpha\pi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+ \\ \lambda_- \end{pmatrix}$$

(3) Réciproquement, pour toute donnée de symboles vérifiant 1. et 2., il existe un $u_h \in O^{0,\alpha}(\Lambda)$ ayant ce symbole.

(4) Si les 4 symboles de $u_h \in O^{0,\alpha}$ sont nuls, $u_h \in O^{1,\alpha}$.

Le 1. est évident par calcul symbolique usuel.

Le 2. résulte du calcul de la transformée de Fourier de u par le théorème 62 et la formule (34).

Le 3. se démontre ainsi : soit u la fonction inconnue, on choisit λ_\pm comme limites des $x_\pm^{-\alpha}$ fois les symboles sur $\xi = 0$, puis $u_0 = \lambda_+x_+^\alpha + \lambda_-x_-^\alpha$. Soit $\sigma_j(u) = x_\pm^\alpha f_j(x)$ avec $f_j(0_\pm) = \lambda_\pm$, et $g_j(x) = f_j(x) - \lambda_\pm$ (et de même sur les branches verticales) Soit $u_j = x_+^\alpha g_j(x)$ avec g C^∞ nulle en 0. Un tel u_j est dans $O^{0,\alpha}$ (produit par $g_j(x)$ de x_\pm^α) et de symbole nul sur les 3 autres branches). $u = \sum_{i=0}^4 u_i$ fait l'affaire.

Preuve du 4. : on écrit $u = P(\lambda_+x_+^\alpha + \lambda_-x_-^\alpha)$ et de même \hat{u} avec μ_\pm . On peut supposer λ_+, μ_\pm non nuls. On déduit que $p(x, \xi)$ est nul sur $x = 0$ et $\{\xi = 0, x \geq 0\}$. On écrit ainsi $p(x, \xi) = r(x, \xi)x\xi + s(x)$ où s est nulle pour $x \geq 0$ et pour tout x si $\mu \neq 0$. Il suffit de vérifier que $x\xi(x_\pm^\alpha)$ est dans $O^{1,\alpha}$.

11.3. Le cas général.

11.3.1. *La dimension 1.* On se ramène à la situation précédente par OIF : il existe une transformation canonique χ qui transforme le modèle en le cas général. On utilise un OIF associé \hat{U} pour définir les $O^{\alpha,l}(\mathbb{R}, \Lambda_1, \Lambda_2)$ comme image par \hat{U} des espaces modèles.

11.3.2. *La dimension quelconque.* $\Lambda_j, j = 1, 2$, se coupent suivant W transversalement au sens de Bott et W est de codimension 1 dans chacune. On se donne une fonction $\alpha : W \rightarrow \mathbb{C}$. Il existe une transformation canonique χ qui transforme la situation en $\Lambda_1 = \{(x_1, 0; x', 0)\}$ et $\Lambda_2 = \{(0, \xi_1; x', 0)\}$. On définit sur ce modèle, si $\alpha(x')$ est donnée comme fonction C^∞ sur W , l'espace $O^{\alpha,0}(\mathbb{R}^n, \Lambda_1, \Lambda_2)$ comme l'image par les ΨDO compactement supportés d'ordre 0 des fonctions $(x_1)_\pm^{\alpha(x')}$. les résultats sont analogues à ceux de dimension 1 en particulier le calcul symbolique se réduit à celui de $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \setminus W$ avec une relation de compatibilité entre les 4 fonctions de x' obtenues en termes des comportements asymptotiques des symboles lagrangiens usuels.

11.4. **L'action des OPD.** Soit \hat{H} de symbole principal réel H_0 de la forme $H_0 = p_1 p_2$ avec dp_1 et dp_2 indépendants sur $Z = p_1^{-1}(0) \cap p_2^{-1}(0)$ et de sous-principal H_1 . Supposons que les variétés lagrangiennes $\Lambda_1 \subset p_1^{-1}(0)$ et $\Lambda_2 \subset p_2^{-1}(0)$ se coupent transversalement sur $W \subset Z$ de codimension 1 dans chacune. W est

l'intersection de Λ_1 avec $\{p_2 = 0\}$ (et de Λ_2 avec $\{p_1 = 0\}$). On suppose que le crochet de Poisson $\{p_1, p_2\} = f$ ne s'annule pas sur W . On peut alors trouver des coordonnées locales canoniques $(x_1, \xi_1; x', \xi')$ près de chaque point de W telles que $p_1 = x_1$, $p_2 = \tilde{f}\xi_1$ avec $\tilde{f}|_W = f$, et que :

$$\Lambda_1 = \{(0, \xi_1; x', 0)\}, \quad \Lambda_2 = \{(x_1, 0; x', 0)\}.$$

On a :

$$\mathcal{X}_{H_0} = \tilde{f}(x_1 \partial_{x_1} - \xi_1 \partial_{\xi_1}) + x_1 \xi_1 \mathcal{X}_{\tilde{f}}.$$

Ecrivons les équations de transport sur Λ_j , $j = 1, 2$ pour les symboles $a_j \omega_j$ où les demi-densités ω_j sont données par $\omega_1 = |d\xi_1 dx'|^{\frac{1}{2}}$, $\omega_2 = |dx_1 dx'|^{\frac{1}{2}}$:

$$\frac{1}{i} \left(\tilde{f}(-\xi_1 \frac{\partial a_1}{\partial \xi_1}) - \frac{1}{2}(\tilde{f} + \xi_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi_1})a_1 \right) + H_1 a_1 = 0$$

et

$$\frac{1}{i} \left(\tilde{f}(x_1 \frac{\partial a_2}{\partial x_1}) + \frac{1}{2}(\tilde{f} + x_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1})a_2 \right) + H_1 a_2 = 0.$$

Ces équations sont singulières et leurs solutions se comportent en $|\xi_1|^{-\frac{1}{2}+i\lambda(x')}$ (resp. $|x_1|^{-\frac{1}{2}-i\lambda(x')}$) où $\lambda(x') = H_1(0; x', 0)/f(0; x', 0)$.

Cela permet de résoudre un problème de Cauchy semi-classique dans l'espace $O^{-\frac{1}{2}+i\lambda(x')}$ où u est donnée sur 2 des branches (avec les préfacteurs en $h^{-\frac{1}{2}-c}$ nécessaires si $H_1(0; x', 0)$ n'est pas réel).

11.5. Le cas de 2 hamiltoniens faiblement couplés. On considère un système semi-classique de la forme $\hat{H}U = 0$ où

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{H}_1 & \sqrt{h}\hat{W}_1 \\ \sqrt{h}\hat{W}_2 & \hat{H}_2 \end{pmatrix}.$$

L'équation précédente peut être transformée sous l'hypothèse que \hat{W}_1 est elliptique au point considéré en une équation ordinaire pour u :

$$\hat{W}_1 \hat{H}_2 \hat{W}_1^{-1} \hat{H}_1 u - h \hat{W}_1 \hat{W}_2 u = 0$$

et $v = -\frac{1}{\sqrt{h}} \hat{W}_1^{-1} \hat{H}_1 u$, qui est justiciable du traitement de la section précédente dès que le crochet de Poisson de H_1 et H_2 ne s'annule pas sur l'intersection des 2 variétés lagrangiennes.

FORMULES DE TRACES

1. Introduction

Le but principal de ce chapitre est de décrire et de donner une preuve de la *formule des traces semi-classique*.

De quoi s'agit-il ? Pour les systèmes non complètement intégrables et en particulier les systèmes chaotiques, on ne dispose pas d'accès direct aux valeurs propres semi-classiques par la construction de quasi-modes (voir le chapitre 7). L'idée des formules de traces est d'évaluer directement, dans le régime semi-classique, la fonction de partition quantique pour en déduire par un mécanisme simple de transformée de Fourier la densité d'état régularisée (voir la section 2.3).

1.1. Formules exactes. L'ancêtre des formules de traces est sans doute la formule sommatoire de Poisson que l'on peut réinterpréter comme formule de traces pour le laplacien sur un tore plat (voir le §4.1 pour le cas de la dimension 1). La formule sommatoire de Poisson sert aussi de modèle pour les systèmes complètement intégrables grâce à l'usage des coordonnées actions-angles semi-classiques. Ce cas est traité dans la section 16 où l'on décrit aussi une propriété caractéristique de la densité d'état régularisée pour les systèmes complètement intégrables.

La formule de Selberg traite un cas non complètement intégrable : le laplacien des variétés compactes à courbure constante négative (variétés de Hadamard). Le flot géodésique de ces variétés est fortement instable ; c'est le prototype des flots dits *d'Anosov* qui sont ergodiques, mélangeant, d'entropie > 0 , etc... Des physiciens ont étudiés ces exemples et calculé numériquement leurs spectres pour en examiner les propriétés statistiques (voir à ce sujet [GVZ91] et [BV86]).

1.2. Formules asymptotiques. Ces formules sont apparues dans les années 1970, d'abord chez les physiciens (Balian-Bloch [BB70], [BB71], [BB72] et Gutzwiller [Gut89]), les premiers s'intéressant à l'équation des ondes dans une cavité à la limite de l'optique géométrique (grandes fréquences) au moyen de ce qu'ils appellent le développement en réflexions multiples, le second à l'équation de Schrödinger dans la limite semi-classique à l'aide de l'intégrale de Feynman.

Ces formules ont été ensuite démontrées par des mathématiciens pour le laplacien (limite semi-classique des grandes valeurs propres) : dans ma thèse [Col73b], je montre une formule de type Poisson grâce à l'équation de la chaleur en temps complexe (ie Schrödinger) ; ensuite, Chazarain [Cha74] et Duistermaat-Guillemin [DG75], inspirés par mon travail, utilisent le calcul des opérateurs intégraux de Fourier pour préciser les singularités de la trace de l'équation des ondes. Ces auteurs avaient en particulier en vue des applications aux problèmes inverses : détermination du spectre des longueurs des géodésiques périodiques d'une variété riemannienne compacte à partir du spectre du laplacien. Les formules semi-classiques

de type Gutzwiller ont été démontrées plus récemment par plusieurs auteurs (par exemple [Mei92]).

Nous montrons dans la section 14 comment sont reliées ces différents types de formules qui sont toutes des cas particuliers de la formule *semi-classique*.

2. Principe des formules de traces

2.1. Algèbre. Quel est le principe formel des formules de traces ? Si on a un hamiltonien quantique \hat{H} dépendant de h , petit paramètre, et ayant un spectre discret (ou une partie de spectre discret) $(E_j(h))$, on essaie de calculer la *trace* de $f(\hat{H})$, où f est une (classe de) fonction bien choisie, de 2 façons différentes :

1) comme somme sur les valeurs propres :

$$\text{Trace}(f(\hat{H})) = \sum f(E_j(h)) .$$

2) A partir d'un noyau explicite (matrice de l'opérateur $f(\hat{H})$) ; si $f(\hat{H})u(x) = \int_X K_f(x, y)u(y)dy$, on a :

$$\text{Trace}(f(\hat{H})) = \int_X K_f(x, x)dx .$$

En identifiant les 2 expressions de la trace, on obtient une relation :

$$\sum f(E_j(h)) = \int_X K_f(x, x)dx ,$$

appelée *formule de traces*. La partie gauche ne dépend que du spectre, alors que f est *choisie* pour que la partie droite contienne une information exploitable. Il y a évidemment d'innombrables possibilités. On distingue suivant la nature des fonctions f et suivant que les formules sont exactes ou asymptotiques en h .

2.2. Choix de f . Les f les plus courants sont :

e^{-tE} (équation de la chaleur ou fonction de partition),

$|E|^{-s}$ (fonctions ζ),

$\cos t\sqrt{E}$ (équations des ondes, optique),

$e^{-itE/h}$ (équation de Schrödinger) et sa transformée de Fourier régularisée :

$1/h\rho((E_o - E)/h)$ (voir 2.3).

2.3. Analyse asymptotique des spectres. Soit $E_j(h)$ une suite finie de nombres (un spectre) de l'intervalle $[E_-, E_+]$ telle que

$$(36) \quad \#\{E_j(h)\} = O(h^{-N})$$

Soit $D_h(E) = \sum \delta(E_j)$ la distribution associée à ce spectre, $D_h(E)$ est la *densité spectrale* ou *densité d'état*. Soit $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier $\hat{\rho}(t)$ est dans $C_o^\infty(\mathbb{R})$ et $\chi(E) \in C_o^\infty([E_-, E_+], \mathbb{R})$. Considérons l'expression

$$(37) \quad \tilde{D}_h(E) = \sum \chi(E_j) \frac{1}{h} \rho\left(\frac{E - E_j}{h}\right) .$$

Nous appellerons $\tilde{D}_h(E)$ la *densité régularisée* du spectre à l'échelle h . On souhaite décrire le comportement asymptotique de $\tilde{D}_h(E)$ quand $h \rightarrow 0$.

Soit $A_h : C_o^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_o^\infty(\mathbb{R})$ donné par

$$(38) \quad A_h f(E) = \frac{1}{2\pi h} \int e^{\frac{i}{h}(E-F)t} \chi(E) \hat{\rho}(t) f(t) dt dF$$

On peut voir A_h comme un ΨDO compactement supporté de symbole $\gamma(E)\hat{\rho}(t)$. La densité régularisée $\tilde{D}_h(E) = A_h(D_h(E))$ est déterminée par une analyse microlocale de D_h dans le rectangle $R = \text{Supp}(\chi) \times \text{Supp}(\rho)$. On a donc mis en place l'idée principale :

le comportement asymptotique de la densité d'états régularisée $\tilde{D}_h(E)$ est gouverné par l'analyse microlocale de la densité d'état $D_h(E) = \sum \delta(E_j)$.

Supposons que D_h soit une fonction lagrangienne dans R dont le microsupport est $\{\mathbb{R} \times 0\} \cup_{j=1}^N \{(E, S'_j(E))\}$ où $S'_j(E)$ ne s'annule pas dans $\text{Supp}(\chi)$. On a alors l'expression BKW suivante pour $\tilde{D}_h(E)$:

$$(39) \quad \tilde{D}_h(E) = W(h, E) + \sum_{j=1}^N W_j(h, E)$$

avec

$$W(h, E) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{l,0}(E) h^{l-\nu_0}$$

et

$$W_j(h, E) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{l,j}(E) h^{l-\nu_j} e^{\frac{i}{h} S_j(E)} .$$

En général $\nu_j \leq \nu_0 = n$. Le terme $W(h, E)$ est appelé terme de Weyl et donne la partie régulière de la densité alors que les contributions de W_j donnent des corrections oscillantes à cette densité. On voit ici que les exposants ν_j sont une signature forte du spectre puisqu'ils donnent l'amplitude des oscillations de la densité spectrale. Nous verrons que de ce point de vue (voir la section 16) les systèmes complètement intégrables ont une propriété assez caractéristique.

2.4. Analyse du spectre d'un hamiltonien semi-classique. On peut réécrire la densité d'état régularisée en terme de la trace $\chi(\hat{H})U(t)$ où $U(t) = e^{-it\hat{H}/h}$ est le propagateur quantique. On obtient la formule fondamentale suivante :

$$(40) \quad \tilde{D}_h(E) = \frac{1}{2\pi h} \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(t) e^{\frac{i}{h} Et} \text{Tr}(\chi(\hat{H})U(t)) dt .$$

L'expression de cette densité nécessite la connaissance de $U(t)$ sur l'intervalle compact $\text{Support}(\hat{\rho})$. Si on veut une analyse du spectre dans des intervalles de largeur $h\alpha$, il est donc nécessaire de connaître le propagateur $U(t)$ sur des intervalles de l'ordre de $T = 1/\alpha$. Si $\alpha \rightarrow 0$, ces intervalles tendent vers l'infini. Le *temps de Heisenberg* correspond à $\alpha = 1/h^{n-1}$ qui permet une analyse à une échelle h^n qui est l'écart moyen des valeurs propres. Une analyse semi-classique de $U(t)$ dans des intervalles de cette taille ferait des formules de traces une méthode susceptible de calculer les valeurs propres individuelles.

2.5. La démarche. On veut analyser le comportement asymptotique de $\tilde{D}_h(E)$; pour cela, on part de la formule (40). Il faut ainsi :

- (1) Décrire le propagateur semi-classique $U(t)$ qui est un OIF associé au flot hamiltonien à l'instant t .
- (2) Calculer la trace de $\chi(\hat{H})U(t)$.
- (3) Revenir à la densité d'état par une transformée de Fourier inverse.

Il se trouve que ce programme est plus aisé à compléter dans le cas d'un hamiltonien associé à un lagrangien régulier : en effet on a alors une fonction génératrice simple pour le flot à l'instant t si t est petit. En particulier, dans ce cas, on reste beaucoup plus proche de l'intuition initiale de Gutzwiller : utiliser l'intégrale de Feynman. Cela couvre par exemple le cas du laplacien riemannien. Le cas de l'équation des ondes (racine carrée du laplacien) ne se prête pas à cette approche, mais on peut se ramener au cas précédent de façon simple (voir la section 14).

La première étape ne nécessite aucune hypothèse de transversalité ; il n'en est pas de même pour la seconde si on veut obtenir des formules explicites, car cela dépend alors de la formule de la phase stationnaire. Une hypothèse simple qui couvre déjà de nombreux cas intéressants est une hypothèse de type Morse-Bott. La 3ème étape ne pose pas de problème particulier.

2.6. Problèmes. Voici quelques problèmes ouverts :

- Extension aux systèmes (opérateurs sur les sections d'un fibré) génériques, c'est-à-dire lorsque le symbole principal a des valeurs propres multiples de façon générique (voir [CLP99]). Une telle extension serait souhaitable en vue de l'étude des systèmes moléculaires gouvernés par l'approximation de Born-Oppenheimer.
- Problèmes de resommation et trajectoires complexes ; voir à ce sujet l'exposé de André Voros [Vor93] au colloque en l'honneur de Malgrange. Dans quelle mesure les formules de traces ont-elles des propriétés analytiques suffisantes pour contenir l'information complète sur les spectre, autrement dit sont-elles potentiellement aussi intéressantes pour connaître le spectre que les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld ?
- Etude des bifurcations des formules de traces associées aux bifurcations classiques génériques de trajectoires périodiques ou à la destruction de la complète intégrabilité.
- Lien entre formules de traces pour des familles d'opérateurs et multiplicités. En particulier quel est le statut des asymptotiques suggérées dans [BW84] ?

3. Traces

Pour cette section, on pourra consulter [RS80]. Un endomorphisme T d'un espace de Banach B est dit à *trace* s'il s'écrit sous la forme

$$(\star) \quad T = \sum_i L_i \otimes e_i ,$$

où les L_i sont des formes linéaires continues et $\sum \|L_i\| \|e_i\| < +\infty$. La norme trace de T , notée $\|T\|_1$ est alors définie par le inf des $\sum \|L_i\| \|e_i\|$ pour lesquels une telle représentation est possible. Il est clair que $\|T\| \leq \|T\|_1$ et qu'un opérateur à trace est limite uniforme d'opérateurs de rang fini et donc compact.

On a alors le :

LEMME 12. *Si T est à trace, la somme*

$$\sum L_i(e_i)$$

est indépendante de la représentation (\star) choisie.

La trace de T est alors définie par

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_i L_i(e_i) .$$

Preuve. –

On le prouve d'abord pour les opérateurs de rang fini. On peut le faire algébriquement : on identifie d'abord les opérateurs continus de rang fini à $B^* \otimes B$ et ainsi l'application bilinéaire

$$t(e^*, f) = e^*(f)$$

se prolonge naturellement en la trace des opérateurs continus de rang fini qui est donnée par la formule du lemme. Maintenant, il suffit de remarquer la densité des opérateurs de rang fini dans les opérateurs à trace pour la norme $\|\cdot\|_1$ et la continuité uniforme de la trace des opérateurs de rang fini.

□

Dans le cas des opérateurs à noyau, on peut calculer la trace par intégration sur la diagonale sous les hypothèses suivantes :

PROPOSITION 28. *Si T est un opérateur à noyau C^∞ sur une variété compacte X , ie de la forme*

$$Tu(x) = \int_X K_T(x, y)u(y)dy,$$

avec $K_T \in C^\infty(X \times X)$, alors T est à trace dans n'importe quel Banach comparable aux $C^k(X)$ et sa trace vaut

$$\mathrm{Tr}(T) = \int_X K_T(x, x)dx .$$

Preuve. –

Introduire un laplacien et écrire $K(x, y) = \sum a_{m,n} \varphi_m(x) \varphi_n(y)$ où les φ_n sont une b.o. de fonctions propres. Les opérateurs $\varphi_m(x) \otimes \varphi_n(y)$ sont de rang 1, et la norme de φ_n est à croissance polynomiale alors que la suite $a_{m,n}$ est à décroissance rapide.

□

Maintenant, si T est normal et à trace, et de noyau C^∞ , on a, en désignant par E_j les valeurs propres de T :

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_j E_j = \int_X K_T(x, x)dx .$$

Attention, qu'un opérateur peut avoir un noyau continu et ne pas être à trace : prendre la convolution sur le cercle par une fonction continue dont la série de Fourier n'est pas absolument convergente.

Déterminants : si T est à trace, $\mathrm{Id} + T$ a un déterminant. En particulier, si $T_2 \circ T_1^{-1} = \mathrm{Id} + K$ où K est à trace, on peut définir le déterminant relatif.

4. Exemples

4.1. Cas du cercle. On prend $\hat{H} = D = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ sur le cercle $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$. Le spectre de D est formé des $E_k = \frac{2\pi}{T}k$, $k \in \mathbb{Z}$, les fonctions propres étant les exponentielles : $e_k(x) = e^{i\frac{2\pi k}{T}x}$. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a donc :

$$\mathrm{Tr}(f(D)) = \sum_k f\left(\frac{2\pi k}{T}\right).$$

On peut calculer grâce à une transformée de Fourier, le noyau K_f de $f(D)$; il vaut

$$K_f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(y - x + nT),$$

avec $\hat{f}(u) = \int e^{-itu} f(t) dt$. On en déduit :

$$\sum_k f\left(\frac{2\pi k}{T}\right) = \frac{T}{2\pi} \sum \hat{f}(nT),$$

où l'on reconnaît la formule sommatoire de Poisson. On peut ainsi écrire la densité régularisée des valeurs propres $2\pi h n/T$ de $\frac{h}{i} \frac{d}{dx}$, $\tilde{D}_h(E)$ sous la forme :

$$\tilde{D}_h(E) = \sum \rho_h(E - 2\pi h n/T) = \frac{T}{2\pi h} \sum_k \hat{\rho}(kT) e^{iEkT/h},$$

avec $\rho_h(u) = 1/h \rho(u/h)$ où $\hat{\rho} \in C_o^\infty$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt = 1$, que l'on peut décomposer en une partie polynomiale et une partie oscillante :

$$\sum_n \rho_h(E - E_n) = T_{W,E}(h) + T_{osc,E}(h),$$

avec $T_{W,E}(h) = \frac{T}{2\pi h}$ (terme de Weyl) et l'autre terme purement oscillant que l'on peut réinterpréter comme somme sur les trajectoires périodiques d'énergie E pour l'hamiltonien $H_0(x, \xi) = \xi$.

4.2. L'oscillateur harmonique. Ici

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right).$$

Les valeurs propres sont les $E_j(h) = (j + \frac{1}{2})h$, $j \in \mathbb{N}$. La densité régularisée des valeurs propres est donc

$$D_h(E) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{h} \rho\left(\frac{E}{h} - \left(j + \frac{1}{2}\right)\right),$$

que l'on peut évaluer lorsque $E > 0$ par la formule de Poisson, en effet la contribution des termes avec $j < 0$ est exponentiellement petite (en $1/h$). On obtient ainsi :

$$\tilde{D}_h(E) = \frac{1}{h} + \frac{1}{h} \sum_{k \neq 0} (-1)^k \hat{\rho}(2\pi k) e^{\frac{2\pi i k E}{h}} + O(e^{-c/h}),$$

que l'on interprète comme la somme d'un terme polynomial et de termes oscillants associés aux trajectoires périodiques de périodes $2\pi k$. Le facteur $(-1)^k$ reflète l'indice de Morse des trajectoires périodiques.

5. La formule de trace de Selberg

5.1. Géométrie. On part du demi-plan de Poincaré : $P = \{z = x + iy \in \mathbb{C} | y > 0\}$ avec $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$, métrique de courbure constante -1 . Les géodésiques de P sont les demi-droites verticales et les demi-cercles orthogonaux à l'axe des x . Le groupe $G = PSL_2(\mathbb{R})$ opère par homographies sur P , il en est le groupe des isométries directes. On peut en fait identifier le fibré tangent unitaire de P à G en remarquant que ce fibré est une orbite principale de l'action naturelle de G sur le fibré tangent. La distance riemannienne d a l'expression suivante :

$$d(z, z') = \arg \cosh\left(1 + \frac{|z - z'|^2}{2yy'}\right).$$

On considère une surface compacte X sans bord de genre $m \geq 2$ munie d'une métrique riemannienne g à courbure constante -1 . Il existe beaucoup de telles métriques, on peut les obtenir par recollement de blocs appelés pantalons.

Localement leur géométrie est celle de P . En fait leur revêtement riemannien universel est le demi-plan P . On peut donc voir (X, g) comme un quotient P/Γ où Γ est un sous-groupe discret du groupe des isométries de P , $PSL_2(\mathbb{R})$ opérant par $Tz = \frac{az+b}{cz+d}$. L'aire de (X, g) est donnée par Gauss-Bonnet et vaut

$$\text{Aire}(X, g) = 4\pi(m - 1).$$

Une telle surface a beaucoup de géodésiques périodiques : si $\gamma \in \Gamma \setminus Id$, il existe une unique géodésique A_γ de P , l'axe de γ qui est translatée par γ ; c'est aussi le lieu des minimas du déplacement $d(x, \gamma x)$. La projection de A_γ sur X est une géodésique périodique de X et on les obtient toutes ainsi. A_γ et $A_{\gamma'}$ ont la même projection si et seulement si γ et γ' sont conjugués dans Γ . L'élément δ qui les conjugue envoie A_γ sur $A_{\gamma'}$. On a ainsi une bijection entre les géodésiques périodiques de X et les classes de conjugaison non triviales de Γ . On peut facilement calculer la longueur de la géodésique périodique associée à γ en fonction de la matrice de γ . En effet, par conjugaison dans $PSL_2(\mathbb{R})$, on se ramène au cas où γ est une homothétie de centre 0 et de rapport $N(\gamma)$ où $N(\gamma)$, la *norme* de γ , est le carré de la valeur propre > 1 de γ , qui est la solution > 1 de $N + \frac{1}{N} = \text{Tr}(\gamma)^2 - 2$. On a ainsi que la longueur de la géodésique périodique associée à γ est $\log(N(\gamma))$. On peut aussi voir que l'application de Poincaré de cette géodésique a pour valeurs propres $N(\gamma)$ et $1/N(\gamma)$.

5.2. Dynamique. Les quotients P/Γ sont considérés depuis longtemps comme des modèles de systèmes dynamiques très instables, ou *chaotiques* comme on dit maintenant. En effet, le flot géodésique de ces variétés vu comme système dynamique sur le fibré unitaire cotangent munie de la mesure de Liouville est *ergodique*, *mélangeant*, et a la propriété d'*Anosov*.

L'ergodicité par exemple peut se voir de façon simple à partir du théorème de Birkhoff. A tout couple $(\alpha, \omega) \in S^1 \times S^1$ de points à l'infini de P , on associe une géodésique de P et donc de X . Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue, et $\Omega = \{(\alpha, \omega) | f_+(\omega) = f_-(\alpha)\}$ où $f_\pm(c) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} 1/t \int_0^t f(c(t))dt$. Alors le th. de Birkhoff affirme que le complémentaire de Ω est de mesure nulle. On introduit alors $F : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ la valeur commune de ces limites sur la géodésique joignant α à ω . Alors, sur Ω , $F(\alpha, \omega) = F(\alpha, \omega')$ et $F(\alpha, \omega) = F(\alpha', \omega)$. On en déduit que F est presque partout constante.

5.3. Ecriture de la formule de traces. On suppose f analytique dans $|\operatorname{Im} r| \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$ et à décroissance $O(|r|^{-(2+\varepsilon)})$ dans cette bande. On écrit $\lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2$. La somme sur γ est une somme sur les géodésiques fermées.

$$\sum_n f(\pm r_n) = \frac{\operatorname{aire}(X)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} r \operatorname{th}(\pi r) f(r) dr + \frac{1}{2\pi} \sum_{[\gamma]} \frac{T_{o,\gamma}}{|\det(\operatorname{Id} - P_\gamma)|^{\frac{1}{2}}} \operatorname{Re}(\hat{f})(T_\gamma) .$$

Ici, la somme porte sur les géodésiques périodiques ou classes de conjugaison non triviales. T_γ est la période ou longueur (vitesse 1), $T_{o,\gamma}$ la période primitive, P_γ l'application de Poincaré et donc $|\det(\operatorname{Id} - P_\gamma)|^{1/2} = N(\gamma)^{1/2} - N(\gamma)^{-1/2}$. Les propriétés de f assure la convergence absolue des sommes de droites et de gauche. Pour la somme sur les géodésiques périodiques : on a

$$\#\{[\gamma] | T_\gamma \leq x\} = O(e^x) ,$$

$$N(\gamma) \sim e^{T_\gamma}, \quad \hat{f}(t) = O(e^{-t(1/2+\varepsilon)}) .$$

Ces estimations assurent la convergence.

On peut évaluer la densité régularisée

$$\tilde{D}_h(E) = \sum_n \rho_h(E \pm hr_n) ,$$

au moyen de cette formule et on trouve :

$$\tilde{D}_h(E) = T_{W,E}(h) + T_{Osc,E}(h) ,$$

avec

$$T_{W,E}(h) = \frac{\operatorname{aire}(X)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{E}{h} - r\right) \rho(r) dr ,$$

avec $\Phi(t) = t \operatorname{th}(\pi t)$; et

$$T_{Osc,E}(h) = \frac{1}{2\pi h} \sum_{[\gamma]} \frac{T_{o,\gamma}}{|\det(\operatorname{Id} - P_\gamma)|^{1/2}} \operatorname{Re}(\hat{\rho}(T_\gamma) e^{iT_\gamma E/h}) .$$

5.4. Comment on la prouve ? L'idée est de considérer un opérateur K de la forme :

$$K\varphi(z) = \int_P k(z, z') \varphi(z') dz' ,$$

où le noyau $k = k_\Phi$ est donné par :

$$k(z, z') = \Phi\left(\frac{|z - z'|^2}{yy'}\right) ,$$

avec $\Phi \in C^\infty$ à support compact. On voit que, si φ est Γ -périodique, il en est de même de $K\varphi$. On va alors calculer la trace Tr_Γ de K sur $L^2(P/\Gamma)$ de 2 façons différentes :

a) K est une fonction explicite du laplacien de X , la trace de K est donc une somme sur les valeurs propres de Δ . La relation entre Φ et cette fonction du laplacien s'appelle transformée de Selberg.

b) Le noyau de K sur un domaine fondamental de Γ est

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} k(\gamma z, z') ;$$

on peut donc calculer ainsi la trace :

$$\mathrm{Tr}_\Gamma(K) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{P/\Gamma} k(\gamma z, z) dz .$$

Il s'avère qu'on peut faire les calculs explicites jusqu'au bout.

5.4.1. *La transformée de Selberg.* On a le lemme fondamental suivant :

LEMME 13. *Il existe une fonction $H_\Phi(\lambda)$ telle que si $\Delta\varphi = \lambda\varphi$ est une fonction propre du laplacien dans P , on a :*

$$K_\Phi\varphi = H_\Phi(\lambda)\varphi .$$

Preuve. –

On considère un point z_o . Soit φ_\star la moyenne radiale de φ à partir de z_o . On a évidemment :

$$K\varphi = K\varphi_\star .$$

Donc $K\varphi(z_o) = K\varphi_\star(z_o)$. Maintenant, il suffit de montrer le lemme pour les fonctions radiales, puisque $\varphi(z_o) = \varphi_\star(z_o)$. On remarque que, pour chaque valeur de λ , il y a une unique fonction radiale lisse en z_o et que ces fonctions sont, quand on change de point, translatées les unes des autres.

□

Pour calculer H , il est préférable d'écrire $\lambda = \frac{1}{4} + r^2$ et $H(\Lambda) = h(r)$. On considère alors la fonction $\varphi(z) = y^{\frac{1}{2}+ir}$ qui vérifie $\Delta\varphi = (\frac{1}{4} + r^2)\varphi$. On obtient ainsi :

$$K_\Phi\varphi = h(r)\varphi ,$$

où on passe de Φ à h par la suite de transformations suivantes :

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{\Phi(t)}{\sqrt{t-x}} dt ,$$

$$g(u) = Q(e^u + e^{-u} - 2) ,$$

$$h(r) = \hat{g}(r) .$$

Cette suite de transformations s'inverse bien avec la contrainte que h est paire.

5.4.2. *Le calcul de la trace.* On a ainsi :

$$\frac{1}{2} \sum_n h(\pm r_n) = \sum_\gamma \int_{\mathcal{D}} k_\Phi(z, \gamma z) dz .$$

Pour calculer le membre de droite, on regroupe les γ par classes de conjugaisons dans Γ . Soit $C = \{\gamma_\delta = \delta^{-1}\gamma_o\delta, \delta \in \gamma\}$ une telle classe. On a $\gamma_\delta = \gamma_{\delta'}$ si et seulement si $\delta\delta'^{-1}$ commute avec γ_o . Soit $Z(\gamma_o)$ le commutateur de γ_o . On doit faire varier δ dans $\Gamma/Z(\gamma_o)$. On peut maintenant écrire :

$$\Sigma_{\gamma_o} = \sum_{\gamma \in [\gamma_o]} \int_{\mathcal{D}} k(\gamma z, z) dz = \sum_{\delta \in \Gamma/Z(\gamma_o)} \int_{\mathcal{D}} k(\delta^{-1}\gamma_o\delta z, z) dz ,$$

et par changement de variable, on peut réécrire cette intégrale comme une seule intégrale sur la réunion des translatés $\delta\mathcal{D}$. On obtient ainsi :

$$\Sigma_{\gamma_o} = \int_{\mathcal{D}_{\gamma_o}} k(z, \gamma z) dz ,$$

où \mathcal{D}_{γ_o} est un domaine fondamental de $Z(\gamma_o)$. Il se trouve que cette intégrale est facile à calculer.

Lorsque que $\gamma_o = \text{Id}$, $Z(\gamma_o) = \Gamma$ et on a :

$$\Sigma_{\text{Id}} = \int_{\mathcal{D}} k(z, z) dz .$$

Lorsque que γ_o est une translation hyperbolique, $Z(\gamma_o)$ est le groupe cyclique engendré par une translation $\gamma_1 \in \Gamma$ telle que $\gamma_o = \gamma_1^N$. \mathcal{D}_{γ_o} est alors (isométrique à) une région située entre 2 demi-cercles de centre O . Le calcul ne dépend plus de Γ , mais de la classe de conjugaison de γ_1 dans $PSL_2(\mathbb{R})$ et de N .

5.5. Applications. La principale application géométrique de ce formalisme est dans l'évaluation asymptotique du nombre de points d'une orbite Γz_1 contenus dans une boule de rayon $x \rightarrow \infty$ et de centre z_0 de P . On a aussi une évaluation précise du nombre de géodésiques fermées et du nombre de géodésiques fermées primitives (formule des nombres premiers) ; ce résultat est souvent attribué à Huber, mais sans doute déjà remarqué par Selberg. Ces asymptotiques se montrent par des techniques connues de théorie analytique des nombres (théorèmes Taubériens) en s'appuyant sur la formule de traces de Selberg. En fait, Selberg construit une fonction ζ_X à partir des géodésiques fermées dont il montre que les zéros sont les $1/2 \pm r_n$ et donc l'hypothèse de Riemann est satisfaite pour ζ_X ssi le laplacien n'a pas de petites valeurs propres, ie de valeurs propres λ avec $0 < \lambda < 1/4$.

5.6. Généralisations. Le formalisme précédent est suffisamment robuste pour être généralisable dans plusieurs directions différentes.

Selberg envisageait déjà le cas de quotients d'espaces localement symétriques arbitraires. Les calculs sont évidemment plus délicats en particulier les classes de conjugaison dans le groupe des isométries doivent être décrites avec plusieurs paramètres.

On peut aussi généraliser au cas d'arbres homogènes dont les quotients sont des graphes homogènes.

6. Les trajectoires périodiques

Cette section complète la section 8 du chapitre 1.

6.1. Contexte lagrangien. Soit $\mathcal{L} : TX \rightarrow \mathbb{R}$ un lagrangien C^∞ et régulier (i.e. la transformée de Legendre est un difféomorphisme global de TX sur T^*X).

DÉFINITION 52. *Le lagrangien régulier \mathcal{L} sera dit propre si sa transformée de Legendre, l'hamiltonien H_0 , est propre et minoré de T^*X dans \mathbb{R} .*

On notera $\hat{\gamma}(s)$ la transformée de Legendre de $(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))$. Par exemple, si X est une variété riemannienne, $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \|\dot{x}\|^2 - V(x)$ est propre si et seulement si $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$.

On aura besoin du :

THÉORÈME 65. *Soit \mathcal{L} un lagrangien propre sur une variété X et E_0 fixé. Pour $\tau > 0$, soit $U_\tau \subset X \times X$ l'ensemble des couples de points $(x, y) \in X \times X$ tels qu'il existe une courbe $\gamma : [0, \tau] \rightarrow X$ avec $\gamma(0) = y$, $\gamma(\tau) = x$ et $\forall s \in [0, \tau]$, $H_0(\hat{\gamma}(s)) < E_0$. On pose $J_\tau(\gamma) = \int_0^\tau \mathcal{L}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds$. Alors $\sup_{(x, y) \in U_\tau} d(x, y) = O(\tau)$ et l'application $\Phi_\tau : (y, \dot{y}) \rightarrow (y, x)$ qui, à $(y, \dot{y}) \in TX$, associe $(y, \gamma(\tau))$ où γ est l'extrémale de données de Cauchy (y, \dot{y}) , est, pour τ assez petit, un difféomorphisme*

d'un ouvert Ω_τ de TX sur U_τ . Si φ_τ est le flot de l'hamiltonien H_0 et $S_\tau(x, y)$ est définie sur U_τ par $S_\tau(x, y) = J_\tau(\gamma)$ où γ est l'unique extrémale définie sur $[0, \tau]$ vérifiant $\gamma(0) = y$, $\gamma(\tau) = x$ et $H_0(\dot{\gamma}(s)) < E_0$, S_τ est une fonction génératrice de $\varphi_\tau : \{H_0 < E_0\} \rightarrow \{H_0 < E_0\}$. On a donc :

$$\varphi_\tau(y, -\frac{\partial S_\tau}{\partial y}) = (x, \frac{\partial S_\tau}{\partial x}) .$$

Preuve. –

Comme $\hat{\gamma}(s)$ reste borné et que la transformée de Legendre est régulière, $\|\dot{\gamma}(s)\|$ est majoré uniformément pour les extrémales considérées. On en déduit que $d(x, y) \leq |\int_0^\tau \|\dot{\gamma}(s)\| ds| = O(\tau)$. On peut donc introduire des coordonnées locales près d'un point x_0 de X . On pose $L_\tau(y, x) = (y, y + \frac{x-y}{\tau})$, $L_\tau \circ \Phi_\tau(y, \dot{y}) = (y, x + y + O(\tau))$ et il suffit d'appliquer le théorème d'inversion locale. S_τ est une fonction génératrice, car, si γ est une extrémale

$$\delta J_\tau = [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}(u, \dot{u}) \delta u]_{u=\gamma(0)}^{u=\gamma(\tau)} ,$$

ce qui donne :

$$\delta S_\tau = -\eta \delta y + \xi \delta x$$

avec $(x, \xi) = \varphi_\tau(y, \eta)$.

□

EXEMPLE 6.1. Si X est une variété riemannienne compacte, on a le lagrangien propre et régulier $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \|\dot{x}\|^2$ où $\|\cdot\|$ est la norme riemannienne. On a alors :

$$S_\tau(x, y) = \frac{1}{2} \frac{d^2(x, y)}{\tau}$$

et

$$\Phi_\tau(x, \dot{x}) = \exp_x(\tau \dot{x})$$

où \exp_x est l'exponentielle riemannienne. Si $\rho > 0$ est le rayon d'injectivité de X , on peut prendre $\tau = \rho/\sqrt{2E_0}$ et U_τ est l'ensemble des couples de points qui sont à distance $< \rho$.

6.2. Actions. Dans ce §, on considère un hamiltonien classique H_0 sur une variété symplectique (Z, ω) . On note $\varphi_t : Z \rightarrow Z$ le flot hamiltonien associé à H_0 qui s'obtient en intégrant le champ de vecteur \mathcal{X} caractérisé par

$$\omega(\mathcal{X}, V) = -dH_0(V) ,$$

(voir le chapitre 1).

Soit $z_0 \in Z$ tel que $\varphi_{T_0}(z_0) = z_0$ avec $T_0 \neq 0$. On désigne par γ_0 l'orbite (périodique) de z_0 et on pose $E_0 = H_0(z_0)$. On note P_{γ_0} l'application de Poincaré de γ_0 (voir 4.4 du chapitre 1), P'_{γ_0} sa différentielle. De même, on note $\Pi_{\gamma_0} = \varphi_{T_0}$ et Π'_{γ_0} sa différentielle.

On associe à la trajectoire périodique 2 actions :

DÉFINITION 53. Soit z_0 tel que $\varphi_{T_0}(z_0) = z_0$ et γ_0 l'orbite de période T_0 et d'énergie E_0 associée. On définit les actions A_E et A_T par :

$$(41) \quad A_E(\gamma_0) = \int_{\gamma_0} \xi dx, \quad A_T(\gamma_0) = \int_{\gamma_0} \xi dx - H_0 dt .$$

Dans le cas d'un lagrangien régulier, $A_T(\gamma_0) = \int_0^{T_0} \mathcal{L}(x(s), \dot{x}(s)) ds$.

PROPOSITION 29. *Supposons qu'il existe $z(E)$ tel que $\varphi_{T(E)}(z(E)) = z(E)$ on a :*

$$\frac{dA_E}{dE} = T(E)$$

Preuve.—

Soit $F(t, E) = \varphi_t(z(E))$ où l'on suppose que $dH_0(z(E)) = 1$. On a :

$$A_E(E_1) - A_E(E_0) = - \int_R F^*(\omega)$$

où $R = \{(t, E) \mid E_0 \leq E \leq E_1, 0 \leq t \leq T(E)\}$. Et donc

$$A_E(E_1) - A_E(E_0) = \int_{E_0}^{E_1} T(E) dE$$

□

COROLLAIRE 7. *Sous les hypothèses précédentes et si $dT(E)/dE \neq 0$, on a :*

$$\frac{dA_T}{dT} = -E$$

Au signe près les 2 actions sont transformées de Legendre l'une de l'autre.

En effet, $A_E - A_T = ET$.

6.3. Cas d'un difféomorphisme canonique. Soit (Z, ω) une variété symplectique exacte (il existe α telle que $d\alpha = \omega$). Soit $\chi : Z \rightarrow Z$ un difféomorphisme canonique et z_0 tel que $\chi^N(z_0) = z_0$.

DÉFINITION 54. *On dira que z_0 est un point périodique non dégénéré au sens de Bott si c'est un point fixe transverse au sens de Bott de χ^N .*

Supposons que $\chi^*(\alpha) - \alpha$ qui est fermée soit exacte et écrivons : $\chi^*(\alpha) - \alpha = dS$. S sera appelée fonction génératrice de χ .

DÉFINITION 55. *La somme $\sum_{j=0}^{N-1} S(\chi^j(z_0))$ s'appelle l'action de l'orbite périodique.*

Voir [MM82]. Si $Z = T^*X$, $\alpha = \xi dx$ et que l'application $(x, \xi) \rightarrow (x, p_X(\chi(x, \xi)))$ est un difféo. local, S peut s'écrire comme une fonction de x et y qui est une fonction génératrice au sens usuel.

6.4. Transversalité de Bott et variétés critiques non dégénérées.

DÉFINITION 56. *Deux sous-variétés Y et Z de X se coupent transversalement au sens de Bott si leur intersection est une sous-variété W de X et que, $\forall w \in W$, on a :*

$$T_w W = T_w Y \cap T_w Z .$$

DÉFINITION 57. *Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et W une sous-variété critique (i.e. $\forall w \in W, f'(w) = 0$), on dit que W est une variété critique non dégénérée (ND) si $\forall w \in W$, la hessienne de f est une forme quadratique non dégénérée sur le fibré normal $N_w W = T_w X / T_w W$.*

Le lien entre les 2 notions est très simple :

PROPOSITION 30. *Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $L_f \subset T^*X$ la graphe de sa différentielle. W est une variété critique ND de f si et seulement si L_f et la section nulle de T^*X se coupent transversalement au sens de Bott le long de $W \times \{0\}$.*

Il y a donc un lien entre l'intersection transversale au sens de Bott de 2 variétés lagrangiennes et la notion de variété critique ND (voir [Wei73a]). Les 2 situations sont même localement isomorphe car si L_1 et L_2 sont lagrangiennes et se coupent en w , on peut trouver des coordonnées canoniques qui ramène L_1 à L_f et L_2 à la section nulle.

On a aussi une théorie des perturbations très simple pour les variétés critiques ND et par suite pour les intersections lagrangiennes.

6.5. Les hypothèses de non dégénérescence. On définit maintenant 3 hypothèses de non dégénérescence de γ_0 qui vont jouer un rôle important dans la formule des traces en permettant l'application de la formule de la phase stationnaire (voir la section 3.2 du chapitre 3).

DÉFINITION 58. • **(NDE)** *L'application P'_{γ_0} n'admet pas 1 comme valeur propre.*

- **(NDT)** *On a $\ker(\text{Id} - \Pi'_{\gamma_0}) = \mathbb{R}\mathcal{X}(z_0)$*
- **(Bott)** *Les sous-variétés $\Gamma = \{(z, \varphi_t(z), t, H_0(z))\}$ (lagrangienne) et $\Delta = \{(z, z, t, \tau)\}$ (co-isotrope) de $Z \times Z \times T^*\mathbb{R}$ se coupent transversalement au sens de Bott près de z_0 suivant une variété C de dimension $\nu + 1$, $\nu \geq 1$ (voir à ce sujet la section 7 du chapitre 1)*

On associe à $z \in C$, la trajectoire périodique γ issue de z de période $T(z)$. On note \tilde{C} l'ensemble de ces trajectoires.

THÉORÈME 66. *Sous l'une quelconque des 3 hypothèses, l'ensemble*

$$\Sigma_C = \{(T(\gamma), H_0(\gamma)), \gamma \in \tilde{C}\}$$

est une courbe lisse près de (T_0, E_0) .

- *Les hypothèses **(NDE)** ou **(NDT)** implique **(Bott)** avec $\nu = 1$.*
- *Les hypothèses **(Bott)** avec $\nu = 1$ et $\frac{dT}{dE} \neq 0$ impliquent **(NDT)**.*
- *Les hypothèses **(Bott)** avec $\nu = 1$ et $\frac{dE}{dT} \neq 0$ impliquent **(NDE)**.*
- *Les hypothèses **(NDE)** et $\frac{dT}{dE} \neq 0$ impliquent **(NDT)**.*
- *Les hypothèses **(NDT)** et $\frac{dE}{dT} \neq 0$ impliquent **(NDE)**.*

Preuve.—

- Supposons que **(NDE)** soit satisfaite. Lorsque E varie, l'application de Poincaré varie de façon lisse et continue donc à avoir un point fixe non dégénéré. Soit $z(E)$ un tel point fixe dépendant de façon lisse de E , on a : $\varphi_{T(E)}(z(E)) = z(E)$. Le cylindre $C = \{\varphi_t(z(E))\}$ est invariant par la dynamique. Soit $\mathcal{Y}_0 = \dot{z}(E_0)$, le plan tangent à C en z_0 est engendré par \mathcal{X}_0 et \mathcal{Y}_0 . On a : $dH_0(\mathcal{Y}_0) = 1 = -\omega(\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0)$. De plus $\Pi'_0(\mathcal{Y}_0) = \mathcal{Y}_0 + a\mathcal{X}_0$. Il est clair que $a = -T'(E_0)$. L'application symplectique Π'_{γ_0} laisse invariant le plan symplectique $Q = T_{z_0}C$ et par suite l'orthogonal symplectique de Q que l'on peut prendre comme plan tangent à une section de Poincaré. On en déduit que

$\ker(\Pi'_{\gamma_0} - \text{Id}) = \mathbb{R}\mathcal{X}_0$ si et seulement si $a \neq 0$. On vérifie bien sûr que la 2-variété $W = \{(\varphi_t(z(E)), \varphi_{t+T(E)}(z(E)), T(E), H_0(z(E)))\}$ est l'intersection transverse au sens de Bott de Γ et de Δ .

- Supposons maintenant que **(NDT)** soit satisfaite. Soit Σ une hypersurface de Z transverse à \mathcal{X}_0 en z_0 et \mathcal{Y}_0 un vecteur de $T_{z_0}\Sigma$ tel que $\Pi'_{\gamma_0}(\mathcal{Y}_0) = \mathcal{Y}_0 + \mathcal{X}_0$. L'existence de \mathcal{Y}_0 provient de l'hypothèse **(NDT)** et de la forme du bloc de Jordan de Π'_{γ_0} associé à la valeur propre 1 (de multiplicité algébrique ≥ 2). Dans le cas où $\mathcal{Y}_0 \notin T_{z_0}H_0^{-1}(E)$, on a $\omega(\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0) \neq 0$ et on est dans le cas **(NDE)** avec $dE/dT \neq 0$.

Dans le cas contraire, il suffit montrer l'existence d'une courbe lisse $z(T)$ (T voisin de T_0) telle que $\varphi_T(z(T)) = z(T)$ tracée dans Σ . On suppose (ce qui est vrai au voisinage de γ_0) que $Z = T^*X$ et $\dot{x}(0) \neq 0$. On note Y une hypersurface de X transverse à $v_0 = \dot{x}(0)$ en $x(0)$.

Le plus simple est de considérer une fonction génératrice $\psi_T(x, y, \theta)$ de la transformation φ_T pour T voisin de T_0 et z voisin de z_0 . L'hypothèse **(NDT)** implique que $\psi_{T_0}(x, x, \theta)$ admet une variété critique non dégénérée au sens de Bott de dimension 1 dont l'image par $(x, x, \theta) \rightarrow (x, \partial_x \psi)$ est la courbe γ_0 . Lorsqu'on restreint x à Σ on obtient un point critique non dégénéré, qui est stable par petite perturbation de T . Il reste à vérifier que ce point critique de $\psi_T(u, u, \theta)$, $u \in Y$ donne lieu à une orbite de période T de φ_t . La condition de criticité implique que, si $(u_0, \xi_T) = \varphi_T(u_0, \xi_0)$, on a $(\xi_T - \xi_0)|_{T_{u_0}S} = 0$. De $v_0 = \partial H_0 / \partial \xi$, on déduit par les fonctions implicites l'égalité de ces covecteurs sur v_0 .

□

COROLLAIRE 8. *Sous l'hypothèse **(NDE)**, si $T_{z_0}(T^*X) = F \oplus G$ est une décomposition symplectiquement orthogonale où F admet $(\mathcal{Y}_0, \mathcal{X}_0)$ comme base et G est tangent à une section de Poincaré convenable de γ , la matrice de Π' est donnée par :*

$$(42) \quad (\Pi'_{\gamma_0}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{dT}{dE} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (P'_{\gamma_0}) \end{pmatrix}.$$

Sous l'une quelconque des 3 hypothèses, l'image de la famille d'orbites périodiques proches de γ par l'application $z \rightarrow (T, E) \in T^*\mathbb{R}$ est une courbe lisse immergée Σ_C .

LEMME 14. *Les composantes lisses de Σ_C sont exactes : si une composante est un cercle immergé, il est d'aire algébrique nulle.*

Il suffit de remarquer que $dA_E = TdE$.

6.6. La non dégénérescence dans le cas complètement intégrable. Le cas complètement intégrable est également intéressant. Supposons qu'on ait choisi des coordonnées actions-angles ie $Z = T^*(\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n)$ et $H_0 = H_0(\xi)$. Le point (x_0, ξ_0) a une orbite périodique si et seulement si, en posant $\omega = (\omega_j(\xi_0))$ avec $\omega_j(\xi_0) = \partial H_0 / \partial \xi_j(\xi_0)$, on a $\omega(\xi_0) \in \mathbb{R}\mathbb{Z}^n$. Il y a dans ce cas 2 façons d'écrire une hypothèse

de non dégénérescence analogues à celles vues plus haut : soit **(NDTCI)** $\xi \rightarrow \omega(\xi)$ est un difféomorphisme local de \mathbb{R}^n , soit **(NDECI)** l'application $\xi \rightarrow [\omega(\xi)]$ de $\{H_0 = E_0\}$ dans le projectif $P^{n-1}(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme local. Ces hypothèses sont aussi celles du théorème KAM (voir [Arn78] appendice 8).

7. Formule de traces semi-classique pour un OIF (I)

7.1. Enoncé. On fait les hypothèses suivantes :

- (1) $S(x, y) \in C^\infty(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $X \times X$. Les applications $(x, y) \rightarrow (y, -\frac{\partial S}{\partial y})$ et $(x, y) \rightarrow (x, \frac{\partial S}{\partial x})$ sont des difféomorphismes de Ω sur des ouverts Ω' et Ω'' de T^*X . On note $Exp : \Omega'' \rightarrow X \times X$ l'inverse de la seconde. On définit $\theta(x, y) \in C^\infty(\Omega)$ par $Exp^*(\theta^{-1}|dxdy|) = |dz|$ où $|dz|$ est la mesure de Liouville sur T^*X . On note $\chi : \Omega' \rightarrow \Omega''$ la transformation canonique associée.

EXEMPLE 7.1. Si X est une variété riemannienne de rayon d'injectivité $\rho > 0$ et qu'on pose $\Omega = \{(x, y) | d(x, y) < \rho\}$ et $S(x, y) = \frac{1}{2}d^2(x, y)$, $Exp(x, \xi) = (x, \exp_x(\xi))$ où \exp_x est l'exponentielle riemannienne au point x . Dans ce cas $\Omega' = \Omega'' = \{(x, \xi) | \|\xi\| < \rho\}$ et χ est le flot géodésique au temps 1.

- (2) On définit $\hat{U} : C_0^\infty(X) \rightarrow C_0^\infty(X)$ par

$$\hat{U}f(x) = \int^\star e^{\frac{i}{h}S(x, y)} a(x, y) f(y) |dy|$$

avec $a \in C_0^\infty(\Omega)$.

- (3) On se donne $N \in \mathbb{N}$ et on suppose que les points $z \in \Omega'$ dont tous les itérés sont dans Ω' et qui sont de période N pour χ sont non dégénérés au sens de Bott et forment donc des sous-variétés connexes W_j de $\Omega' \cap \Omega''$ de dimension ν_j .
- (4) On pose $b(z) = (a(x, y)\theta^{1/2}(x, y)) \circ Exp$.

On a alors :

THÉORÈME 67. On pose $Z_N(h) = \text{Tr}(\hat{U}^N)$. Sous les hypothèses 1 et 2, s'il n'y a aucune trajectoire de période N de χ telles que toutes les paires (x_i, x_{i+1}) soient dans le support de a , $Z_N(h) = O(h^\infty)$.

Sous les hypothèses 1, 2, 3 et 4, $Z_N(h)$ admet un développement asymptotique en puissance de h de la forme $Z_N(h) = \sum_j Z_{W_j}(h)$ où le d.a. de Z_{W_j} est donné par :

$$(43) \quad Z_{W_j} = e^{\frac{i}{h}S_N(W_j) - im_j \frac{\pi}{2}} \left(\int_{W_j}^\star B(z) d\mu(z) + b_{1,j} h^{1-\nu_j/2} + \dots \right),$$

avec

- $S_N(W_j) = \sum_{l=0}^{N-1} S(x_l, x_{l+1})$ où $(x_0, x_1, \dots, x_N = x_0)$ est la projection sur X d'une trajectoire périodique de W_j .
- m_j est l'indice de Morse d'une trajectoire de W_j comme point critique de $\sum_{i=0}^N S(x_i, x_{i+1})$ sur X^N .
- $B(z) = \prod b(z_i)$ avec $z_0 = z$, $z_1 = \chi(z), \dots$.
- $d\mu(z)$ est la mesure canonique sur W_j vue comme variété de points fixes de χ^N .

7.2. Preuve. Soit n la dimension de X et

$$K_1(x, y) = (2\pi i h)^{-n/2} e^{\frac{i}{h} S(x, y)} a(x, y) .$$

Le noyau $K_N(x, y) |dx dy|^{\frac{1}{2}}$ de \hat{U}^N est donné par :

$$K_N(x, y) = \int_{X^{N-1}} K_1(x, x_{N-1}) \cdots K_1(x_1, y) |dx_{N-1} \cdots dx_1| .$$

Ce noyau étant C_o^∞ sur $X \times X$, la trace s'obtient par intégration sur la diagonale :

$$Z_N(h) = \int_{X^N} K_1(x_0, x_{N-1}) \cdots K_1(x_1, x_0) |dx_{N-1} \cdots dx_0| ,$$

ou encore

$$Z_N(h) = \int_{X^N}^* e^{\frac{i}{h} S_N(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})} A_N(x_0, \dots, x_{N-1}) |dx_0 \cdots dx_{N-1}| ,$$

avec

$$S_N(x_0, \dots, x_{N-1}) = S(x_0, x_{N-1}) + \cdots + S(x_1, x_0) ,$$

et

$$A_N(x_0, \dots, x_{N-1}) = a(x_0, x_{N-1}) \cdots a(x_1, x_0) .$$

On souhaite appliquer la phase stationnaire pour évaluer cette intégrale.

Posons $z_i = (x_i, \xi_i) = (x_i, \frac{\partial S}{\partial x_i}(x_i, x_{i-1}))$. Alors l'équation $\frac{\partial S_N}{\partial x_i}(x_0, \dots, x_0) = 0$ équivaut à l'équation $z_{i+1} = \chi(z_i)$ avec la convention $(N-1) + 1 = 0$. Donc la suite $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ est un point critique de S_N si et seulement si les points $(z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$ forment une orbite périodique de $\chi : \chi^j(z_0) = z_j$ et $\chi(z_{N-1}) = z_0$. On en déduit la première partie du théorème.

On a maintenant besoin du lemme suivant :

LEMME 15. *Soit $W \subset \Omega' \cap \Omega''$ une variété de point fixes de χ^N . Alors W est une variété de points fixes non dégénérés au sens de Bott si et seulement si la sous-variété \tilde{W} de X^N formée des suites $(x_0 = p(z_0), \dots, x_{N-1} = p(z_{N-1}))$ avec $z_i \chi^i(z_0)$ et $z_0 \in W$ est une sous-variété critique non dégénérée au sens de Bott de S_N .*

Preuve. –

Il suffit d'introduire la bijection entre W et \tilde{W} qui, à z , associe (x_0, \dots, x_{N-1}) tels que, si $z_i = (x_i, \frac{\partial S}{\partial x_i}(x_i, x_{i-1}))$, on ait $z_0 = z, \dots, z_i = \chi(z_{i-1}), \dots$. La condition de Bott sur W signifie que $TW = \ker((\chi^N)' - Id)$, alors que le noyau de $\text{Hess} S_N$ s'identifie au suite (δx_i) tel que $\delta z_i = \chi'(\delta z_{i-1})$. Les 2 hypothèses de non dégénérescence sont donc les mêmes.

□

On peut donc appliquer la phase stationnaire sous l'hypothèse 3.

- *Calcul de l'amplitude :* la transformation \hat{U}^N est un OIF associé à la transformation canonique χ^N , son symbole est $|B(z)| |dz|^{\frac{1}{2}}$. $d\mu$ étant la mesure canonique sur W , le calcul de l'amplitude se déduit du théorème 54 : il suffit de l'appliquer au produit scalaire de $K_N(x, y) |dx dy|^{\frac{1}{2}}$ avec $\delta(x - y) |dx dy|^{\frac{1}{2}}$.
- *Calcul de la phase :* les différentes contributions à la phase sont S_N , l'indice de Morse, l'intégrale \star et l'argument de B . Regroupant l'argument de B avec son module finit la preuve du théorème.

8. Formule de traces semi-classique pour un OIF (II)

Dans la section précédente, on a écrit la formule de traces pour un OIF de la forme \hat{U}^N . On veut traiter le cas plus général d'un OIF compactement supporté associé à une transformation canonique χ . La formule est la même (équation (43)), mais l'indice de Morse doit être remplacé par un indice de type Maslov.

9. Formule de traces semi-classique pour un hamiltonien

Le contexte général est celui d'un hamiltonien semi-classique \hat{H} de symbole principal H_0 et de symbole sous-principal H_1 . On note φ_t le flot de H_0 . On suppose qu'il existe E_0 tel que, pour tout $E_1 < E_0$, $\{H_0(x, \xi) \leq E_1\}$ est compact. Les exemples sont les suivants :

EXEMPLE 9.1. *Le laplacien riemannien $\hat{H} = \frac{h^2}{2} \Delta$ sur une variété riemannienne compacte de dimension n . On a alors $H_0 = \frac{1}{2} \|\xi\|^2$ et le flot hamiltonien est le flot géodésique.*

EXEMPLE 9.2. *L'opérateur de Schrödinger sur une variété riemannienne $\hat{H} = \frac{h^2}{2} \Delta + V$ avec $\liminf_{x \rightarrow \infty} V(x) = E_0$. On a alors $H_0 = \frac{1}{2} \|\xi\|^2 + V(x)$ et le flot est le flot d'une particule ponctuelle dans le champ électrique V .*

EXEMPLE 9.3. *L'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique sur une variété riemannienne. On a alors :*

$$H_0(x, \xi) = \frac{1}{2} \|\xi - A(x)\|^2 + V(x)$$

où A est le potentiel magnétique si le champ est exact ($B = dA$).

Le but est l'analyse microlocale de $Z_\chi(t) = \text{Tr}(\chi(\hat{H})e^{-it\hat{H}/h})$ dans le cas des flots. Il ne coûte pas plus cher de faire l'analyse microlocale de $Z_{\hat{P}}(t)$ où \hat{P} est un OPD compactement supporté de symbole principal p_0 .

Les énoncés sont plus ou moins fins :

- (1) La description du microsupport,
- (2) Le caractère lagrangien de la fonction de partition,
- (3) le calcul du symbole.

Le 1. ne nécessite aucune hypothèse, alors que le 2. nécessite une hypothèse de non dégénérescence et le 3. est plus délicat.

9.1. Le microsupport de la fonction de partition.

THÉORÈME 68. *Soit*

$$\Sigma_{H_0} = \{(T, E) \in T^*\mathbb{R} \mid \exists z \in T^*X, \varphi_T(z) = z \text{ et } H_0(z) = E\}.$$

Alors $WF(Z_{\hat{P}}) \subset \Sigma_{H_0}$.

Commentaire : il serait intéressant de préciser des hypothèses sous lesquelles on a égalité.

9.2. Le cas non dégénéré.

THÉORÈME 69. *Soit $(T_0, E_0) \in \Sigma_{H_0}$ tel que toutes les orbites périodiques de période T_0 et d'énergie E_0 vérifient l'hypothèse **(Bott)** près de (T_0, E_0) , $Z_{\hat{P}}(t)$ est lagrangienne au voisinage de (T_0, E_0) et somme de contributions $Z_j(t)$ associées aux différentes composantes W_j de la variété de points périodiques. $Z_j(t)$ est d'ordre $-\nu_j/2$ où $\nu_j + 1$ est la dimension de la variété des couples (z, t) tels que $\varphi_t(z) = z$. Plus précisément, si on fait l'hypothèse que (T_0, E_0) n'est pas un point de la T -caustique de W_j , on a près de T_0 :*

$$(44) \quad Z_{\hat{P}}(t) = \sum_j e^{\frac{i}{h} A_T(\gamma_j) - i m_j \frac{\pi}{2}} \int_{W_j}^* e^{i \int_0^t H_1(\varphi_s(z)) ds} p_0(z) d\mu_j(z) + O(h^{1-\nu_j/2}) ,$$

où μ_j est la mesure canonique sur la variété W_j de points fixes de φ_t et m_j est un entier qui dans le cas d'un lagrangien régulier est l'indice de Morse de la trajectoire périodique. Sous forme simplifiée, la contribution de la variété W_j près de T_0 :

$$(45) \quad Z_j(t) = (2\pi i h)^{-\nu_j/2} e^{\frac{i}{h} A_T(\gamma_j) - i m_j \frac{\pi}{2}} a(t) + O(h^{1-\nu_j/2}) ,$$

avec $a(t) > 0$ si p_0 est > 0 sur W_j .

De ce théorème, on déduit un résultat analogue pour la densité d'états régularisée.

THÉORÈME 70. *Si (T_0, E_0) est un point de W_j qui n'est ni dans la E -caustique, ni dans la T -caustique, la contribution $D_{j,h}(E)$ à $D_h(E)$ est donnée par :*

$$(46) \quad D_{j,h}(E) = (2\pi h)^{-\frac{1+\nu_j}{2}} e^{i(1-\nu_j-2(\varepsilon+m_j))\pi/4} \frac{a(T_j(E))}{|dE/dT|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{i}{h} A_E(\gamma)} + O(h^{(1-\nu_j)/2}) ,$$

avec $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = 0$) suivant que $dE/dT > 0$ (resp. $dE/dT < 0$).

Cette expression se prolonge de façon lisse en dehors de la E -caustique. Dans le cas où la E -caustique présente une singularité pli, on a une contribution à la densité d'état qui est donnée en termes d'une fonction d'Airy (voir la section 3 du chapitre 5).

Si $\nu_j = 1$ (le cas générique) et si $p_0 = 1$ sur la trajectoire périodique γ , on a :

$$(47) \quad D_{\gamma,h}(E) = \frac{1}{2\pi h} e^{-i(\varepsilon+m(\gamma))\pi/2} \frac{e^{i \int_{\gamma} H_1 ds}}{|\det(Id - P'_{\gamma})|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{i}{h} A_E(\gamma)} + O(1) ,$$

10. Heuristique de l'intégrale de Feynman

R. Feynman ([FH65]) a trouvé une représentation très géométrique du propagateur, i.e. du noyau $p(t, x, y)$ du groupe unitaire $\exp(-it\hat{H}/h)$ en termes d'une intégrale sur la variété $\Omega_{t,x,y}$ des chemins qui joignent x à y dans le temps t ; si $\mathcal{L}(\gamma, \dot{\gamma})$ est le Lagrangien, on écrit, pour $t > 0$:

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi i h)^{n/2}} \int_{\Omega_{t,x,y}}^* e^{\frac{i}{h} \int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds} |d\gamma| ,$$

où $|d\gamma|$ doit être pensé comme une mesure riemannienne sur la variété $\Omega_{t,x,y}$ munie de la structure riemannienne naturelle donnée par l'intégrale le long d'une courbe paramétrée du produit scalaire de 2 champs de vecteurs. Malgré les efforts de nombreux mathématiciens, une théorie rigoureuse et opératoire de cette intégrale n'a pu être inventée. On peut consulter à ce sujet le livre [AH76]. Les justifications heuristiques, elles, sont abondantes :

– Compatibilité avec la composition :

$$\int_X p(t, x, z) p(t', z, y) dz = p(t + t', x, y) .$$

– Calcul explicite dans certains cas : on a des intégrales de Fresnel et on peut évaluer le déterminant régularisé qui intervient dans son calcul.

Il faut noter que Feynman déduit l'équation de Schrödinger de son intégrale qui est un bon point de départ en mécanique quantique, en particulier du point de vue pédagogique.

Mais la force de l'intégrale de Feynman réside plus dans l'évidence du passage à la limite semi-classique.

10.1. La fonction de partition et l'espace des lacets. Faisons un calcul formel de la fonction de partition et de sa limite semi-classique. Il vient :

$$Z(t) = \int_X^\star |dx| \int_{\Omega_{x,x,t}}^\star e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds} |d\gamma| .$$

Si on note Ω_t l'espace des chemins $\gamma : [0, t] \rightarrow X$ tels que $\gamma(0) = \gamma(t)$ et qu'on applique Fubini (sic !), on a :

$$Z(t) = \int_{\Omega_t}^\star e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds} |d\gamma| .$$

10.2. Le calcul semi-classique. On a une envie irrésistible d'appliquer la méthode de la phase stationnaire pour évaluer l'asymptotique semi-classique de $Z(t)$; les points critiques de l'action $J_t : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ sont les extrémales γ_c de période t du lagrangien \mathcal{L} et la valeur critique correspondante est l'action $A_T(\gamma_c)$. Il reste

- (1) à faire une hypothèse de non dégénérescence permettant d'appliquer la phase stationnaire,
- (2) à calculer l'indice de Morse,
- (3) à calculer le déterminant du hessien.

Il y a une autre difficulté : on a en général une infinité de variétés critiques, ce qui oblige à commencer par faire une troncature en en énergie (c'est le rôle de l'OPD $\hat{\Pi}$).

- (1) L'hypothèse de non dégénérescence est une hypothèse de type **(NDT)** ou **(Bott)** pour les points fixes de φ_t . On suppose que φ_t admet une variété W_t de dimension ν de points périodiques (avec $\nu \geq 1$).
- (2) L'indice de Morse est celui de Morse pour le problème des trajectoires de période t .
- (3) Le déterminant est un déterminant fonctionnel (opérateur de Jacobi) et nécessite une régularisation (voir à ce sujet mon article [Col99]).

On obtient ainsi une somme de contributions données par les différentes composantes $W_{j,t}$ de W_t :

$$Z_j(t) = (2\pi i \hbar)^{-\nu_j/2} e^{\frac{i}{\hbar} A_T(\gamma_j)} A_j(\hbar)$$

où $A_j(\hbar) \sim \sum_{l=0}^\infty a_{j,l} \hbar^l$ est un symbole d'ordre 0 et

$$a_{j,0} = \frac{e^{-i\mu \frac{\pi}{2}}}{|\delta|^{\frac{1}{2}}}$$

où μ est l'indice de Morse et δ un déterminant régularisé.

10.3. Et la formule de Selberg. Dans le cas d'une surface à courbure -1 $X = P/\Gamma$ l'espace des lacets $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow X$ se décompose en composantes connexes qui sont en bijection avec les classes de conjugaison de Γ : les lacets homotopes aux lacets constants correspondent à la classe de l'identité, les autres composantes sont isomorphes à l'espace des lacets homotopes à lc , $l \in \mathbb{Z} \setminus 0$, sur le cylindre hyperbolique $(x, y) \in \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ muni de la métrique hyperbolique $ds^2 = \cosh^2 y dx^2 + dy^2$, avec $c(t) = (t, 0)$, $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La décomposition de l'intégrale de Feynman suivant ces classes correspond exactement au calcul algébrique utilisé pour prouver la formule de Selberg.

11. Le terme de Weyl

11.1. Le propagateur pour t petit. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on veut donner une formule asymptotique, pour t petit, pour le propagateur $p_\chi(t, x, y)$ noyau de $\chi(\hat{H})e^{-it\hat{H}/h}$. D'après le chapitre 3, on peut trouver localement en x une fonction phase

$$\varphi(t, x, y, \xi) = \langle x - y | \xi \rangle - tK(t, x, y, \xi) ,$$

avec $K(0, x, x, \xi) = H(x, \xi)$. Donc on a une représentation asymptotique :

$$p_\chi(t, x, y) = (2\pi h)^{-n} \int e^{i\varphi/h} A(t, x, \xi, h) d\xi + O(h^\infty) ,$$

où A admet le d.a.

$$A(t, x, \chi, h) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t, x, \chi) h^i, \quad a_0 = \chi(H) .$$

On en déduit en particulier (localement dans X) :

$$D_\chi(E) = \sum \rho_h(E - E_i) \chi(E_i) = (2\pi h)^{-n-1} \int e^{\frac{it}{h}(E - K(t, x, \xi))} \hat{\rho}(t) A(t, x, \xi) dt dx d\xi .$$

On a aussi

$$\sum \chi(E_j) = \int D_\chi(E) dE ,$$

qui donne un d.a. par la phase stationnaire avec la variété critique non dégénérée de codimension 2 ($t = 0$, $E = H(x, \xi)$). Soit

$$\sum \chi(E_j) = (2\pi h)^{-n} \int \chi(H) |dL| + O(h^{1-n}) .$$

11.2. La formule de Weyl-Hörmander. On suppose maintenant que E_o est une valeur régulière de H . On a alors le

THÉORÈME 71. (*Weyl, Hörmander*) $N(E_o) = \#\{E_j \leq E_o\} = (2\pi h)^{-n} \text{vol}(H \leq E_o) + O(h^{1-n})$.

Le terme principal est l'asymptotique de Weyl qui admet des preuves simples basées sur le minimax (cf chapitre 2) ; la borne sur le reste qui est optimale est due à Hörmander.

Preuve. –

On choisit χ tel que H n'ait aucune valeur critique dans le support de χ . Il suffit d'évaluer :

$$N_\chi(E_o) = \sum_{E_i \leq E_o} \chi(E_i) ,$$

compte tenu de l'évaluation déjà faite dans la sous-section 5.1.

On peut appliquer la phase stationnaire à l'expression

$$D_\chi(E)$$

qui donne :

$$D_\chi(E) = (2\pi h)^{-n} \text{vol}(\Sigma_E) + O(h^{1-n}) .$$

Puis on a besoin du :

LEMME 16. Si $E \in \text{Support}(\chi)$,

$$\#\{|E_j - E| \leq h\} = O(h^{1-n}) ;$$

$$\sum_{E_j \geq E_o + h} \int_{-\infty}^{E_o} \rho_h(E - E_j) \chi(E_j) dE = O(h^{1-n}) ;$$

$$\sum_{E_j \leq E_o - h} \int_{E_o}^{\infty} \rho_h(E - E_j) \chi(E_j) dE = O(h^{1-n}) .$$

La première estimation résulte d'une minoration de ρ sur $[-1, +1]$ dans l'estimation de $D_\chi(E)$ par la phase stationnaire non dégénérée.

La deuxième (et de façon anaalogue la troisième) viennent de la décroissance rapide de ρ et d'un regroupement par paquets de taille h .

$$II \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{E_o + kh \leq E_j < E_o + (k+1)h} (1+k)^{-2} .$$

Fin de la preuve du lemme.

On écrit alors

$$\sum_j \int_{-\infty}^{E_o} \rho_h(E - E_j) \chi(E_j) dE = \sum_{E_j \leq E_o - h} + \sum_{E_o - h < E_j \leq E_o + h} + \sum_{E_j > E_o + h} .$$

La première somme I vaut

$$I = N_\chi(E_o - h) - \sum_{E_j \leq E_o - h} \int_{E_o}^{\infty} \dots dE = N_\chi(E_o) + O(h^{1-n}) ;$$

la seconde et la troisième sont facilement majorées par $O(h^{1-n})$ grâce au lemme.

□

Le cas des valeurs critiques non dégénérées de H a été traité par Brummelhuys-Paul-Urbe [BPU95].

12. Preuve de la formule de traces dans le cas d'un lagrangien propre

On prouve d'abord la formule de traces sous l'hypothèse **(Bott)** lorsque le point (T_0, E_0) n'est pas T -caustique. Elle se réduit à la formule de traces pour un difféomorphisme canonique prouvée dans la section 7 grâce au théorème 65 : en effet on choisit N tel que $T_0/N < \tau$ et on écrit

$$U(T) = U(T/N)^N .$$

On utilise alors le fait démontré dans la section 9.4 du chapitre 5 que $U(T/N)$ est un OIF associé au flot à l'instant T/N . Lorsque le point (T_0, E_0) n'est pas

E -caustique, la preuve de la formule (46) se fait par simple application de la phase stationnaire à la formule (44) qui décrit $Z(t)$. Il faut identifier l'amplitude ce qui résulte de la relation entre Π' et P' (voir le corollaire 8 et le calcul de la mesure canonique dans la proposition 27 du chapitre 5). Il faut remarquer dans l'équation (46) l'indice $\varepsilon + m_j$ que l'on doit prendre comme définition de l'indice de Maslov de la trajectoire périodique γ_j . Voir dans la section 13, la définition générale de l'indice de Maslov d'une trajectoire périodique pour un hamiltonien arbitraire.

Si le point (T_0, E_0) est T -caustique, ce n'est plus le cas pour une fonction $\hat{K} = \psi(\hat{H})$ telle que $\psi''(E_0) \neq 0$ (voir la section 14.3).

13. Preuve de la formule de traces dans le cas d'un hamiltonien quelconque

La démonstration est la même : écrire d'abord la formule de traces pour la fonction de partition en utilisant la formule de traces pour les OIF et le fait que $e^{-it\hat{H}/h}$ est un OIF associé au flot de H_0 à l'instant t . L'indice m_j ne peut alors plus être interprété comme un indice de Morse, c'est l'indice de Maslov de la trajectoire périodique. Voir [Rob91] pour des remarques à ce sujet. Nous étudierons plus en détail cet indice dans la chapitre 8 avec les formes normales de Birkhoff.

14. Formules de trace pour le laplacien riemannien

Le cas du laplacien riemannien présente la particularité d'être invariant par dilatation : le flot géodésique avec énergie E' est conjugué au flot d'énergie E . Remarquons d'abord que $dT/dE \neq 0$ et donc les hypothèses de non dégénérescence en temps ou en énergie sont équivalentes. Dans cette section, on considère le laplacien Δ sur une variété riemannienne compacte X (voir [BGM71]). Soit $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$ le spectre de Δ .

14.1. Le cas de l'équation de Schrödinger. Commençons par la formule de traces pour $\hat{H} = \frac{h^2}{2}\Delta$ sur la variété riemannienne compacte X . Montrons comment on retrouve les résultats de [Col73b]. Posons $S_h(E) = \sum \delta(E - \frac{h^2}{2}\lambda_j)$, on considère S_h comme une mesure. La fonction de partition associée est

$$\hat{S}_h(t) = \sum_j e^{-ith\lambda_j/2}.$$

Fixer t et faire $h \rightarrow 0$ équivaut à fixer $h = 1$ et faire $t \rightarrow 0$; la fonction de partition $\hat{S}_1(t)$ est essentiellement celle qui est étudiée dans [Col73b] sous la terminologie *équation de la chaleur complexe*.

14.2. Les cas de l'équation des ondes. On s'intéresse maintenant au cas où $\hat{H} = h\sqrt{\Delta}$. On pose $O_h(F) = \sum \delta(F - h\sqrt{\lambda_j})$. Le groupe unitaire associé est alors indépendant de h . Ce cas a été étudié par Chazarain [Cha74] et Duistermaat-Guillemin [DG75]. La fonction de partition associée

$$\hat{O}_h(t) = \sum_j e^{-it\sqrt{\lambda_j}}$$

est indépendante de h .

14.3. De l'équation de Schrödinger à l'équation des ondes. Montrons comment les formules de traces citées précédemment sont reliées. L'idée est que les 2 distributions (mesures généralisées) $S_h(E)$ et $O_h(F)$ se déduisent l'une de l'autre par un changement de variables. Si on pose $\psi(E) = \sqrt{2E}$, ($E > 0$), on a :

$$O_h(F) = \psi_*(S_h(E))$$

où ψ_* est l'image directe d'une mesure de Radon par l'application continue propre ψ (i.e. la transposée de la composition des fonctions par ψ).

ψ_* est un OIF que l'on peut écrire :

$$\psi_*(f(E)dE) = \left(\frac{1}{2\pi h} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{h}(\frac{F^2}{2} - E)t} f(E) |dEdt| \right) dF .$$

ψ_* est donc associée à la transformation canonique $\chi(E, t) = (F, u)$ avec $F = \sqrt{2E}$, $u = \sqrt{2E}t$.

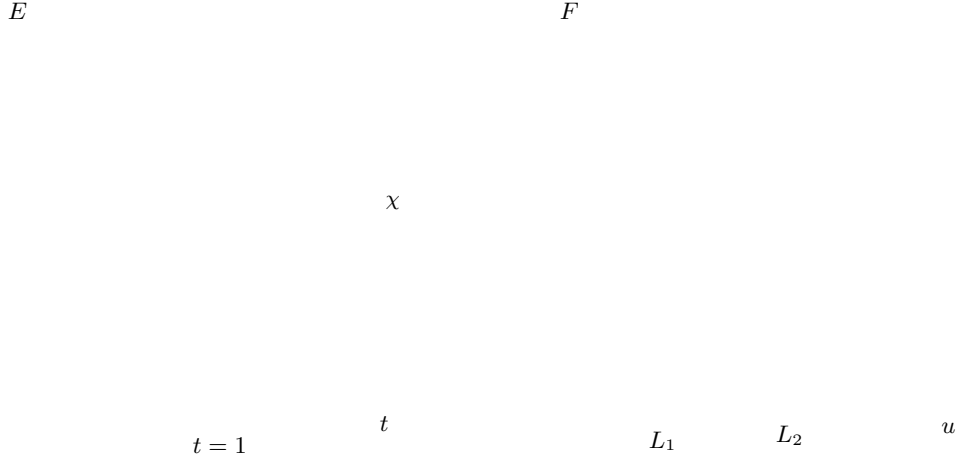


FIGURE 1. Les lieux singuliers de S_h et de O_h

Soit L_j , $j = 1, \dots$ le spectre des longueurs des géodésiques périodiques de la variété riemannienne compacte X . Alors l'ensemble singulier classique $\Sigma_E \subset T^*\mathbb{R}_E$ est donné par la réunion des courbes $C_j = \{T\sqrt{2E} = L_j\}$ dont les images par χ sont les courbes $D_j = \{u = L_j\}$. On voit donc que l'effet de la transformation canonique χ est de redresser les courbes C_j : en fait, l'image par ψ_* de $S_h(E)$ est une distribution intégrale de Fourier au sens de Hörmander. Le h -symbole de ces distributions détermine leur symbole au sens de Hörmander.

14.4. Les 2 calculs symboliques. On a le lemme simple suivant :

LEMME 17. *Soit $T(x)$ une distribution à support compact dans \mathbb{R} (indépendante de h) dont la h -transformée de Fourier*

$$\hat{T}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int e^{-ix\xi/h} T(x) dx$$

admet le développement asymptotique suivant

$$\hat{T}(\pm 1) \sim e^{\mp ix_0/h} \left(\sum a_j^\pm h^{N-j} \right)$$

alors T est une distribution lagrangienne au sens de Hörmander associée à la variété $T_{x_0}^* \mathbb{R}$.

Le lemme résulte simplement de l'observation que le comportement asymptotique de la h -transformée de Fourier en ± 1 détermine le comportement asymptotique de la transformée de Fourier quand $\xi \rightarrow \infty$.

14.5. Application : la formule de Duistermaat-Guillemin comme conséquence de la formule semi-classique. De l'analyse h -microlocale de $S_h(E)$, on va déduire l'analyse des singularités de la fonction de partition $\hat{O}(t) = \sum_j e^{-it\sqrt{\lambda_j}}$.

Plus précisément, dans le cas d'une géodésique fermée isolée de longueur T_0 , Duistermaat et Guillemin prévoient une singularité principale de $\hat{O}(t)$ en $t = T_0$ donnée par :

$$\hat{O}(t) \sim \frac{1}{2\pi i} \frac{T'_0}{\det(\text{Id} - P'_{\gamma_0})^{\frac{1}{2}}} e^{-i\mu_0\pi/2} (t - T_0 - i0)^{-1}.$$

Nous allons la déduire de la formule

$$S_h(E) \sim \frac{1}{2\pi h} \frac{T'_0/\sqrt{2E}}{\det(\text{Id} - P'_{\gamma_0})^{\frac{1}{2}}} e^{-i\mu_0\pi/2} e^{i\sqrt{2E}T_0/h}.$$

L'application de l'OIF ψ_* et de la phase stationnaire donne (signature 0 et déterminant du hessien égal à 1) :

$$O_h(F) \sim \frac{1}{2\pi h} \frac{T'_0}{\det(\text{Id} - P'_{\gamma_0})^{\frac{1}{2}}} e^{-i\mu_0\pi/2} e^{iFT_0/h},$$

et la formule cherchée par le calcul de $\frac{1}{2\pi h} \int_0^\infty e^{iFT_0/h} e^{-iFu/h} dF$ qui vaut $\frac{1}{2\pi i} (u - T_0 - i0)^{-1}$.

15. Application au problème spectral inverse

On peut appliquer la formule des traces au problème inverse suivant : reconstituer la géométrie d'une variété riemannienne compacte à partir du spectre du laplacien $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$. On sait depuis assez longtemps qu'il n'y a pas unicité. La formule des traces permet de déterminer le spectre des longueurs des géodésiques périodiques $\mathcal{L}(X, g)$ pourvu qu'il n'y ait pas de simplification exceptionnelle dans les singularités. Plus précisément, il pourrait arriver que 2 géodésiques périodiques de même longueur donnent lieu à des contributions s'annulant dans la formule des traces même dans la cas non dégénéré. Cela implique que les indices de Morse différent de 2 modulo 4.

En fait, on a le :

THÉORÈME 72. *Il existe un sous-ensemble \mathcal{M}_X , contenant un ouvert dense, de l'espace des métriques riemanniennes C^∞ sur une variété compacte X tel que si $g \in \mathcal{M}_X$ le h -WF de $D_g(E) = \sum \delta(E - \frac{h^2}{2}\lambda_j)$ soit la réunion de $0 \times \mathbb{R}$ et des $\Lambda_l = \{(E, \pm l/\sqrt{2E}) | E \in \mathbb{R}^+\}$, pour $l \in \mathcal{L}(X, g)$. \mathcal{M}_X contient en particulier toutes les métriques à courbure sectionnelle < 0 et celles qui sont analytiques à courbure ≤ 0 .*

V. Guillemin [Gui93] et [Gui96] (voir aussi [Zel97] et [Zel98]) a montré que la connaissance complète des singularités liées à une géodésique périodique

elliptique générique et à ses itérés détermine la forme normale (formelle) de Birkhoff au voisinage de cette trajectoire.

16. Le cas complètement intégrable

Cherchons à écrire explicitement une formule de traces semi-classique dans le cas complètement intégrable **NDTCI**. On peut pour simplifier (voir la section ??? du chapitre 7) supposer que $\hat{H} = H_0(\frac{h}{i}\partial_{x_j})$ avec $H_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, U ouvert de \mathbb{R}^n défini par $E_- < H_0(\xi) < E_+$ et \hat{H} opère sur l'espace de Hilbert des fonctions sur $\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ engendré par les $e^{i\nu x}$ avec $h\nu \in h\mathbb{Z}^n \cap U$. Le spectre de \hat{H} est alors le sous-ensemble de $]E_-, E_+[$ des $H_0(h\nu)$, $h\nu \in h\mathbb{Z}^n \cap U$.

$$H_0 = E$$

$$\tilde{D}_h(E)$$

$$E$$

FIGURE 2. Le spectre dans le cas complètement intégrable

On veut évaluer la densité d'état régularisée :

$$\tilde{D}_h(E) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \chi(H_0(h\nu)) \rho_h(E - H_0(h\nu))$$

où $\rho_h(E) = \frac{1}{h} \rho(\frac{E}{h})$. Désignant par $\hat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-ixy} dx$ et appliquant la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} g(\nu) = \sum_{\mu \in 2\pi\mathbb{Z}^n} \hat{g}(-\mu) ,$$

il vient :

$$\tilde{D}_h(E) = \frac{1}{2\pi h^{n+1}} \sum_{\mu \in 2\pi\mathbb{Z}^n} \int e^{\frac{i}{h}(t(E-H_0(\xi))+\mu\xi)} \chi(H_0(\xi)) \hat{\rho}(t) dt d\xi .$$

On peut appliquer la phase stationnaire sous l'hypothèse (**NDECI**). On obtient ainsi

$$\tilde{D}_h(E) = \frac{1}{h^n} a(h) + \sum_{\mu \in (2\pi\mathbb{Z}^n \setminus 0) \cap K} \frac{1}{h^{(n+1)/2}} b_\mu(h) e^{\frac{i}{h} S_\mu(E)}$$

où $a(h)$ et les $b_\mu(h)$ sont des symboles d'ordre 0 et $S_\mu(E) = \mu \xi_\mu$ avec $t_\mu H'(\xi_\mu) = \mu$, $H_0(\xi_\mu) = E$ et

$$K = \{ t H'_0(\xi) \mid \hat{\rho}(t) \neq 0 \text{ et } H_0(\xi) = E \} .$$

La densité d'état lissée admet donc une partie principale (Weyl) polynômiale de degré n en h^{-1} et des oscillations d'amplitude de l'ordre de $h^{-(n+1)/2}$ associées aux directions rationnelles de la normale à $H_0^{-1}(E)$. Dans le cas générique **NDE** les oscillations ne sont que d'un ordre $1/h$ et on observe effectivement dans les expérimentations numériques de faibles déviations par rapport à la loi de Weyl (voir l'exposé de C. Schmit dans **[GVZ91]** figures 2 p.342 et 8 p.350). Il serait intéressant de faire de cette remarque un test de complète intégrabilité.

CHAPITRE 7

QUASI-MODES

1. Généralités sur les quasi-modes

1.1. Introduction. Le terme *quasi-modes* a semble-t-il été inventé par Arnold dans son fameux papier *Modes and Quasi-modes* [Arn72]. Une théorie générale dans le contexte riemannien a été développée dans mon article [Col77a] qui étend des résultats de Lazutkin [Laz74] et [Laz93].

DÉFINITION 59. Si \hat{H} est un opérateur sur un espace de Hilbert, une ε -fonction propre de \hat{H} est un vecteur non nul u du domaine de \hat{H} tel que :

$$\|(\hat{H} - E)u\| \leq \varepsilon \|u\| .$$

Une version équivalente est de dire que la norme de la résolvante vérifie :

$$\|(\hat{H} - E)^{-1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon} .$$

Lorsque \hat{H} n'est pas auto-adjoint, on ne peut pas en déduire grand chose de l'existence d'un ε -vecteur propre, car on n'a pas de contrôle de la norme de la résolvante en terme de la distance au spectre. Par exemple, \hat{H} est une matrice $N \times N$ nilpotente avec $\dim \ker \hat{H} = 1$, la résolvante admet en 0 un pôle d'ordre N . On a dans ce cas une grande instabilité des valeurs propres : si on perturbe la forme de Jordan de la matrice précédente par ε dans le coin inférieur gauche, les valeurs propres sont les racines N -ème de $\pm \varepsilon$ et sont très grandes par rapport à ε . Ce phénomène est important dans la théorie des résonances, dans l'équation des ondes amortie et plus généralement dans la théorie spectrale des opérateurs différentiels non auto-adjoints ([Dav99]).

PROPOSITION 31. Si \hat{H} est autoadjoint et s'il existe $u \neq 0$ tel que :

$$\|(\hat{H} - E)u\| \leq \varepsilon \|u\| ,$$

alors le spectre de \hat{H} rencontre l'intervalle $[E - \varepsilon, E + \varepsilon]$.

En effet la norme d'un opérateur autoadjoint est égale à son rayon spectral comme on le vérifie aisément par diagonalisation dans une base orthonormée de fonctions propres.

Que peut-on dire des fonctions propres ? Il n'y a en général pas de fonctions propres proches de u : soit $a > \varepsilon > 0$, P le projecteur spectral sur $[E - a, E + a]$ et $u = Pu + v$ la décomposition orthogonale associée. On a :

$$\|v\| \leq \frac{\varepsilon}{a} \|u\| .$$

Donc, si $\varepsilon/a \ll 1$, u est proche de Pu qui est une combinaison linéaire de fonctions propres. Dans les régimes semi-classiques, $\varepsilon = O(h^\infty)$ et a est lié à l'espacement

moyen des valeurs propres qui est une puissance de h . On est donc dans une situation où $v = O(h^\infty)$.

L'exemple d'Arnold.

Supposons que l'on soit dans une situation avec symétrie : un groupe fini G agit de façon isométrique par $g \rightarrow \rho(g)$ sur \mathcal{H} et commute avec l'hamiltonien \hat{H} supposé à spectre discret. On se place dans une situation *générique* où les espaces propres de \hat{H} sont des représentations irréductibles de G . Soit u un ε -vecteur propre et K_u l'espace engendré par les $\rho(g)u$. Supposons que les vecteurs $u_g = \rho(g)u$ soient presque orthogonaux. Soit $K_u = \oplus E_\alpha$ la décomposition de K_u en irréductibles de G . Alors u ne peut être proche d'une fonction propre. En effet la représentation de G dans K_u est isomorphe et presque isométrique à la représentation régulière et donc u fait un angle au moins $\alpha_0 > 0$ (indépendant de u) avec tous les sous-espaces irréductibles. L'orthogonalité de u et de ses images par $\rho(g)$ est conséquence de la (micro-)localisation de u : le microsupport (voir plus bas) W de u ne rencontre aucune de ces images par l'action de g sur l'espace de phases classique.

Dans l'exemple d'Arnold $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et W est une trajectoire périodique stable de l'hamiltonien classique ; on peut aussi considérer une équation de Schrödinger avec un potentiel invariant par G qui agit sur l'espace de configuration. W est alors un des puits et on suppose que les images par G de ce puits sont toutes distinctes. Un exemple plus générique est donné par $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui agit sur $L^2(X)$ par la conjugaison complexe qui correspond à la symétrie $\sigma : (x, \xi) \rightarrow (x, -\xi)$ dans le cotangent T^*X . Si γ est une trajectoire périodique stable de H_0 supposé pair, la trajectoire $\sigma(\gamma)$ obtenue par renversement du temps est disjointe de γ .

Quasi-modes et dynamique quantique.

On peut aussi se poser la question de la dynamique $U(t)u$ avec $U(t) = \exp(-it\hat{H})$. Soit $u(t) = e^{-itE}u$, que peut-on dire de $U(t)u - u(t)$? Il est facile de voir que

$$\|U(t)u - u(t)\| \leq \varepsilon|t|.$$

Dans le régime semi-classique, on a : $\varepsilon = O(h^\infty)$ et donc on a une bonne approximation de la dynamique pendant des temps h^{-N} avec N quelconque.

1.2. Définitions. Dans la suite \hat{H} est toujours un hamiltonien semi-classique, i.e. un opérateur pseudo-différentiel elliptique semi-classique autoadjoint d'ordre 0 sur les demi-densités d'une variété X .

On a une définition provisoire :

DÉFINITION 60. On appellera quasi-mode (scalaire) d'ordre m une suite $u_h \in D(\hat{H})$ (en fait ils seront C^∞ à support dans un compact fixe de X) telle que, quel que soit $k \geq 0$:

$$\|(\hat{H} - E(h))u_h\|_{C^k} \leq Ch^m \|u_h\|,$$

où $E(h)$ est une suite de nombres réels dépendant de h .

On a le résultat suivant :

PROPOSITION 32. Soit (u_h) un quasi-mode d'ordre infini ; soit $J_h = [E(h) - Ah^{-N}, E(h) + Ah^{-N}]$, alors $\|u_h - \Pi_J(u_h)\| = O(h^\infty)\|u_h\|$, où Π_J est le projecteur spectral sur l'intervalle J_h . En particulier, cela implique que J_h rencontre le spectre de \hat{H} .

Les quasi-modes sont localisés dans l'espace des phases : plus précisément si $E(h) \rightarrow E_0$, leur microsupport est contenu dans $H_0(x, \xi) = E_0$ et leur mesure de concentration microlocale est invariante par le flot hamiltonien.

Plus généralement, on considère des quasi-modes *vectoriels* :

DÉFINITION 61. *Soit \mathcal{K}_h des sous-espaces de dimension finie N_h de $D(\hat{H})$. On dira que \mathcal{K}_h est un quasi-mode vectoriel d'ordre m si, notant P_h le projecteur orthogonal sur \mathcal{K}_h , on a :*

$$\|(P_h - \text{Id})\hat{H}P_h u\|_{C^k} = O(h^m)\|u\|$$

pour tout k . On pose alors $\hat{K} = P_h \circ \hat{H}$ opérant sur \mathcal{K}_h .

L'idée est alors de diagonaliser l'opérateur \hat{K} sur \mathcal{K} . Si (u_1, \dots, u_{N_h}) est une base propre de \hat{K} , chaque u_j est un quasi-mode scalaire.

1.3. Inégalité de Weyl.

DÉFINITION 62. *Soit, pour une suite de valeurs de h , F_h un sous-espace de \mathcal{H} de dimension $N(h)$. Si Op_+ est une quantification positive vérifiant $\text{Trace}(\text{Op}_+(a)) = \int_{T^*X} a|dL|$ où L est la mesure de Liouville, on pose $\mu_{F_h} = \sum_j \mu_{\varphi_j}$ où φ_j est une b.o. de F_h .*

μ_{F_h} est une mesure de Radon qui ne dépend pas du choix de la b.o. de F_h .

On a une inégalité de Weyl :

THÉORÈME 73. *Supposons que :*

$$\mu_{F_h}(T^*X \setminus K_h) = o(N(h)) ,$$

alors :

$$N(h) \leq \frac{1}{(2\pi h)^d} L(K_h)(1 + o(1)) .$$

Preuve.—

On a :

$$N(h) = \mu_{F_h}(T^*X) = (1 + o(1))\mu_{F_h}(K_h) .$$

On a aussi, $\forall K \subset T^*X$, : et $\mu_{F_h}(K) \leq L(K)$, car si on complète la b.o. ϕ_j en une b.o. de \mathcal{H} , on a

$$\mu_{F_h}(K) \leq \mu_{h,\mathcal{H}}(K) = L(K) .$$

□

1.4. Mesures semi-classiques et Microsupport.

DÉFINITION 63. *Le microsupport du quasi-mode u_h est le WF_h de la famille admissible u_h . Le microsupport d'un quasi-mode vectoriel \mathcal{K}_h est la fermeture de la réunion des microsupports des $u \in \mathcal{K}_h$ telles que $\|u\| = 1$.*

THÉORÈME 74. *Si u_h est un quasi-mode d'ordre infini, avec $E_h \rightarrow E_0$, le microsupport de (u_h) est un sous-ensemble de $\{H_0 = E_0\}$ invariant par le flot hamiltonien du symbole principal H_0 .*

Preuve.—

$(\hat{H} - E_h)u$ est négligeable, ce qui implique l'assertion sur le microsupport.

Soit $u_h(t) = \exp(-itE_h/h)u_h$ et

$$v_h(t) = e^{-it\hat{H}/h}u_h,$$

alors $u_h(t) - v_h(t)$ est négligeable, alors que $WF_h(v_h(t)) = \varphi_t(u_h)$.

□

DÉFINITION 64. On définit la mesure semi-classique μ_h d'un quasi-mode (scalaire ou vectoriel) par

$$\mu_h(a) := \text{Trace}(Op_+(a) \circ P_h).$$

On a $\mu_h(T^*X) = N_h$.

THÉORÈME 75. Pour un quasi-mode vectoriel de dimension N_h et de microsupport W , on a :

$$N_h \leq \frac{L(W)}{(2\pi h)^N} + o(h^{-N}).$$

C'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Weyl 73.

On peut avoir un énoncé plus fin qui prend en compte la vitesse de concentration de \mathcal{K}_h sur le microsupport. Le théorème précédent est une formulation du principe d'incertitude qui minore le volume d'occupation d'un état dans l'espace des phases.

PROPOSITION 33. Si (u_h) est un quasi-mode scalaire, toute limite faible des mesures semi-classiques est invariante par le flot hamiltonien.

1.5. La problématique des quasi-modes. Soit \hat{H} l'hamiltonien semi-classique. Supposons qu'on veuille comprendre le spectre semi-classique en termes de quasi-modes. Il nous faut trouver un ensemble compact invariant, le microsupport du quasi-mode, et une mesure invariante sur cet ensemble : les limites faibles des mesures semi-classiques ont cette propriété.

On s'attend à ce que qu'un compact invariant arbitraire ne permette pas la construction de quasi-modes : par exemple si z_0 est un point singulier hyperbolique de H_0 les fonctions sont au mieux localisées dans un voisinage de rayon $O(\sqrt{h})$ de z_0 . Un tel voisinage rencontre la variété instable et la dynamique $\hat{U}(t)$ va étaler le quasi-mode sur cette variété instable. Même phénomène si on construit un quasi-mode sur un ensemble invariant de dimension $< n$, une propriété de stabilité est alors nécessaire. Dans le cas d'une variété lagrangienne, on perd cette nécessité d'une stabilité.

Il se peut que le microsupport du quasi-mode soit strictement plus grand que le support des limites faibles des mesures semi-classiques. C'est le cas pour l'opérateur de Schrödinger en dimension 1 : si E_0 est une valeur critique obtenue pour un point col unique z_0 , $H^{-1}(E_0)$ ne contient aucune probabilité invariante que la masse de Dirac au point z_0 . Si donc u_h est une suite de (quasi-)fonctions propres d'énergie convergent vers E_0 , leurs mesures semi-classiques convergent vers $\delta(z_0)$.

La philosophie est que l'on a toujours besoin d'une variété lagrangienne pour construire un quasi-mode mais que celle-ci peut être réelle ou complexe, lisse ou singulière. Le cas le plus simple est celui des tores lagrangiens des systèmes complètement intégrables : on retrouve les fameuses conditions de Bohr-Sommerfeld. Les feuilles singulières qui apparaissent lors des bifurcations peuvent aussi être traitées (voir [CP99], [Vu 98] et [CV00]). Le cas de points singuliers stables ou

de trajectoires périodiques stables est traité en passant dans le complexe : il suffit d'y passer au niveau des jets car au-delà les contributions sont exponentiellement petites. La théorie des formes normales de Birkhoff semi-classiques donne la clé.

2. Quasi-modes attachés à une variété lagrangienne compacte : conditions de Bohr-Sommerfeld

2.1. Quasi-modes d'ordre 2 attachés à un tore lagrangien. On souhaite construire des quasi-modes à partir d'une variété lagrangienne compacte Λ invariante par le flot hamiltonien de H_0 ou ce qui revient au même contenue dans une couche d'énergie $H_0(x, \xi) = E_0$. En général, ces variétés sont des tores de dimension n et le flot hamiltonien y est linéarisable, c'est-à-dire conjugué à un flot linéaire $\sum \omega_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ sur le tore $T^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$: il y a donc une mesure à densité C^∞ invariante par la dynamique sur Λ .

On peut construire un quasi-mode d'ordre 2 sur un tel tore dès que

- (1) Les conditions de Bohr-Sommerfeld sont satisfaites.
- (2) Le symbole sous-principal de \hat{H} est nul.

Décrivons les conditions de Bohr-Sommerfeld : chacun des n lacets γ_j engendrant l'homologie du tore Λ admet un indice de Maslov noté $\mu(\gamma_j)$.

DÉFINITION 65. *Le tore Λ vérifie les conditions de Bohr-Sommerfeld pour $h > 0$ si, pour tout $j = 1, \dots, n$, on a :*

$$\int_{\gamma_j} \xi dx = 2\pi h \left(n_j + \frac{\mu(\gamma_j)}{4} \right)$$

avec $n_j \in \mathbb{Z}$.

THÉORÈME 76. *Si Λ est un tore lagrangien contenu dans $H_0(x, \xi) = E_0$, tel que $\text{Sub}(\hat{H}) = 0$ sur Λ , vérifiant les conditions de Bohr-Sommerfeld pour une suite $h_j \rightarrow 0$ et tel qu'il existe une mesure à densité C^∞ sur Λ invariante par le flot hamiltonien \mathcal{X}_{H_0} , alors il existe un quasi-mode d'ordre 2 porté par Λ avec $u_{h_j} \in O^0(\Lambda)$ et $E(h_j) = E_0$.*

Preuve. –

On prend $u \in O^0(\Lambda)$ tel que son symbole soit la racine carrée de la mesure de densité C^∞ invariante sur le tore. Ce n'est possible que si les conditions de Bohr-Sommerfeld sont satisfaites. On a alors par le calcul symbolique $(\hat{H} - E_0)u_{h_j} \in O^2(\Lambda)$.

□

2.2. Le cas de la dimension 1. Supposons, pour fixer les idées, que $\hat{H} = -\frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$, avec

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} V(x) \geq 0 .$$

Le symbole principal de \hat{H} est $H_0(x, \xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + V(x)$ dont on notera \mathcal{E} l'ensemble des valeurs critiques < 0 . Soit Ω une composante connexe de $\{H_0(x, p) < 0\} \setminus H_0^{-1}(\mathcal{E})$ qui est donc un anneau feuilleté par des cercles sur lesquels H_0 est constante. On note $\gamma_E = H_0^{-1}(E) \cap \Omega$ un tel cercle. La condition de Bohr-Sommerfeld pour γ_E s'écrit :

$$\int_{\gamma_E} \xi dx = 2\pi h \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n \in \mathbb{Z} .$$

Par Stokes, l'intégrale $\int_{\gamma_E} \xi dx$ est égale à l'aire symplectique du disque bordé par γ_E .

En particulier, si E_{\pm} sont les bornes de H_0 sur Ω , le nombre de courbes γ_E vérifiant les conditions de Bohr-Sommerfeld dans Ω est équivalent à $\frac{h}{2\pi} \text{aire}(\Omega)$ qui est l'équivalent prévu par la formule de Weyl.

Chacune de ces courbes porte donc un quasi-mode au sens du § précédent, mais il faut comprendre l'organisation globale : ces quasi-modes sont en quelque sorte quasi-orthogonaux. Ce n'est pas si clair, en effet on a bien le

LEMME 18. *Si u et v sont 2 quasi-modes d'ordre infini de microsupports dis-joints, ils sont asymptotiquement orthogonaux.*

Mais il ne s'applique pas vraiment ici car les courbes γ_E vérifiant Bohr-Sommerfeld sont de plus en plus proches quand $h \rightarrow \infty$.

On va s'en sortir par la construction d'une isométrie injective (dépendant de h) U d'un espace de Hilbert \mathcal{H}_0 muni d'un opérateur autoadjoint \hat{K} dans $L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{H}$ de façon que U réalise un entrelacement modulo $O(h^\infty)$ de \hat{K} et de \hat{H} . Une application du minimax montre alors que les valeurs propres de \hat{K} sont des valeurs propres approchées de \hat{H} et qu'on a les conditions d'orthogonalité requises. Autrement dit on va construire directement un quasi-mode vectoriel diagonalisé.

2.3. Le cas diophantien.

DÉFINITION 66. *Le flot linéaire $\sum \omega_j \partial_j$ sur le tore $T^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$ vérifie une condition diophantienne, notée $\text{Dioph}_{C,\beta}$, si*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0, \quad \left| \sum k_j \omega_j \right| \geq C \|k\|^{-\beta}.$$

THÉORÈME 77. *Si Λ est un tore invariant par la dynamique de \mathcal{X}_H et que celle-ci est linéarisable et vérifie $\text{Dioph}_{C,\beta}$, il existe un germe de transformation canonique exacte $\chi : (T^*T^n, \xi = \xi_0) \rightarrow (T^*X, \Lambda)$, un OIF unitaire \hat{U} associé et un symbole $L_h(\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} L_j(\xi) h^j$ tels que :*

$$\hat{U}^{-1} \circ \hat{H} \circ \hat{U} = \hat{K}$$

où le symbole total $K_h(x, \xi)$ de \hat{K} vérifie

$$K_h(x, \xi) = L_h(\xi) + O(\xi^\infty).$$

Cette forme normale permet de construire des quasi-modes semi-excités. On verra dans le chapitre 8 comment étendre cette construction à des tores invariants de dimension $k < n$ transversalement stables et non-résonants : points singuliers stables de H (extremas locaux), trajectoires périodiques stables, etc.

COROLLAIRE 9. *Soit \mathcal{K}_h le sous-espace fermé de $L^2(T^n)$ engendré par les $e^{ilx/h}$ avec $l \in h\mathbb{Z}^n$ et $\|l - \xi_0\| \leq Ch^\alpha$ (C et $0 < \alpha < 1$ donnés). Si on pose $\hat{L}e^{ilx/h} = L_h(l)e^{ilx/h}$, $\hat{U}(\mathcal{K}_h)$ est un quasi-mode d'ordre infini pour \hat{H} dont les valeurs propres approchées sont les $L_h(l)$, $l \in h\mathbb{Z}^n \cap B(\xi_0, Ch^\alpha)$.*

Preuve. –

La version classique de la forme normale a déjà été étudiée dans le chapitre 1. On est donc réduit au cas où

$$H_0(x, \xi) = L_0(\xi) + O(\xi^\infty).$$

On travaille ensuite par conjugaison pseudo-différentielle et recherche successives des L_k , $k \geq 1$ tels que $L_h \sim \sum_k L_k h^k$. Considérons le cas de L_1 avec un OPD \hat{P} de symbole principal e^{iP} , puis $P \sim \sum P_k(\xi) + O(\xi^\infty)$ avec les P_k homogènes de degré k . Les calculs sont exactement les mêmes que pour le cas classique.

□

3. Les coordonnées actions-angles semi-classiques

3.1. Les coordonnées actions-angles classiques. T^n désignera le tore de dimension $\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$. On suppose l'hamiltonien $H_0(x, \xi)$ *complètement intégrable dans une région* Ω telle qu'il y ait des coordonnées actions-angles classiques, i.e. il existe un difféomorphisme canonique $\chi : \Omega_0 \rightarrow \Omega$ où $\Omega_0 = \{(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n | \xi \in V\}$ et $H_0 \circ \chi = K_0(\xi)$ est une fonction de ξ seulement.

3.2. Le cas semi-classique. Examinons maintenant la situation semi-classique : supposons le symbole sous-principal de \hat{H} nul dans Ω , pour chaque valeur de h les conditions de Bohr-Sommerfeld sélectionnent dans V un sous-réseau $h(\mathbb{Z}^n + (\frac{\mu}{4}))$ où μ est la classe de Maslov. Les tores lagrangiens correspondants portent donc des quasi-modes d'ordre 2 qui sont compatibles avec la formule de Weyl.

Si on veut aller plus loin, il faut considérer la condition diophantienne $\text{Dioph}_{C,\beta}$, ce qui sélectionne sous-réserve que $\xi \rightarrow [\nabla H(\xi)]$ soit un difféo. local sur V un sous-ensemble de mesure relative tendant vers 1 lorsque $C \rightarrow 0$ de V .

Il n'y a aucune raison que cet ensemble rencontre le réseau de Bohr-Sommerfeld.

Si c'est le cas, les valeurs propres ont un développement asymptotique complet.

En général, on est amené à mettre en évidence une classe de valeurs propres stables et son complémentaire qui est instable. Cette situation typique se rencontre pour l'asymptotique des grandes énergies de l'opérateur de Schrödinger périodique dans \mathbb{R}^n :

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum g^{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} + V(x) ,$$

où V est $2\pi\mathbb{Z}^n$ -périodique.

On est donc amené à procéder différemment : examiner d'abord le cas complètement intégrable quantique (semi-classique) pour lequel on peut introduire des coordonnées actions-angles semi-classiques. Puis considérer le cas classiquement, mais non quantiquement intégrable par perturbation. Le traitement de ce dernier cas s'étend sans mal au régime KAM classique.

3.3. La complète intégrabilité semi-classique. On peut souvent éviter les considérations précédentes en supposant que l'on a complète intégrabilité au sens quantique ; i.e. il existe des opérateurs (pseudo-différentiels) \hat{A}_j de symboles principaux les A_j qui commutent entre eux et qui commutent avec \hat{H} . C'est le cas par exemple si la complète intégrabilité provient de symétries du système.

C'est aussi le cas dans par exemple pour les surfaces où la métrique riemannienne admet la forme globale (métrique de Liouville) $ds^2 = (A(x) + B(y))(dx^2 + dy^2)$ avec $A + B > 0$, par exemple un tore si A et B sont périodiques ou bien la métrique euclidienne dans l'ellipse avec les coordonnées : $u + iv = \cosh(x + iy)$ et donc

$$du^2 + dv^2 = (\sinh^2 x + \sin^2 y)(dx^2 + dy^2) .$$

On vérifie alors que le laplacien $\Delta = \frac{-1}{A+B}\Delta_0$, commute avec $P = \frac{1}{A+B}(A\frac{\partial^2}{\partial y^2} - B\frac{\partial^2}{\partial x^2})$.

On en déduit que les fonctions propres associées aux valeurs propres (λ, μ) pour (Δ, P) vérifient le système suivant où les variables sont séparées :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (\lambda A(x) + \mu)\varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (\lambda B(y) - \mu)\varphi = 0.$$

Pour une discussion plus détaillée voir [CV00].

On donne donc la :

DÉFINITION 67. *Un hamiltonien semi-classique \hat{H} sur une variété X de dimension n est dit semi-classiquement complètement intégrable s'il existe des hamiltoniens \hat{A}_j , $j = 1, \dots, n$, d'ordre 0, sur X tels que :*

- (1) *Les opérateurs \hat{A}_j commutent entre eux :*

$$\forall i, j, [\hat{A}_i, \hat{A}_j] = 0.$$

- (2) *Le système classique A_1, \dots, A_n formé par les symboles principaux est complètement intégrable : la Poisson-commutation vient de la commutation des \hat{A}_j . Ce qui n'en provient pas est l'indépendance fonctionnelle générique des A_j .*

- (3) *Il existe une fonction C^∞ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

$$f(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n) = \hat{H}$$

au sens du calcul fonctionnel. On peut même supposer que f est un symbole en h .

3.4. Les coordonnées actions-angles semi-classiques. La construction qui suit est essentiellement une conséquence du travail [Wei74]. Soit $\Omega \subset T^*X$ un ouvert feuilleté par des tores lagrangiens du système classique complètement intégrable (A_1, \dots, A_n) et tel que Ω admette des coordonnées actions-angles exactes $\chi : T^n \times V \rightarrow T^*X$. Alors on a :

THÉORÈME 78. (1) *Il existe un OIF \hat{U} associé à la transformation canonique χ unitaire sur $T^n \times V$ qui conjugue l'hamiltonien \hat{H} à un hamiltonien $\hat{K} = K_h(\hat{\xi})$ où K_h est un symbole d'ordre 0 défini sur V .*

- (2) *Si les symboles sous-principaux des \hat{A}_j et de \hat{H} sont nuls, on introduit l'espace de Hilbert des sections L^2 sur le tore des fonctions sur \mathbb{R}^n qui vérifient*

$$f(x+k) = e^{i\mu k/4} f(x), \quad k \in 2\pi\mathbb{Z}^n,$$

où μ_j sont les indices de Maslov des lacets canoniques de T^n . On peut alors choisir \hat{U} tel que $K_h = K_0 + O(h^2)$.

Si $W \subset V$ est un compact à bord lisse et

$$\mathcal{K} = \text{vect.} \{ \hat{U}(e^{ilx/h}) \mid l \in h(\mathbb{Z}^n + \mu/4) \cap W \}$$

on a ainsi construit un quasi-mode de microsupport $\chi(T^n \times W)$ dont le spectre est formé des $F_h(l)$. Ce quasi-mode sature l'inégalité de Weyl donnée dans le théorème 75.

Preuve.—

- (1) Soit \hat{U} un OIF unitaire sur $T^n \times V$ (i.e. $\hat{U}^* \hat{U} - \text{id}$ est régularisant sur $T^n \times V$) associé à la transformation canonique χ . On peut modifier les générateurs \hat{A}_j de façon que $A_j \circ \chi = \xi_j$ et on aura :

$$\hat{U}^* \circ \hat{A}_j \circ \hat{U} = \hat{\xi}_j + h \hat{R}_j$$

où les \hat{R}_j sont des OPD auto-adjoints d'ordre 0 et de symbole principaux $r_j(x, \xi)$. On va modifier \hat{U} en le composant avec un OPD \hat{P} unitaire sur $T^n \times V$ et de symbole e^{iP} de façon que :

$$\hat{P}^{-1} \circ (\hat{\xi}_j + h \hat{R}_j) \circ \hat{P} = \hat{\xi}_j + h S_j(\xi) + O(h^2) .$$

On obtient pour P les équations homologiques :

$$\{\xi_j, P\} = S_j(\xi) - r_j(x, \xi) .$$

Ces équations admettent une solution P périodique si la forme $a_\xi = \sum_j r_j(x, \xi) dx_j$ est fermée en x . Cela détermine d'abord S_j par

$$S_j(\xi) = \int_{\gamma_j} \alpha_\xi$$

puis P . On vérifie que la condition de commutation des \hat{A}_j implique $d_x \alpha_\xi = 0$.

On itère ensuite la construction pour trouver le développement complet en puissances de h .

- (2) L'argument de Weinstein est de choisir \hat{U} avec un symbole constant : ce n'est possible qu'en tordant $L^2(X)$ par le fibré plat, le fibré de Maslov, dont les holonomies sont des racines 4-ème de 1 liées aux indices de Maslov.

Il reste à évaluer la dimension de \mathcal{K} : elle est donnée par le nombre de points de $h(\mathbb{Z}^n + \mu/4) \cap W$ qui est équivalent à $h^{-n}|W|$ et donc à

$$\frac{L(T^n \times W)}{(2\pi h)^n} .$$

□

4. Le spectre stable ou KAM

On prend comme hypothèses les conclusions du théorème KAM dans la version de Lazutkin-Poeschel (voir [Bos86] and [Laz93]).

On se donne un hamiltonien semi-classique \hat{H} sur T^n de symbole $H_h(x, \xi) \sim \sum h^j H_j(x, \xi)$. On suppose qu'il existe un hamiltonien $L_0(\xi)$ (i.e. complètement intégrable) tel que

- (1) $L_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est non dégénéré au sens que $\xi \rightarrow [\omega(\xi)]$ est une submersion de Ω sur le projectif $P^{n-1}\mathbb{R}$.
 (2) Si

$$K = \{\xi \in \Omega \mid \omega(\xi) \text{ verifie } \text{Dioph}_{C, \beta}\} ,$$

$$H_0(x, \xi) - L_0(\xi) \text{ est plat sur } T^n \times K .$$

On a alors :

THÉORÈME 79. *Sous les hypothèses 1 et 2, il existe un opérateur pseudo-différentiel unitaire \hat{P} et un hamiltonien semi-classique $\hat{L} = L_h(\hat{\xi})$ sur $T^n \times \Omega$ tels que le symbole total de*

$$\hat{P}^{-1} \circ \hat{H} \circ \hat{P} - \hat{L}$$

soit plat sur $T^n \times K$. De plus, si $H_h(x, \xi) = H_0(x, \xi) + h^j H_j(x, \xi) + O(h^{j+1})$, $L_h(\xi) = L_0(\xi) + h^j L_j(\xi) + O(h^{j+1})$ où

$$L_j(\xi) = (2\pi h)^{-n} \int_{T^n} H_j(x, \xi) dx .$$

En effet, on se ramène à des équations du type :

$$\frac{1}{i} \{L_0(\xi), P_j\} = L_{j+1}(\xi) - W_j(x, \xi) , j = 0, \dots ,$$

que l'on résoud sur $T^n \times K$ en choisissant pour Φ_{j+1} la moyenne par rapport à x de $W_j(x, \xi)$. On utilise alors le fait que $H_0 - L_0$ est plat sur K .

Par exemple, si $\hat{H} = h^2 \Delta + h^2 V$ sur T^n , on aura $L_2(\xi) = \int V dx$.

Soit maintenant \mathcal{H} l'espace de Hilbert engendré par les $e_k(x) = e^{ikx/h}$ tels que $k \in \Omega$.

On a

$$\dim \mathcal{H} \sim \frac{|\Omega|}{(2\pi h)^n} .$$

Soit \mathcal{H}_{KAM} le sous-espace de \mathcal{H} engendré par les e_k tels que

$$d(k, K) \leq h^\alpha ,$$

où $0 < \alpha < 1$.

Alors

$$\dim \mathcal{H}_{KAM} \sim \frac{|K|}{h^n} .$$

L'espace \mathcal{H}_{KAM} est l'analogue semi-classique des tores KAM.

Il est maintenant facile de voir que

$$\hat{P}^{-1} \hat{H} \hat{P} - \hat{L}$$

est régularisant sur \mathcal{H}_{KAM} , cela veut dire que sa norme est $O(h^\infty)$ sur ce sous-espace.

On a en particulier construit un quasi-mode d'ordre infini correspondant à des valeurs propres asymptotiques

$$L_h(k), \text{ telles que } d(k, K) \leq h^\alpha .$$

C'est cette partie du spectre que l'on nomme spectre *stable* ou *KAM*.

5. Le spectre instable ou de Birkhoff

La théorie des perturbations des systèmes hamiltoniens comprend essentiellement la théorie KAM dont nous venons de décrire le pendant semi-classique et le théorème de Poincaré-Birkhoff qui prédit que les tores d'orbites périodiques se décomposent sous l'effet d'une perturbation générique en des orbites périodique isolées. Nous allons décrire le pendant semi-classique de ce théorème de Poincaré-Birkhoff.

5.1. Perturbations des trajectoires périodiques. Soit $H_\epsilon = H_0 + \epsilon K$, et supposons que H_0 admette une variété non-dégénérée (au sens de Bott) de trajectoires périodiques de période T .

Cela signifie que le graphe du flot ϕ_T de H_0 coupe la diagonale transversalement au sens de Bott en une variété Z .

On peut reformuler ceci en un problème variationnel ayant une variété critique non dégénérée.

Si $F_\epsilon = F_0 + \epsilon G$ et que F_0 admet une variété critique non dégénérée W , les points critiques de F_ϵ pour ϵ petit sont proches des points critiques de la restriction de G à W .

Ici cela revient à considérer la perturbation K moyennée sur les trajectoires périodiques. Tout ceci est fait en détail dans [Wei73a].

Plus précisément, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 80. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et, pour $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, une fonction $S_\varepsilon : W \rightarrow \mathbb{R}$ telle que les points critiques de F_ε dans un voisinage de W soient en bijection avec ceux de S_ε sur W . La fonction $\Sigma = \frac{dS}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$ est la restriction de G à W .*

Dans le cas des trajectoires périodiques d'un système hamiltonien, la fonction Σ est constante sur les trajectoires et donnée par la moyennisation :

$$\Sigma(z) = \int_0^T K(\varphi_t(z)) dt .$$

5.2. Quasi-modes associés aux tores rationnels. Considérons sur le tore T^2 un hamiltonien semi-classique \hat{H} de la forme

$$\hat{H} = H_0(\hat{\xi}, \hat{\eta}) + h^2 \hat{H}_2$$

où \hat{H}_2 est un OPD d'ordre 0 et de symbole principal $H_2(x, y, \xi, \eta)$. Soit $\omega(\xi, \eta) = (\omega_1(\xi, \eta), \omega_2(\xi, \eta))$ les dérivées partielles de $H_0(\xi, \eta)$. On considère un point $\zeta_0 = (\xi_0, \eta_0)$ tel que $\omega_1(\zeta_0) = 0$: le tore $T^2 \times \{\zeta_0\}$, invariant par la dynamique de \mathcal{X}_{H_0} , est formé uniquement de trajectoires périodiques $x = \text{constante}$ avec $\dot{y} = \omega_2(\zeta_0)$ supposé non nul. Dans [ERT84] et [FKT91], les auteurs construisent des quasi-modes associés à cette situation dans le cas de l'opérateur de Schrödinger périodique

$$\hat{S} = -\frac{h^2}{2} \Delta + h^2 V(x, y) .$$

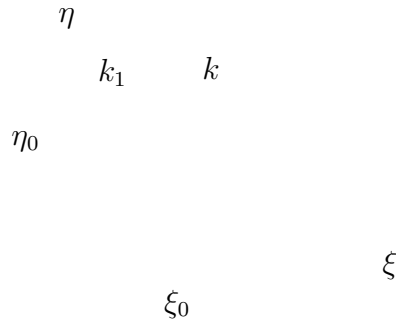


FIGURE 1. Les valeurs propres instables : la courbe $\omega_1 = 0$

Nous allons traiter le cas d'un système complètement intégrable classique général qui modulo un passage en coordonnées actions-angles se ramène à l'hamiltonien \hat{H} .

THÉORÈME 81. *On pose $\omega_{1,1}(\zeta) = \frac{\partial \omega_1}{\partial \xi}$ et on suppose que $\omega_{1,1}(\zeta_0) \neq 0$. Soit B la boule de centre ζ_0 et de rayon Ch . Soient $D_h = \{B \cap h\mathbb{Z}^2\}$ et, pour $k \in D_h$, δ tel que $\omega_1(k - h\delta) = 0$. On pose $k - h\delta = k_1$. Soit \mathcal{H}_δ l'espace de Hilbert des fonctions d'une variable $a(x)e^{-i\delta x}$ où a est 2π -périodique. On considère l'opérateur de Schrödinger P_δ sur \mathcal{H}_δ défini par :*

$$P_\delta f(x) = -\frac{1}{2}\omega_{1,1}(\zeta_0)f''(x) + \bar{H}_2(x, \zeta_0)f(x) ,$$

où $\bar{H}_2(x, \zeta_0)$ est la moyenne en y de $H_2(x, y, \zeta_0)$. Soit $\lambda_j(\delta)$ les valeurs propres de P_δ sur \mathcal{H}_δ qui sont dans un intervalle fixé $[-M, +M]$.

Alors, il existe

$$u_k(x, y) = e^{ikz/h}(a_0(x) + ha_1(x, y) + \dots)$$

tel que

$$(\hat{H} - (H_0(k) + h^2\lambda_j(\delta) + h^3b_{3,j} + \dots))u_k(x, y) = O(h^\infty) .$$

Preuve.—

On pose

$$u_k(x, y) = e^{ik_1z/h}(b_0(x) + hb_1(x, y) + \dots) ,$$

où les $b_j(x, y)e^{-i\delta x} = a_j(x, y)$ sont périodiques. Calculons $\hat{H}u_k$ modulo $O(h^3)$. On trouve :

$$\begin{aligned} \hat{H}u_k &= H_0(k_1)u_k + h^2\left(-\frac{1}{2}\omega_{1,1}(\zeta_0)b''_0(x) + \right. \\ &\quad \left. H_2(x, y, \zeta_0)b_0(x) + \frac{\omega_2}{i}\frac{\partial b_1}{\partial y}\right)e^{ik_1z/h} + O(h^3) . \end{aligned}$$

Le terme en h disparaît car $\omega_1(k_1) = 0$. Le terme $-\frac{1}{2}\omega_{1,1}(\zeta_0)b''_0(x)$ provient de l'action de l'OPD $H_0(\hat{\zeta})$ sur $b_0(x)e^{ik_1z/h}$. Cette action est donnée par le :

LEMME 19. *On a*

$$\begin{aligned} H_0(\hat{\xi})(b(x, y)e^{ik_1z/h}) &= (H_0(k_1)b(x) + \frac{h}{i}(\omega_1(k_1)\frac{\partial b}{\partial x} + \omega_2(k_1)\frac{\partial b}{\partial y}) \\ &\quad - \frac{h^2}{2}(\omega_{1,1}(k_1)\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + 2\omega_{1,2}(k_1)\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} + \dots) + O(h^3))e^{ik_1z/h} . \end{aligned}$$

Ce lemme se montre par développement de b en série de Fourier.

Si $Pb_0 = \lambda b_0$, on peut tuer le terme restant par un choix convenable de b_1 , car $\frac{\partial b_1}{\partial y}$ est imposé et de moyenne nulle. A l'étape suivante, on modifie ce b_1 par une fonction de x seulement, ce qui permet d'itérer.

□

5.3. Les quasi-modes de Shnirelman. Les quasi-modes de Shnirelman (voir AD. 2, p. 325-336 de [Laz93]) correspondent en dimension 2 aux fonctions propres semi-classiques localisées entre les tores KAM : montrons comment construire de tels quasi-modes.

On raffine les hypothèse du théorème 79 en supposant que

$$\Phi : \xi \rightarrow (L_0(\xi), [\omega(\xi)])$$

est un difféo. de Ω sur $]E_-, E_+[\times U$ avec U ouvert de $P^1\mathbb{R}$. On modifie \hat{H} de façon que $H_h(x, \xi) = L_h(\xi)$ lorsque $L_0(\xi)$ est proche de E_{\pm} .

Soit I un intervalle fermé de U dont les extrémités sont dans $[\omega(K)]$. Soient \mathcal{H} l'espace engendré par les $e^{ikx/h}$ avec $k \in h\mathbb{Z}^2 \cap]E_-, E_+[\times I$ et $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{KAM} \oplus \mathcal{H}_s$. On décompose alors $\mathcal{H}_s = \oplus \mathcal{K}_j$ (somme finie pour chaque h) où chaque \mathcal{K}_j regroupe les k tel que k soit dans une composante connexe de $\Phi^{-1}(]E, E_+[\times I \setminus \{\xi \mid d(\xi, K) \geq Ch^\alpha\})$.

On a alors :

THÉORÈME 82. *L'espace \mathcal{H} est invariant modulo $O(h^\infty)$ par $Q = \hat{H}$ et la décomposition $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{KAM} \oplus_j \mathcal{K}_j$ aussi. Les vecteurs propres du modifié de \hat{H} sur cet espace de valeurs propres contenues dans un compact convenable de $]E_-, E_+[$ sont des quasi-modes pour \hat{H} .*

La démonstration est simple :

$$\hat{H}(e^{ikx/h}) = H_h(x, k)e^{ikx/h}$$

et donc, si $d(k, k') \geq Ch^\alpha$, l'élément de matrice

$$\langle \hat{H}(e^{ikx/h}) | e^{ik'x/h} \rangle$$

est $O(h^\infty)$. De plus l'action sur $e^{ikx/h}$ avec $d(hk, K) = O(h^\alpha)$ est presque diagonale, donc les éléments de matrice correspondants sont aussi $O(h^\infty)$.

6. Questions

6.1. Et les formules de traces ? L'application des formules de traces semi-classiques à une situation proche de CI générique donne lieu à une contribution des trajectoires périodiques mais pas de contribution des tores KAM, alors que des quasimodes de densité > 0 s'y concentrent.

Cela veut dire sans doute que l'on peut lire une information sur les tores KAM dans les trajectoires périodiques :

cela a été considéré d'un point de vue dynamique classique et porte le nom de critère de Greene.

Est ce que les considérations précédentes donnent un éclairage (une justification ?) du critère de Greene ?

on se place dans une situation KAM (ND) et (NDE) en dimension 2 ; à chaque orbite périodique γ correspondant à un nombre de rotation p/q on associe son *Résidu*

$$R_\gamma = \det(Id - P_\gamma)$$

et si ω est une fréquence KAM et p_n/q_n une suite de réduites de ω correspondant à une suite de trajectoires périodiques γ_n , on considère la limite :

$$\mu(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S(\gamma_n)} \log |R_{\gamma_n}| ,$$

où $S(\gamma)$ est l'intégrale d'action sur γ .

Alors $\mu(\omega) \leq 0$ implique l'existence d'un tore invariant de fréquence ω et réciproquement.

Ce critère s'avère efficace numériquement pour détecter la disparition des tores KAM. Il est agréable de constater que le résidu est l'un des ingrédients de la formule de trace qui donne donc accès aux $\mu(\omega)$ (q_n est liée aux longueurs des trajectoires périodiques).

6.2. La finitude du nombre de gaps ? Il est conjecturé (conjecture de Bethe-Sommerfeld) que le spectre de $\Delta + V$ dans \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) avec V périodique n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, cette conjecture est prouvée en dimension ≤ 4 grâce aux travaux de Skriganov, Dahlberg-Trubowitz, Helffer-Mohammed.

Les considérations précédentes donnent une approximation très bonne du spectre liées aux quasi-modes KAM : en particulier, elles montrent que les gaps d'énergie voisine de E sont de taille $O(E^{-\infty})$.

Peut-on raffiner les observations précédentes pour donner une preuve de la conjecture de Bethe-Sommerfeld en toutes dimensions ?

6.3. L'analyse semi-classique des séparatrices. On considère un système hamiltonien semi-classique $\hat{H} = \hat{H}_0 + h^2 \hat{K}$ où H_0 est complètement intégrable ($\{H_0, H_1\} = 0$) et présente une séparatrice (variété critique $Z \subset M^{-1}(0, 0)$ de l'application $M = (H_0, H_1)$ instable). Si on suppose que l'application M est propre et que Z est formée d'une unique trajectoire, les trajectoires du système contenues dans $M^{-1}(0, 0)$ sont homoclines à Z . Classiquement la perturbation de ces trajectoires homoclines est étudiée en introduisant la *fonction de Melnikov* qui permet de prévoir l'apparition de zones hyperboliques. Y a-t-il un analogue semi-classique de cette théorie ?

Dans la situation précédente peut-on décrire des quasi-modes analogue à ceux obtenus en dimension 1 ([CP94b], [CP94a]) ou dans la cas quantiquement complètement intégrable en dimension quelconque.

FORMES NORMALES DE BIRKHOFF CLASSIQUES ET QUANTIQUES

(27 janvier 2009)

Introduction

Birkhoff [Bir66] a introduit pour l'étude d'un système hamiltonien près d'une position d'équilibre non résonant sa fameuse forme normale. Elle est un outil important dans l'étude des systèmes hamiltoniens classiques (stabilité, bifurcations). Elle a été étendue au cas résonant par Gustavson [Gus66] si bien qu'on devrait dire *forme normale de Birkhoff-Gustavson*. On pourra lire l'excellente présentation de Moser [Mos68]. De façon générale, il s'agit d'une forme normale *formelle* (non convergente en général, voir cependant le résultat récent de Stolovitch [Sto01]) basée sur un ensemble *invariant* de la dynamique classique : point fixe, orbite périodique, tore invariant. Elle a joué un grand rôle dans la mécanique classique en permettant une étude de la stabilité des trajectoires elliptiques, via le théorème KAM. Plus récemment se sont développés des analogues quantiques de ces formes normales (voir [Eck86]) qui permettent par exemple la construction de quasi-modes de fonds de puits ou associés aux trajectoires elliptiques ainsi que des quasi-modes associés aux tores lagrangiens sur lesquels la dynamique est linéaire diophantienne.

Motivé initialement par les travaux de Marc Joyeux [Joy96], nous présentons dans ce chapitre les formes normales de Birkhoff classiques et quantiques, ainsi que des applications de ces dernières à la théorie spectrale :

- (1) Etats semi-excités près d'un point d'équilibre elliptique, donnant ainsi une nouvelle présentation des résultats de J. Sjöstrand [Sjö92] et montrant comment les étendre au cas où il y a des résonances.
- (2) Quasi-modes associés à des trajectoires périodiques
- (3) Calcul de la formule des traces semi-classique
- (4) Quasi-modes associés à des tores lagrangiens

Une autre application qui n'est pas mentionnée ici est celle des points singuliers hyperboliques : on peut ainsi généraliser en toutes dimensions aux états semi-excités (bande de largeur h^α autour de la valeur critique les travaux avec B. Parisse [CP94b], [CP94a], voir aussi San Vu Ngoc [Vu 98]) en vue de construire des quasi-résonances.

Le cas classique a été étudié par de nombreux auteurs : nous nous sommes inspirés de Moser [Mos68], Siegel-Moser [SM95], Duistermaat [Dui84a], [Dui84b], Verhulst [Ver83] et aussi [DHPR69]. Bien que moins populaire, le cas quantique est aussi étudié par plusieurs auteurs en particulier dans la littérature de chimie

théorique. Cette étude est aussi liée à la méthode de moyennisation semi-classique [Col98a] et aux travaux de Sjöstrand [Sjö92].

1. Notations

Dans tout ce chapitre, on note $O(j)$ pour $O(|z|^j)$ quand $z \rightarrow 0$. On note $F = \sum_{j=0}^{\infty} F_j + O(\infty)$ le fait que la fonction $C^\infty F$ admet $\sum F_j$ comme série de Taylor.

On note Q_j l'espace des polynômes homogènes de degré j sur $T^*\mathbb{R}^n$.

2. Forme normale de Birkhoff classique pour une position d'équilibre

Soit $H(z)$ un hamiltonien C^∞ dans $T^*\mathbb{R}^n$ tel que $H(0) = 0$ et ayant à l'origine un point critique *non dégénéré*. On souhaite étudier la dynamique de \mathcal{X}_H près de la position d'équilibre 0. On se contentera dans un premier temps d'une étude dans l'espace des séries formelles. On écrit donc la série de Taylor de H

$$H = H_2 + \cdots + H_j + \cdots + O(\infty)$$

où H_j est un polynôme homogène de degré j .

2.1. Hamiltoniens quadratiques semi-simples. L'existence d'une forme normale agréable dépend de la partie quadratique H_2 de H :

l'hypothèse fondamentale est la *semi-simplicité* (diagonalisabilité sur \mathbb{C}) de la dynamique hamiltonienne linéaire X associée à H_2 ;

PROPOSITION 34. *Si $X = \mathcal{X}_{H_2}$ est un champ de vecteurs linéaire dont la matrice est semi-simple et non singulière, les valeurs propres apparaissent par paires $\pm\lambda$. Si on note pour chacune de ces paires $E_{\pm\lambda}$ la somme des 2 espaces propres correspondants, les $E_{\pm\lambda}$ sont 2 à 2 orthogonaux pour la forme ω , chaque $E_{\pm\lambda}$ est symplectique et les espaces propres E_λ et $E_{-\lambda}$ sont lagrangiens dans $E_{\pm\lambda}$.*

- (1) *Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$, le bloc correspondant est dit hyperbolique*
- (2) *Si $\lambda \in i\mathbb{R} \setminus 0$, le bloc correspondant est dit elliptique*
- (3) *Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$, le bloc correspondant $E_{\pm\lambda} \oplus E_{\pm\bar{\lambda}}$ est dit loxodromique*

Preuve.—

Si $X = Az$, on a, en écrivant la nullité en $t = 0$ de la dérivée de $\omega(\exp(tA)z, \exp(tA)z')$:

$$\forall z, z', \quad \omega(Az, z') + \omega(z, Az') = 0$$

et donc si $Az = \lambda z$ et $Az' = \mu z'$,

$$(\lambda + \mu)\omega(z, z') = 0$$

On en déduit facilement la décomposition orthogonale en somme des $E_{\pm\lambda}$, puis que chaque espace propre est isotrope et donc lagrangien dans $E_{\pm\lambda}$ (cet espace se décompose en somme directe de 2 isotropes qui sont chacun lagrangien).

□

On va déduire de ce qui précède une *forme normale complexe* pour l'hamiltonien H_2 : il existe une base canonique complexe, invariante par conjugaison complexe, telle que

$$H_2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \xi_j$$

où les $\pm\lambda_j$ sont les valeurs propres de X (avec multiplicités).

La *forme normale réelle* dépend de la nature des blocs : pour chaque bloc, on peut choisir une base canonique réelle de façon que l'hamiltonien ait une forme normale :

- (1) *Dans le cas hyperbolique*, i.e. celui des valeurs propres réelles, on a :

$$H_{hyp} = \sum_{l=1}^{n_{hyp}} \nu_l x_l \xi_l ,$$

où $\pm\nu_l$ sont les valeurs propres.

$$X = \sum \nu_l (x_l \partial_{x_l} - \xi_l \partial_{\xi_l})$$

- (2) *Dans le cas elliptique*, i.e. celui des valeurs propres imaginaires pures, on a :

$$H_{ell} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_{ell}} \omega_k (x_k^2 + \xi_k^2),$$

où les $\pm i\omega_k$ sont les valeurs propres.

$$X = \sum \omega_k (\xi_k \partial_{x_k} - x_k \partial_{\xi_k})$$

et le signe de ω_k est déterminé par le sens de la rotation dans l'espace spectral orienté par sa structure symplectique.

- (3) *Dans le cas loxodromique*, i.e. celui des valeurs propres qui ne sont ni réelles, ni imaginaires pures, on a :

$$H_{lox} = \sum_{m=1}^{n_{lox}} \Re(\mu_m (x_m + iy_m)(\xi_m - i\eta_m)) ,$$

avec

$$X = \mu_m z \partial_z - \bar{\mu}_m \zeta \partial_{\zeta}$$

et le signe de la partie imaginaire de μ_m est déterminé par le sens de la rotation.

On remarque que chaque terme de la forme normale est uniquement déterminée par le choix d'une valeur propre complexe de partie réelle ≥ 0 .

Il existe des hamiltoniens quadratiques non dégénérés non semi-simples à partir de 2 degrés de liberté ; en voici un exemple :

$$H_2 = (x_1 + x_2)\xi_1 + x_2\xi_2 .$$

Si l'hamiltonien est défini positif, il est semi-simple, car contenu dans un sous-groupe compact du groupe symplectique.

LEMME 20. *Si H_2 est une forme quadratique définie positive, la dynamique est totalement elliptique et de la forme*

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (x_j^2 + \xi_j^2) ,$$

avec les $\omega_j > 0$. Les valeurs propres de X sont les $\pm\lambda_j$ avec $\lambda_j = i\omega_j$

DÉFINITION 68. *Si H_2 est tel que $pm\lambda_1, \dots, \pm\lambda_n$ sont les valeurs propres de \mathcal{X}_{H_2} avec multiplicités, une résonance est un vecteur $k \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\sum_{j=1}^n k_j \lambda_j = 0$. On note \mathcal{R}_ω le \mathbb{Z} -module libre des résonances et $d(\omega)$ son rang.*

Soit $X = \mathcal{X}_{H_2}$ la dérivation X est un endomorphisme de Q_j . Si (z_j, w_j) sont des coordonnées linéaires (globalement invariante par conjugaison complexe) dans $T^*\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C}$ telles que le champ X soit diagonal :

$$X = \sum \lambda_j (z_j \partial_{z_j} - w_j \partial_{w_j}) ,$$

les monômes $z^\alpha w^\beta$ de Q_j sont propres pour l'action de X :

$$X z^\alpha w^\beta = \langle \lambda | \alpha - \beta \rangle z^\alpha w^\beta$$

Donc l'action de X sur Q_j est semi-simple. Le noyau est engendré par les $z^\alpha w^\beta$ où $|\alpha| + |\beta| = j$ et $\alpha - \beta$ est une résonance.

2.2. Modes normaux. Plaçons-nous dans le cas elliptique. Un *mode normal* est une trajectoire périodique de la partie quadratique de l'hamiltonien de période $T_j = 2\pi/\omega_j$. Dans le cas non résonant, il y en a exactement n . Par extension un *mode normal* sera une trajectoire périodique voisine du point d'équilibre et de période voisine de T_j .

THÉORÈME 83. (*Liapounov*) Soit ω_1 une fréquence de H_2 telle que les $\omega_j, j > 1$ ne soit pas des multiples de ω_1 . Il n'y a alors qu'un mode normal de H_2 de période T_1 dans chaque couche d'énergie. Les modes normaux de H de période voisine de T_1 remplissent un germe de variété symplectique tangente à l'espace de dimension 2 où vit le mode normal de H_2 . En particulier la période est une fonction différentiable de $H : T(H) = T_1 + O(H)$.

A. Weinstein [Wei73b] a montré l'existence de $\geq n$ modes normaux dans le cas où H_2 est défini positif. Pour une étude fine de leur géométrie dans le cas de la résonance 1 : 2 voir [Dui84a].

2.3. La forme normale de Birkhoff-Gustavson classique générale. La forme normale de Birkhoff générale est donnée par l'énoncé suivant :

THÉORÈME 84. (*de Birkhoff*) Soit $H = \sum_{j=2}^{\infty} H_j + O(\infty)$ un hamiltonien C^∞ tel que H_2 est semi-simple et non-dégénéré, il existe une transformation canonique χ tangente à l'identité en 0 et telle que

$$H \circ \chi = H_2 + \sum_{j=3}^{\infty} K_j + O(\infty)$$

avec $\forall j \geq 2, \{H_2, K_j\} = 0$. On peut même écrire

$$H \circ \chi = H_2 + K + R$$

où K et R sont C^∞ , $\{H_2, K\} = 0$ et $R = O(\infty)$.

LEMME 21. Si $S = O(j)$ avec $j \geq 3$, et est à support compact, le flot χ_t à l'instant 1 de \mathcal{X}_S vérifie

$$\chi_1(z) = z + \mathcal{X}_S + O(2j - 3)$$

Preuve du lemme 21 : pour $0 \leq t \leq 1$, on a $\chi_t(z) = O(1)$. Donc

$$\chi_t(z) - z = \int_0^t \mathcal{X}_S(\chi_s(z)) ds = O(j - 1)$$

et en reportant $\chi_t(z) - z = O(j - 1)$ dans la formule précédente avec $t = 1$:

$$\chi_1(z) = z + \mathcal{X}_S(z) + O((j - 1) + (j - 2)) .$$

Fin de la preuve du lemme 21.

Preuve.—

Soit $S \in Q_j$ avec $j \geq 3$. D'après le lemme 21, il existe une transformation canonique $\chi = Id + \mathcal{X}_S + O(2j - 3)$. On a

$$H \circ \chi = H + \{S, H_2\} + O(j + 1) .$$

On est ainsi ramené à résoudre les équations *homologiques* :

$$K_j + \{H_2, S\} = H_j ,$$

où H_j est donnée et les inconnues sont $S \in Q_j$ et $K_j \in Q_j$ tel que $\{H_2, K_j\} = 0$. Soit

$$X = \mathcal{X}_{H_2} ,$$

l'équation se réécrit :

$$XS = H_j - K_j .$$

De la semi-simplicité de l'action de X sur Q_j , on déduit

$$Q_j = \ker X \oplus \operatorname{im} X ,$$

où $\ker X$ admet comme base les $x^\alpha \xi^\beta$ avec $\alpha - \beta \in \mathcal{R}_\omega$. On écrit donc :

$$H_j = \{H_2, S\} + K_j ,$$

où $\{H_2, K_j\} = 0$. Le produit $\chi_j \circ \dots \circ \chi_3$ converge dans les séries formelles et permet par Borel de construire χ tel que

$$H \circ \chi = H_2 + \sum K_j + O(\infty)$$

et $\chi^*(\omega) = \omega + O(\infty)$. Par la méthode de Moser, on peut modifier χ par un difféo tangent d'ordre infini à l'identité de façon que le nouveau difféo soit canonique.

On peut donc écrire K comme une série formelle des polynômes invariants générateurs (en nombre fini d'après la section 4), sommer cette série formelle (Borel) et obtenir ainsi $K \in C^\infty$ qui Poisson commute avec H_2 .

□

Remarque : le terme $\overline{H_3}$ est obtenu par *moyennisation* de H_3 sur les trajectoires (quasi-périodiques) de X :

$$\overline{H_3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t H_3(\varphi_s(z)) ds ,$$

où φ_s est le flot de X . Le 2ème terme de la forme normale est donc identique à celui donné par la méthode de moyennisation pour $H_2 + \varepsilon H_3$.

3. Le cas non résonant

DÉFINITION 69. On dit que H_2 est non résonant s'il n'y a pas de résonance non triviales, i.e. si, après choix d'une suite λ_j , $j = 1, \dots, n$ telle que le spectre avec multiplicité soit donné par les $\pm \lambda_j$, la relation

$$\sum_{j=1}^n k_j \lambda_j = 0$$

avec $k \in \mathbb{Z}^n$ implique $k = 0$.

Si H_2 est non résonant, il est évidemment semi-simple et non dégénéré. Dans la forme normale complexe, il est facile de voir que le noyau dans Q_j de la dérivation par rapport à X est engendré par les $x^\alpha \xi^\alpha$ avec $2|\alpha| = j$. On voit ainsi que les K_j non nuls sont tous de degré pairs et que ce sont des fonctions des monômes $x_j \xi_j$.

Dans le cas hyperbolique, la forme normale de H est donnée par

$$H = \Phi(x_1 \xi_1, \dots, x_n \xi_n) + O(\infty)$$

avec $\Phi \in C^\infty$.

De même dans le cas elliptique, la forme normale est

$$H = \Phi(\rho_1, \dots, \rho_n) + O(\infty)$$

avec $\rho_j = \frac{1}{2}(x_j^2 + \xi_j^2)$.

La forme normale de Birkhoff dans le cas non résonant ramène donc H à un hamiltonien complètement intégrable modulo $O(\infty)$. Par exemple, dans le cas elliptique, on peut prendre comme coordonnées, dites *actions-angles*, $(\rho_1, \dots, \rho_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$ avec $\omega = \sum d\rho_j \wedge d\theta_j$.

On en déduit que l'on ne peut pas supprimer ce terme $O(\infty)$ en général, car un système hamiltonien générique n'est pas complètement intégrable. La remarque précédente permet aussi de voir un hamiltonien près d'une position d'équilibre comme une perturbation d'un système intégrable et donc d'essayer de lui appliquer la théorie KAM.

Remarque importante : on dit qu'une résonance $k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$ est d'ordre j si $\|k\| = |k_1| + \dots + |k_n| = j$. Si H_2 n'a pas de résonance d'ordre $\leq j$, la forme normale de Birkhoff tronquée à l'ordre j

$$H = H_2 + K_3 + \dots + K_j + O(j+1)$$

ne voit pas les résonances et donc ne contient que des termes pairs qui sont polynômiaux en les $x_j \xi_j$ (cas hyperbolique) ou les $x_j^2 + \xi_j^2$ (cas elliptique).

Application de KAM : supposons que H_2 soit elliptique et n'admette pas de résonances d'ordre ≤ 4 . On a la forme normale à l'ordre 4

$$H = \sum \omega_j \rho_j + Q(\rho_1, \dots, \rho_n) + O(5)$$

Le vecteur des fréquences du système tronqué à l'ordre 4 est

$$\omega(\rho) = \Omega + B\rho$$

où B est la matrice de la forme quadratique Q .

Si B est non dégénérée, on peut appliquer le théorème KAM qui garantit l'existence pour H de beaucoup de tores invariants près de O . En fait la densité de ces tores tend vers 1 près de O . On en déduit un résultat de presque stabilité : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de O tel que les trajectoires issues de U restent dans U avec la probabilité $1 - \varepsilon$. Il n'est pas exclus que certaines trajectoires s'échappent en un temps exponentiellement long grâce à la *diffusion d'Arnold*.

4. L'algèbre des invariants classiques

Le théorème 84 prévoit que les polynômes P du développement de Taylor de la forme normale ont un crochet de Poisson nul avec H_2 ou encore vérifient $XP = 0$. L'algèbre \mathcal{C} des polynômes invariants est une sous-algèbre de celle \mathcal{P} des polynômes. On a la :

PROPOSITION 35. *L'algèbre \mathcal{C} est de type fini : il existe des polynômes invariants homogènes P_1, \dots, P_N tels que tout polynôme invariant est de la forme $\Pi(P_1, \dots, P_N)$ où Π est un polynôme à N variables. \mathcal{C} est stable par crochet de Poisson.*

Preuve. –

Considérons un système de coordonnées complexes où X est diagonal. Les monômes sont alors des vecteurs propres pour l'action de X et on appelle $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$ la projection dont le noyau est engendré par les monômes de valeur propre non nulle. π est \mathcal{C} linéaire. Si I est un idéal de \mathcal{C} , on a $I = I\mathcal{P} \cap \mathcal{C}$ où $I\mathcal{P}$ est l'idéal de \mathcal{P} engendré par I , en effet, si $p = \sum i_j p_j \in \mathcal{C}$ avec $i_j \in I$ and $p_j \in \mathcal{P}$, on a aussi $p = \sum i_j \pi(p_j)$. Comme \mathcal{P} est noethérien, on en déduit que \mathcal{C} l'est aussi et donc que l'idéal maximal $p(0) = 0$ de \mathcal{C} est engendré comme idéal par des monômes P_1, \dots, P_N . Si $p \in \mathcal{C}$ est homogène, on écrit $p = \sum Q_i P_i$ avec $Q_i \in \mathcal{C}$ de degré $<$ à celui de p et on itère.

□

La construction d'un système de générateurs et de relations explicite est un problème géométrique raisonnable. Si Γ est l'intersection de $(\mathbb{Z}_+)^n$ avec la relation de résonance $\langle \lambda | \alpha \rangle = 0$, on doit trouver des générateurs sur \mathbb{Z}_+ de ce cône. On le triangule en cônes simpliciaux, pour lesquels le problème est assez simple (voir [Weh93]).

5. Unicité de la forme normale de Birkhoff

Dans le cas non résonant, la série $\sum K_j$ est unique une fois que H_2 est fixée : cela vient du fait que les transformations canoniques qui préservent H_2 préservent les monômes invariants. Il suffit de reprendre la démonstration en utilisant le fait qu'à chaque étape S est définie modulo un terme qui commute avec H_2 et donc qui préserve les K_j . L. Stolovitch a montré récemment ([Sto01]) que si H est analytique, non résonant et non dégénéré au sens de KAM, la forme normale de Birkhoff de H est convergente : H est conjugué à un hamiltonien analytique intégrable perturbé par un terme plat.

Lorsqu'il y a des résonances, le commutateur de H_2 est plus gros, même en ce qui concerne sa partie linéaire. Par exemple dans le cas où tous les ω_j sont égaux, on trouve le groupe $U(n)$. Dans l'article [Dui84b], ce fait est exploité dans le cas de la résonance 1 : 1 : 2.

6. Résonances dans le cas elliptique

Soit

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (x_j^2 + \xi_j^2)$$

Le groupe des résonances est le sous-groupe R de \mathbb{Z}^n dont les éléments k sont les relations $\sum k_j \omega_j = 0$. On note d le rang de ce groupe isomorphe à \mathbb{Z}^d . Pour la suite, on doit faire des raisonnements de dualité, il est donc utile de poser $E = \mathbb{R}^n$ et de désigner par E^* son dual. Soit C le sous-espace de E^* orthogonal à $R \subset E \cap \mathbb{Z}^n$. Il

est de dimension $\nu = n - d$. Soient $\Omega_1, \dots, \Omega_\nu$ une base de C formée de co-vecteurs entiers. On a alors, en posant $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$:

$$\Omega = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \Omega_j$$

car $\Omega \in E$ est dans l'orthogonal de R par définition de R . Les α_j sont linéairement indépendants sur \mathbb{Z} . En effet, sinon on peut exprimer l'un d'eux, soit α_1 comme combinaison rationnelle des autres et Ω s'exprime alors comme combinaison linéaire de $\nu - 1$ vecteurs entiers. On en déduit que R est de dimension $> d$ d'où contradiction.

PROPOSITION 36. *Si $K \in Q_j$ Poisson commute avec H_2 , il Poisson commute aussi avec les $I_j = \langle \Omega_j | \rho \rangle$ qui sont à flots périodiques. Si $d = 1$, la forme normale de Birkhoff est complètement intégrable formellement :*

$$I_1, \dots, I_{n-1}, K$$

sont en involution.

Preuve. –

Supposons que $\{K, H_2\} = 0$. On peut traiter le problème dans la forme normale complexe avec $\rho_j = x_j \xi_j$. Si $x^\alpha \xi^\beta$ est *résonant*, $\alpha - \beta \in R$ et donc $\alpha - \beta$ est orthogonal à $R^\circ = C$, c'est à dire aux Ω_j . On en déduit que $\{x^\alpha \xi^\beta, I_j\} = 0$.

□

Il y a une démonstration purement dynamique de la proposition précédente : soit X le champ hamiltonien associé à H_2 et X_j ceux associés aux I_j . On a

$$X = \sum \alpha_j X_j$$

On en déduit que si $\{H, H_2\} = 0$, H est constante sur les tores engendrés par le flot joint des X_j sur lesquels la dynamique de X est irrationnelle, et donc les crochets $\{H, I_j\}$ sont nuls.

6.1. La variété des orbites. L'algèbre \mathcal{C} des polynômes qui Poisson commutent avec H_2 peut être vue comme l'algèbre des fonctions polynomiales sur la variété des orbites : un polynôme de \mathcal{C} est constant sur les orbites de H_2 donc sur leurs adhérences (de Zariski) qui sont les tores de dimension ν engendré par les flots des I_j . Cette variété (singulière) \mathcal{O} est de dimension $2n - \nu$. Comme \mathcal{C} est stable par crochet de Poisson, \mathcal{O} est une variété de Poisson. Ses feuilles symplectiques sont les familles de tores Z_a contenus dans une même variété $\Sigma_a = \{I_1 = a_1, \dots, I_\nu = a_\nu\}$: Z_a est la réduite de Σ_a par l'action du tore de dimension ν . Z_a a naturellement une structure holomorphe et est de dimension $2(n - \nu)$, en effet Z_a , pour a générique s'interprète aussi comme quotient de $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$ par le tore complexe $(\mathbb{C}^*)^\nu$, flot à temps complexes des I_j .

On verra plus bas comment Z_a se quantifie et donne ainsi lieu à des espaces de Hilbert \mathcal{H}_a sur lesquels \hat{K} opère comme un opérateur de Toeplitz.

6.2. La résonance 1 : 2. C'est le cas $n = 2$, $\omega_1 = 1$ et $\omega_2 = 2$. Ce modèle se rencontre pour le pendule élastique ou pour les molécules di-atomiques. L'algèbre des polynômes K qui Poisson commutent avec H_2 est engendrée par $|z_1|^2$, $|z_2|^2$, $z_1^2 \bar{z}_2$, $\bar{z}_1^2 z_2$. Dans cet exemple, \mathcal{O} est donné par la partie réelle de $X_1^2 X_2 = X_3 X_4 \subset \mathbb{C}^4$ pour l'involution qui échange X_3 et X_4 . Z_a est topologiquement une 2-sphère avec une singularité conique.

Le cas le plus simple est celui de $H_2 + H_3$ avec $H_3 = \Re(z_1^2 \bar{z}_2)$. La dynamique de cet hamiltonien $H_2 + H_3$ est intéressante, car elle présente sur chaque couche d'énergie de H_2 3 orbites périodiques dont 2 sont stables (extrémas de H_3 sur la sphère $H_2 = E$) et la 3ème (le mode normal correspondant à la trajectoire de période moitié) est instable. Voir [Dui72] et [Dui84a].

6.3. La résonance 1 : 1 : \dots : 1. Dans ce cas, toutes les orbites de X sont périodiques de période 1 et l'espace des orbites d'une couche d'énergie de H_2 est l'espace projectif complexe. L'espace complexifié des polynômes invariants par X est donc engendré par les monômes $z^\alpha \bar{z}^\beta$ avec $|\alpha| = |\beta|$ et donc $\bar{H}_j = 0$ si j est impair. La variété Z_a est un projectif complexe de dimension $n - 1$ et \mathcal{O} le cône sur cette variété.

Dans le cas $j = 4$ et $n = 2$, on trouve les polynômes

$$\|z_1\|^4, \|z_2\|^4, \Re(z_1^2 \bar{z}_2^2), \Im(z_1^2 \bar{z}_2^2) .$$

Le cas $j = n = 2$ est aussi intéressant dans le cas d'une presque résonance

$$H = \frac{1}{2}(\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2) + \varepsilon \|z_2\|^2 + H_3 + \dots ,$$

on a alors une forme normale

$$H = H_2 + \varepsilon \|z_2\|^2 + K_4 + O(5).$$

6.4. La dimension $n \geq 3$. Dans ce cas, la dynamique formelle reste intégrable si $d(\omega) = O$ ou 1 et elle n'est pas en général intégrable comme le décrit en détail Duistermaat dans [Dui84b] pour la résonance 1 : 1 : 2.

6.5. Convergence et le cas $n = 1$. En général, les formes normales de Birkhoff ne sont pas convergentes entre autres (mais pas uniquement) à cause de la présence des petits diviseurs (voir [MM74]). Par exemple dans le cas elliptique non résonant, un hamiltonien générique n'est pas complètement intégrable alors que sa forme normale de Birkhoff l'est.

Il y a 2 cas où des théorèmes de convergence ont été prouvés

- (1) Le cas purement hyperbolique (Sternberg), voir [GS77]
- (2) Le cas $n = 1$. Si H admet en 0 un point critique non dégénéré, on peut appliquer le lemme de Morse isochore [CV79] qui produit une transformation canonique χ telle que

$$H \circ \chi = \Phi(H_2)$$

7. Le cas non Morse en dimension 1

Pour plus de détails, voir [Col01].

7.1. Formulation pour les idéaux en dimension 1. Soit $F_0(x, \xi) : T^*\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un germe de fonction de Morse avec $F_0(0) = 0$ et F_ε une déformation lisse de F_0 . Par application du lemme de Morse isochore avec paramètre, on peut écrire

$$F_\varepsilon \circ \chi_\varepsilon(x, \xi) = \Phi_\varepsilon(H_2(x, \xi))$$

où $H_2 = x\xi$ ou $H_2 = x^2 + \xi^2$. La fonction Φ_0 s'annule transversalement en 0 et donc Φ_ε admet un zéro $a(\varepsilon)$ dépendant de façon lisse de ε . On a donc :

$$F_\varepsilon \circ \chi_\varepsilon(x, \xi) = E_\varepsilon(x, \xi)(H_2(x, \xi) - a(\varepsilon))$$

La série de Taylor de $a(\varepsilon)$ est définie de façon unique. Le germe d'idéal $F_0 = 0$ admet donc une déformation symplectique universelle donnée par $H_2 - t = 0$. La singularité de Morse est ainsi de *codimension* 1.

7.2. Déformation symplectique d'un idéal lagrangien. On peut considérer plus généralement un germe d'idéal $F = 0$ où $F(0) = 0$ et F admet un point critique dégénéré en 0. Par exemple $F = \xi^2 + x^k$, $k \geq 3$. On dira que l'idéal $F = 0$ est de codimension N si l'espace vectoriel

$$\mathcal{E} / (\mathcal{E}F + \{\mathcal{E}, F\})$$

est de dimension N sur \mathbb{R} où \mathcal{E} est l'espace des germes de fonctions en 0. Si G_1, \dots, G_N est une base d'un supplémentaire de $\mathcal{E}F + \{\mathcal{E}, F\}$ dans \mathcal{E} l'idéal $F + \sum_{j=1}^N a_j G_j$ est la déformation universelle de F .

THÉORÈME 85. *Si F_ε est une déformation lisse de F , il existe χ_ε et des fonctions $a_j(\varepsilon)$ telles que*

$$F_\varepsilon \circ \chi_\varepsilon = E_\varepsilon \left(F_0 + \sum a_j(\varepsilon) G_j \right) + O(\varepsilon^\infty)$$

8. Le cas perturbatif

On suppose que l'on a une famille C^∞ d'hamiltoniens H_ε telle que $(H_0)_2$ vérifie les hypothèses de non dégénérescence et de semi-simplicité. On peut évidemment supposer quitte à bouger l'origine et à translater H_ε que les H_ε admettent tous 0 comme point critique non dégénéré et de valeur critique 0. On a donc une série formelle double

$$H_\varepsilon = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k H_{j,k}$$

avec $H_{j,k} \in Q_j$. La partie quadratique $H_{2,\varepsilon} = \sum \varepsilon^k H_{2,k} + O(\varepsilon^\infty)$ est non dégénérée, mais pas forcément semi-simple. Il est souvent utile de considérer une telle forme pour traiter les *presque résonances* comme perturbations de résonances.

On a la généralisation suivante du théorème de Birkhoff :

THÉORÈME 86. *Il existe une transformation canonique χ_ε dépendant de façon C^∞ de ε telle que l'on ait*

$$H_\varepsilon \circ \chi_\varepsilon = H_{2,0} + \sum_{j \geq 2, k \geq 0, j+k \geq 3} \varepsilon^k K_{j,k} + O(\varepsilon^\infty + |z|^\infty)$$

avec $K_{j,k} \in Q_j$ tels que $\{H_{2,0}, K_{j,k}\} = 0$.

Ce théorème se montre comme le théorème de Birkhoff en regroupant par exemple les termes tels que $j + k = J \geq 3$.

Dans le cas d'une presque résonance on a ainsi le choix entre la forme normale de Birkhoff non résonante et la précédente. La transformation canonique de normalisation non résonante diverge lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

EXEMPLE 8.1. Soit $H_\varepsilon = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2) + \varepsilon|z_2|^2 + \Re(z_1^2 z_2^2)$. L'hamiltonien précédent est dans sa forme normale résonante pour tout ε . La forme normale non résonante à l'ordre $j \geq 4$ valable dans un voisinage de $\varepsilon = 0$ est donnée par la partie quadratique de l'hamiltonien. Il y a donc lieu de comparer ces 2 dynamiques lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

La forme normale résonante est toujours exacte dans ce cas. La forme non résonante est inexacte dans le régime où $\varepsilon \ll E$, car elle ne prévoit pas le mode normal hyperbolique présent pour $\varepsilon \ll E$.

9. Cas d'une orbite périodique non dégénérée

9.1. Forme normale générale. Soit γ_0 une orbite périodique de période $T_0 > 0$ de l'hamiltonien H normalisé pour que $H(\gamma_0) = 0$.

On fera dans la suite les hypothèses suivantes sur l'application de Poincaré linéarisée P_0 de γ_0 :

- (1) 1 n'est pas valeur propre P_0 .
- (2) P_0 est semi-simple.

Soit Σ le cylindre d'orbites périodiques associé à γ_0 , i.e. la réunion des orbites γ_E pour E voisin de 0. Σ est un cylindre ouvert dans T^*S^1 : il existe des coordonnées canoniques (θ, τ) avec $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\tau \in I_1$ voisinage de 0 dans \mathbb{R} telles que $H|_\Sigma = H_0(\tau)$ et $\omega|_\Sigma = d\tau \wedge d\theta$. On a la forme normale de Birkhoff centrée sur γ_0 donnée par le :

THÉORÈME 87. Il existe des coordonnées canoniques $(\theta, \tau, y, \eta) \in T^*S^1 \times T^*\mathbb{R}^{n-1}$ (ou sur un quotient de $T^*S^1 \times T^*\mathbb{R}^{n-1}$ par une involution $I(\theta, z) = (\theta + \pi, \sigma z)$) telles que :

$$H(\theta, \tau, y, \eta) = a\tau + H_2(y, \eta) + \sum_{j=3}^{\infty} K_j(\theta, \tau, y, \eta) + O(\infty)$$

où $O(\infty)$ désigne une fonction plate sur $\gamma_0 = \{(\theta, 0, 0, 0)\}$ et les fonctions K_j sont quasi-homogènes de degré j en (τ, y, η) (i.e. $K_j(\theta, t\tau, t^2y, t^2\eta) = t^{2j}K_j(\theta, \tau, y, \eta)$), sans termes linéaires en (y, η) et Poisson commutent avec $a\tau + H_2(y, \eta)$.

En général on ne peut pas avoir une telle forme normale le long de Σ car les valeurs propres de l'application de Poincaré linéaire P_E varient avec E ; cependant, si H est l'hamiltonien des géodésiques d'une variété riemannienne, ce n'est pas le cas et on peut avoir une forme normale de Birkhoff modulo des fonctions plates sur Σ (voir [FG91]).

Preuve.—

On commence par introduire des coordonnées (θ, τ, y, η) de façon que Σ soit la sous-variété symplectique $T^*S^1 \times 0$. On peut le faire d'après [Wei77] car le fibré normal symplectique à Σ est trivial (un fibré orientable sur un cercle est trivial et donc a fortiori un fibré symplectique). On a alors $H = H_0(\tau) + K(\theta, \tau, y, \eta)$ où K est

critique sur Σ car le gradient symplectique de H sur Σ est égal à celui de $H_0(\tau)$. On écrit la série de Taylor de H le long de γ_0 :

$$H = a\tau + H_2(\theta, y, \eta) + H_3(\theta, \tau, y, \eta) + \dots$$

où H_j est quasi-homogène de degré j en (τ, y, η) et n'a pas de termes linéaires en y, η . On peut s'arranger pour que H_2 soit indépendant de θ à l'aide du :

LEMME 22. *Soient 2 hamiltoniens H et K ayant une même orbite périodique γ_0 de même période T_0 et telle que les différentielles des 2 flots à l'instant T_0 soient conjuguées dans le groupe symplectique, alors il existe une transformation canonique χ préservant γ_0 telles que les hamiltoniens $H \circ \chi$ et K coïncident à l'ordre 2 sur γ_0 . Si le cylindre Σ d'orbites périodiques engendré par γ_0 est le même pour les 2 hamiltoniens on peut faire que χ soit l'identité sur Σ .*

Preuve du lemme 22 : On cherche

$$\chi(\theta, \tau, y, \eta) = (\theta, \tau + q(\theta, y, \eta), L(\theta, y, \eta))$$

où q est quadratique en (y, η) et L linéaire symplectique en (y, η) . On détermine d'abord L , puis q de façon que χ soit canonique.

- Détermination de L : comme l'application de Poincaré est la même, on pose

$$L(\theta, z) = \phi_{H, -\theta/a} \circ \phi_{K, \theta/a}(z)$$

qui est lisse en θ . Il s'agit d'une version symplectique du lemme classique qui dit que 2 fibrés vectoriels avec connection sur le cercle qui ont même holonomie sont isomorphes.

- Il reste à déterminer q , pour cela on voit que

$$\chi^*(d\tau \wedge d\theta + d\eta \wedge dy) = d\tau \wedge d\theta + d_{y,\eta}q \wedge d\theta + d\eta \wedge dy + \alpha \wedge d\theta$$

où α est fermée en (y, η) et on doit avoir $d_{y,\eta}q = -\alpha$.

Fin de la preuve du lemme 22.

Si P_0 est dans l'image de l'exponentielle pour le groupe symplectique, on peut prendre H_2 indépendant de θ . Sinon (cas de valeurs propres < 0 différentes de -1 , i.e. bloc 2×2 hyperbolique inverse) il existe une involution symplectique σ telle que $P_0 \circ \sigma$ soit dans cette image et on conclut comme dans [CV00] à l'aide d'un fibré d'holonomie σ sur Σ .

Supposons donc que, pour $N \geq 3$,

$$H = a\tau + H_2(y, \eta) + \sum_{j=3}^{N-1} K_j(\theta, \tau, y, \eta) + H_N(\theta, \tau, y, \eta) + \dots$$

où les K_j satisfont les conclusions du théorème où H_N est homogène de degré N en (τ, y, η) sans termes linéaires en (y, η) . On va utiliser une transformation canonique χ qui soit le flot à l'instant 1 de \mathcal{X}_S où $S(\theta, \tau, y, \eta)$ est homogène de degré N en (τ, y, η) . On veut donc avoir :

$$\{a\tau + H_2, S\} = H_N - K_N$$

Par intégration le long du flot de l'hamiltonien $a\tau + H_2$ de z à $P_0(z)$, il vient :

$$S(P_0(z)) - S(z) = \int_0^{T_0} (H_N - K_N) dt$$

ou encore, comme K_N doit Poisson commuter avec $a\tau + H_2$:

$$S(P_0(z)) - S(z) = \int_0^{T_0} H_N dt - T_0 K_N$$

Il suffit alors de remarquer que comme P_0 est semi-simple il en est de même de son action par composition sur les polynômes homogènes et qu'on peut ainsi choisir K_N sur une section de Poincaré invariante par P_0 . On prolonge alors K_N en une fonction invariante par le flot linéaire. Il reste alors à résoudre pour S par intégration le long des trajectoires.

□

9.2. Résonances : cas elliptique. Soit $i\omega_j$, $j = 1, \dots, n-1$ les valeurs propres de la dynamique linéaire associée à H_2 . Les résonances sont les $k = (k_0, k') \in \mathbb{Z}^n$ tels que

$$ak_0 + \langle \omega | k' \rangle = 0$$

Les valeurs propres de l'application de Poincaré sont les $\lambda_j = e^{i\omega_j T_0}$ et leurs conjugués ; la relation de résonance précédente exprime donc qu'un monôme de ces valeurs propres est égal à 1.

En l'absence de résonances, les polynômes invariants sont les polynômes en τ et ρ_j . On a donc complète intégrabilité formelle dans ce cas et les H_j sont tous indépendants de θ .

On aura besoin plus loin de la :

PROPOSITION 37. *Si aucune résonance ne vérifie $k_0 \neq 0$, la forme normale est indépendante de θ . Si l'application de Poincaré P_0 admet une racine k -ième de l'unité comme valeur propre, la forme normale contient explicitement θ .*

10. Cas d'un tore lagrangien invariant

LEMME 23. *Soit Λ un tore lagrangien invariant sur lequel la dynamique de \mathcal{X}_H est quasi-périodique avec ω diophantien. Il existe des coordonnées (x_j, ξ_j) canoniques telles que Λ soit le tore $\xi = 0$ et que $H = a + \omega \cdot \xi + Q(\xi) + O(\xi^3)$, où $Q(\xi)$ est une forme quadratique.*

Preuve.—

D'après Weinstein, il existe un difféomorphisme canonique d'un voisinage de Λ sur un voisinage de la section nulle de $T^*\Lambda$. On a alors $H = a + \omega \xi + R(x, \xi)$ avec $R = O(\xi^2)$ (identification de \mathcal{X}_H avec $\sum \omega_j \frac{\partial}{\partial x_j}$). On cherche alors une transformation canonique qui fixe Λ et change R en $Q(\xi) + O(\xi^3)$. On peut chercher χ comme flot à l'instant 1 de $\mathcal{X}_{S(\xi, x)}$ avec $S = O(\xi^2)$. On a alors

$$\chi(x, \xi) = (x + O(\xi), I - \frac{\partial S}{\partial x} + O(\xi^3)).$$

Donc

$$H \circ \chi = \omega \xi - \omega \cdot \frac{\partial S}{\partial x} + R(x, \xi) + O(\xi^3) .$$

Il faut donc résoudre

$$R(x, \xi) - \omega \frac{\partial S}{\partial x} = Q(\xi) + O(\xi^3) .$$

En prenant les termes d'ordre 2 dans les séries de Taylor en ξ , il vient

$$R_{i,j}(x) - \omega \cdot \frac{\partial S_{i,j}(x)}{\partial x} = Q_{i,j} .$$

On développe $R_{i,j} = \sum r_l e^{ilx}$ et $S_{i,j} = \sum s_l e^{ilx}$ en séries de Fourier et on pose $Q_{i,j} = r_0$, et

$$s_l = \frac{r_l}{< l | \omega >} .$$

La condition diophantienne sur ω montre que S est C^∞ .

□

On a une forme normale de Birkhoff classique près de Λ (comparer à [Col77a] et [Col80]).

THÉORÈME 88. *La forme normale de Birkhoff classique est de la forme*

$$H = H(\Lambda) + \omega \xi + \sum_{j=2}^{\infty} Q_j(\xi) + O(|\xi|^\infty)$$

où Q_l est homogène de degré l en ξ . Donc formellement le système est complètement intégrable près de Λ .

11. Oscillateurs harmoniques

11.1. Le spectre de l'oscillateur harmonique. Dans ce §, $h > 0$ est fixé. Les résultats sont exacts et il n'y a pas de semi-classique.

On va traiter le cas d'un point d'équilibre elliptique. L'ellipticité n'est pas nécessaire pour les résultats de forme normale, mais l'est pour les constructions de quasi-modes. On posera, pour $\omega \in \mathbb{R}^n$, $O_j = \frac{1}{2}(-h^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2)$ et

$$\hat{H}(\omega) = \sum_{j=1}^n \omega_j O_j .$$

On s'intéresse à la décomposition spectrale d'un opérateur $\hat{H}(\omega)$ avec $\omega_j \in \mathbb{R}$. Il est classique que $\hat{H}(\omega)$ est essentiellement auto-adjoint.

Son spectre avec multiplicité est l'ensemble des $\lambda_{k_1, \dots, k_n} = h \sum_{j=1}^n \omega_j (k_j + \frac{1}{2})$ avec $k_j \in \mathbb{N}$. Si

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(-h \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j), \quad b_j = a_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(h \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j) .$$

sont les opérateurs de création et d'annihilation l'espace propre associé à la plus petite valeur propre $\frac{1}{2}(\sum \omega_j)$ est l'intersection des noyaux des b_j , il est engendré par $\varphi_0 = \exp(-(\sum x_j^2)/2h)$. La fonction $\varphi_k = a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} \varphi_0$ vérifie $\hat{H}(\omega) \varphi_k = (h \sum_{j=1}^n \omega_j (k_j + \frac{1}{2})) \varphi_k$ et ces fonctions forment une base de vecteurs propres de $\hat{H}(\omega)$.

11.2. Commutateurs. On a besoin du

LEMME 24. Soit $\widehat{H}_2 = \widehat{H}(\omega)$ et \mathcal{P}_k l'espace des opérateurs différentiels sur \mathbb{R}^n à coefficients polynômiaux dont le degré total en $x_j, \frac{\partial}{\partial x_j}$ est $\leq k$. Alors l'endomorphisme

$$P \rightarrow \text{ad}\widehat{H}_2(P) = [\widehat{H}_2, P]$$

est semi-simple et ses valeurs propres sont les

$$h \sum_{j=1}^n \omega_j (\alpha_j - \beta_j)$$

avec $|\alpha| + |\beta| \leq j$. En particulier, \mathcal{P}_k est somme directe de l'image et du noyau de $\text{ad}\widehat{H}_2$. Ce noyau est le quantifié de Weyl du commutant classique.

Preuve. –

Pour démontrer le lemme, on utilise une représentation des opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux en termes des opérateurs de création et d'annihilation.

On a : $O_j = a_j b_j - \frac{h}{2} = b_j a_j + \frac{h}{2}$. Tout élément \widehat{P} de \mathcal{P}_j s'écrit de façon unique sous la forme :

$$\widehat{P} = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq j} x_{\alpha, \beta} a^\alpha b^\beta ,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$. $a^\alpha = a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}$ et de même b^β . On a ainsi :

$$[\widehat{H}_2, a^\alpha b^\beta] = h < \omega | \beta - \alpha > a^\alpha b^\beta .$$

La seconde assertion résulte du fait que si H est quadratique

$$[\widehat{H}, \text{Op}_{\text{Weyl}}(p)] = \frac{h}{i} \text{Op}_{\text{Weyl}}(\{H, p\}) .$$

□

11.3. L'algèbre $\widehat{\mathcal{C}}$ et les polyades. Le lemme 24 introduit les opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux qui commutent avec \widehat{H}_2 . Soit $\widehat{\mathcal{C}}$ l'algèbre de ces opérateurs.

THÉORÈME 89. $\widehat{\mathcal{C}}$ est aussi l'algèbre des opérateurs qui commutent avec les oscillateurs harmoniques $\widehat{I}_j = \widehat{H}(\Omega_j)$ quantifiés des I_j , $j = 1, \dots, \nu$. Soit P_1, \dots, P_N des générateurs homogènes de \mathcal{C} . Soient \widehat{P}_j les quantifiés de Weyl des P_j . Les \widehat{P}_j engendrent l'algèbre $\widehat{\mathcal{C}}$ et, plus précisément, tout $\widehat{P} \in \widehat{\mathcal{C}}$ s'écrit :

$$\widehat{P} = \sum a_\alpha \widehat{P}_1^{\alpha_1} \dots \widehat{P}_N^{\alpha_N}$$

Tout espace propre de \widehat{H}_2 est un espace propre joint de \widehat{I}_j .

Preuve. –

Soit $\widehat{p} \in \widehat{\mathcal{C}}$, le symbole principal (polynôme homogène en (x, ξ)) est dans \mathcal{C} . On raisonne par récurrence sur le degré total en x et ∂_x , q , de \widehat{p} : si $\sigma_{\widehat{p}}(\widehat{p}) = \sum a_\alpha P_1^{\alpha_1} \dots P_N^{\alpha_N}$, on retranche de \widehat{p} le polynôme en les \widehat{P}_j donné par

$$\sum a_\alpha \widehat{P}_1^{\alpha_1} \dots \widehat{P}_N^{\alpha_N}$$

et on est ramené au degré $q - 1$.

La valeur propre $\lambda = h(\sum \omega_j(k_j + \frac{1}{2}))$ de \widehat{H}_2 se décompose de façon unique sous la forme de somme de valeurs propres des \widehat{I}_j :

$$\lambda = h \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j < \Omega_j |k + \frac{1}{2}| > ,$$

en reprenant les notations de la section 6. Donc l'espace propre E_λ est un espace propre joint des \widehat{I}_j . Les E_λ sont les *espaces de Hilbert quantifiés* des Z_a lorsque a est dans le spectre joint des \widehat{I}_j . □

DÉFINITION 70. *Les espaces propres E_λ s'appellent les polyades de \widehat{H}_2 . Les valeurs propres λ sont paramétrées par l'ensemble des points de \mathbb{R}^ν images de $\mathbb{N}^n + \frac{1}{2}$ par l'application $\Phi : t \rightarrow (< \Omega_j |t >)$.*

DÉFINITION 71. *On dit que H_2 de fréquences ω vérifie (S) si on peut choisir les Ω_j à coefficients entiers ≥ 0 .*

Cela revient au même que de demander que l'application Φ est propre sur \mathbb{R}_+^n ou que les polyades sont de dimension finie. Dans ce cas, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\forall k \geq 0, C_1 \|k\| \leq \sum_j |< \Omega_j |k >| \leq C_2 \|k\| .$$

12. La forme normale de Birkhoff semi-classique

12.1. QBNF. Soit \hat{H} un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole principal H vérifie les hypothèses du théorème 84 (non-dégénérescence et semi-simplicité de H_2). Le théorème suivant est une extension au cas résonant du résultat de Sjöstrand [Sj92] :

THÉORÈME 90. *Il existe un OIF U égal à l'identité en dehors d'un voisinage du point critique 0, unitaire si \hat{H} est symétrique (formellement), tel que*

$$\hat{L} = U^{-1} \hat{H} U = \hat{H}_2 + \hat{K} + \hat{R}$$

tel que le symbole principal de $\hat{H}_2 + \hat{K}$ est la forme normale de Birkhoff classique, que $[\hat{H}_2, \hat{K}] = 0(h^\infty)$ au voisinage de 0 avec \hat{K} compactement supporté, et que le symbole total de \hat{R} soit $O(\infty)$. On peut en outre supposer que le symbole principal de \hat{L} a les mêmes points critiques et valeurs critiques que celui de \hat{H} .

Sous l'hypothèse (S), on peut choisir \hat{K} commutant exactement à \hat{H}_2 et compactement supporté. On peut aussi écrire

$$\forall N, \hat{R} = P_N(\widehat{H_{2,+}})^N$$

où $\hat{H}_{2,+}$ est un oscillateur harmonique défini positif.

Schéma de la preuve : On commence par trouver χ de façon à avoir la forme normale de Birkhoff classique. Soit U un OIF unitaire associé à χ , on a :

$$U^{-1} \hat{H} U = \text{Op}_{\text{Weyl}}(H_2 + K + R) + \hat{P}_1$$

où \hat{P}_1 est un OPD d'ordre 1. On conjugue ensuite par des pseudo-différentiels pour rendre la partie semi-classique commutant avec \hat{H}_2 modulo $O(h^\infty)$.

Si l'hypothèse (S) n'est pas satisfaite, on ne sait pas réaliser la somme formelle du symbole de \hat{K}_1 en un pseudo-diff. admissible.

Sous l'hypothèse (S), on tronque le symbole de \hat{K} par le produit de Moyal :

$$\hat{K}_1 = \Phi(\hat{I}_1, \dots, \hat{I}_\nu) \circ \hat{K}$$

où $\Phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ vaut 1 au voisinage de 0, qui est un symbole admissible. On moyenne alors par rapport au flot joint de \hat{I}_j :

$$\hat{K}_2 = \sum_{\lambda} \Pi_{\lambda} \hat{K}_1 \Pi_{\lambda}$$

λ décrit le spectre joint des \hat{I}_j et Π_{λ} est le projecteur sur la polyade associée à λ .

La difficulté est d'utiliser ce résultat : on va l'utiliser dans la construction de quasi-modes et dans une nouvelle preuve de la formule des traces.

13. Le calcul de la QBNF

On souhaite calculer la QBNF à l'ordre N .

On définit d'abord l'*algèbre de Weyl* tronquée $\mathcal{W}_{(N)}$: on définit le degré d du monôme $h^j x^\alpha \xi^\beta$:

$$d(h^j x^\alpha \xi^\beta) = 2j + \alpha + \beta .$$

$\mathcal{W}_{(N)}$ est l'espace des polynômes $\sum a_{j,\alpha,\beta} h^j x^\alpha \xi^\beta$ de degré $\leq N$. On la munit du produit de Moyal (tronqué à l'ordre N). On peut aussi la voir comme le quotient de l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels par l'idéal bilatère O_N de ceux qui ont un symbole total de degré minimal $> N$ en 0. Cette algèbre est graduée et on note \mathcal{W}_N les éléments homogènes de degré N .

Si \mathcal{Q}_j est l'espace des polynômes homogènes de degré j sur $T^*\mathbb{R}^n$, on a donc

$$\mathcal{W}_N = \mathcal{Q}_N \oplus h\mathcal{Q}_{N-2} \oplus \dots .$$

On va maintenant introduire un groupe qui opère par automorphismes extérieurs sur $\mathcal{W}_{(N)}$. Soit Γ le groupe des OIF associé à une transformation canonique qui est tangente à Id en 0. Soit Z_N le sous-groupe distingué de G formé des OIF de la forme $U(S)$ avec $S \in O_N$ où $U(S)$ est l'opérateur de noyau

$$K_{U(S)} = (2\pi h)^{-n} \int e^{\frac{i}{h}(\langle x-y|\xi \rangle + S(\frac{x+y}{2}, \xi))} d\xi .$$

Le groupe $G_N = \Gamma/Z_N$ agit sur $\mathcal{W}_{(N)}$ par conjugaison

$$A.P = APA^{-1}$$

On peut facilement voir que l'*algèbre de Lie* de G_N s'identifie à $\mathcal{G}_N = W_3 \oplus \dots \oplus W_N$ par la dérivée en $t = 0$ de $t \rightarrow U(tS)$ qui est $\frac{i}{h} \text{Op}_{\text{Weyl}}(S)$. La dérivation associée est

$$D_B P = \frac{i}{h} [B, P] ,$$

où $B \in \mathcal{G}_N$ et $P \in \mathcal{W}_{(N)}$. On a donc explicitement :

$$e^{iB/h} P e^{-iB/h} = P + \frac{i}{h} [B, P] + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{h} \right)^n [B, [B, \dots, [B, P] \dots]] + \dots$$

où la somme est finie.

On peut ainsi chercher les QBNF suivant le schéma suivant : soit $\hat{H} = \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \hat{H}_4 \in \mathcal{W}_{(4)}$, dont on cherche la QBNF à l'ordre 4. On doit choisir $B = B_3 + B_4$ et on avoir :

$$\hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \hat{H}_4 + \frac{i}{h}[B_3, \hat{H}_2 + \hat{H}_3] + \frac{i}{h}[B_4, \hat{H}_2] - \frac{1}{2h^2}[B_3, [B_3, \hat{H}_2]] = \hat{H}_2 + \hat{K}_3 + \hat{K}_4$$

ce qui donne les 2 équations :

$$\hat{H}_3 + \frac{i}{h}[B_3, \hat{H}_2] = \hat{K}_3$$

$$\hat{H}_4 + \frac{i}{h}[B_3, \hat{H}_3] + \frac{i}{h}[B_4, \hat{H}_2] - \frac{1}{2h^2}[B_3, [B_3, \hat{H}_2]] = \hat{K}_4 ,$$

où les inconnues sont \hat{K}_3 , \hat{K}_4 , B_3 et B_4 .

14. Le spectre de la forme normale de Birkhoff

La forme normale de Birkhoff s'identifie à un élément de \mathcal{W} soit :

$$\hat{H}_2 + \sum_{j=3}^{\infty} \hat{K}_j$$

avec $\hat{K}_j \in \mathcal{W}_j$. Il est préférable de renormaliser ces opérateurs en posant $x = \sqrt{h}y$ et $\varepsilon = \sqrt{h}$. On obtient ainsi une nouvelle série formelle “unitairement équivalente à la précédente :

$$h \left(\hat{L}_2 + \varepsilon \hat{L}_3 + \cdots + \varepsilon^j \hat{L}_j + \cdots \right)$$

où \hat{L}_j est un opérateur différentiel indépendant de ε de degré total $\leq j$.

Si on renormalise les polyades, i.e. si on les voit comme des sous-espaces de dimension finie de $L^2(\mathbb{R}_y^n)$, la série formelle précédente est un endomorphisme de chaque polyade et le degré en ε (graduation de l'algèbre de Weyl) correspond à l'ordre de grandeur de la perturbation spectrale.

15. Quasi-modes associés à un équilibre elliptique

Soit \hat{H} un hamiltonien semi-classique de symbole principal $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que H est propre. Supposons que H admette en z_0 un minimum absolu non dégénéré (le cas de plusieurs minimas s'y ramène pour ce qui suit). On peut d'abord trouver une transformation canonique χ isotope à l'identité qui soit l'identité en dehors d'un compact de l'espace des phases et qui ramène H à sa forme normale de Birkhoff. Un OIF globalement unitaire U associé à χ permet de supposer pour l'étude du spectre que \hat{H} est donné par sa forme normale de Birkhoff semi-classique. En outre quitte à modifier \hat{H} hors d'un compact, on peut supposer pour l'étude à $O(h^\infty)$ près du spectre dans un intervalle $[0, E_0]$ avec $E_0 > 0$, que l'on est dans \mathbb{R}^n avec $H \geq cH_2$ avec $c > 0$.

On a alors le :

THÉORÈME 91. *Soit $C > 0$ et $\alpha > 0$, soit \mathcal{K} la somme des espaces propres de \hat{H}_2 pour les valeurs propres dans $[0, Ch^\alpha]$. Alors le spectre de \hat{H} dans le même intervalle (états semi-excités) coïncide à $O(h^\infty)$ près avec celui de $\hat{H}_2 + \hat{K}$ sur \mathcal{K} (saturation).*

Preuve. –

On décompose $L^2(\mathbb{R}^n) = \mathcal{K} \oplus \mathcal{L}$ de façon orthogonale. On écrit alors la matrice de \hat{H} dans cette décomposition :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} A & \varepsilon \\ \varepsilon^* & B \end{pmatrix}$$

On a besoin des 3 propriétés suivantes qui sont à peu près évidentes (!!):

- (1) \hat{R} est $O(h^\infty)$ sur \mathcal{K} . Donc A est donnée par $\hat{H}_2 + \hat{K}$ à $O(h^\infty)$ près.
- (2) Pour la même raison $\varepsilon = O(h^\infty)$.
- (3) $B \geq c\hat{H}_2 - O(h)$ et donc $B \geq c'h^\alpha$ sur \mathcal{L} .

On en déduit que le spectre de \hat{H} est la réunion de ceux de A et de B à $O(h^\infty)$ près, puis le théorème.

□

Lorsque z_0 n'est pas un minimum local de H , on peut continuer à construire des quasi-modes sous l'hypothèse (S). Ces quasi-modes se localisent au point critique de H , mais la couche d'énergie n'admet plus z_0 comme point isolé. On n'a alors plus d'énoncé de saturation.

15.1. Points singuliers hyperboliques. Supposons que H_2 soit semi-simple et qu'il n'y ait pas de résonance. On a alors une forme normale formelle $H = F(x_1y_1, \dots, x_ny_n)$. Cette forme normale s'étend au cas semi-classique. Est-elle suffisante pour donner une extension des résultats de [CP94b] et [CP94a] valable en toute dimension (analogue de ce qu'ont fait Helffer et Sjöstrand pour les quasi-modes de fonds de puits) ?

16. La formule des traces semi-classique près des points critiques

Le but est d'étudier la singularité de la trace associée à un mode normal de Liapounov. Le principe est de montrer que la singularité ne dépend que de la forme normale de Birkhoff, puis de calculer directement ladite singularité.

17. Orbites périodiques

17.1. QBNF pour une orbite périodique. Soit γ une orbite périodique de l'hamiltonien classique H . Soit $\tau_0 = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \xi dx$ son action et $\chi : (T^*S^1 \times T^*Y, \gamma_0) \rightarrow (T^*X, \gamma)$, où $\gamma_0 = S^1 \times \tau_0 \times 0$, le germe de transformation canonique *exacte* qui donne la forme normale de Birkhoff classique. On note $L \rightarrow U \subset T^*S^1 \times T^*Y$ le fibré de Maslov (l'image réciproque du fibré de Maslov sur le graphe de χ), d'holonomie $e^{i\mu\pi/2}$. Le fibré L est l'image réciproque d'un fibré L_0 sur $S^1 \times Y$; on note \mathcal{H}_0 l'espace des sections de ce fibré. Le symbole principal d'un OIF attaché à χ et opérant de \mathcal{H}_0 à valeurs dans les fonctions sur X s'identifie à une demi-densité sur U . On peut donc choisir ce symbole égal à la racine carrée de la mesure de Liouville et appliquer le théorème d'Egorov-Weinstein (??) qui donne une conjugaison de \hat{H} au quantifié de Weyl de la BNF classique à $O(h^2)$ près. On note $\hat{D} = \text{Op}_W(\tau - \tau_0)$ opérant sur \mathcal{H}_0 et de spectre $h(n + \frac{\mu}{4}) - \tau_0$, $n \in \mathbb{Z}$.

THÉORÈME 92. *Soit \hat{H} un hamiltonien semi-classique de symbole sous-principal nul, tel que le symbole principal H admette une orbite périodique γ qui satisfait les hypothèses du théorème 87, il existe alors un OIF \hat{U} associé à la transformation*

canonique χ du théorème 87, microlocalement unitaire près de $\gamma_0 = \{(\theta, \tau_0, 0, 0)\}$ avec $\chi(\gamma_0) = \gamma$ et qu'on ait :

$$\hat{U}^* \hat{H} \hat{U} = E_0 + a\hat{D} + Op_W(H_2(y, \eta)) + \sum_{j \geq 3} Op_W K_j + R$$

où K_j est quasi-homogène de degré j au sens $K_j(t^2 h, \theta, t^2 \sigma, ty, t\eta) = t^j K_j(h, \theta, \sigma, y, \eta)$, avec $\sigma = \tau - \tau_0$, degré en $h \geq 2$; de plus les crochets de Poisson de $a\tau + H_2$ avec les K_j sont nuls et R a un symbole total plat sur γ_0 .

17.2. Quasi-modes. L'hypothèse (S) dans le cas des orbites périodiques est que l'ensemble des $k = (k_0, k') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{n-1}$ tels que $ak_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j k_j = \lambda_0$ (λ_0 donné) est fini. Cela implique qu'il n'y a pas de résonances avec $k_0 \neq 0$ (et donc que θ ne figure pas dans les QBNF) et que l'hypothèse (S) est satisfaite pour H_2 . Sous cette hypothèse les *polyades* (espaces propres de $\hat{B} = a\hat{D} + Op_W(H_2)$) sont de dimension finie (avec valeurs propres $a(h(n + \frac{\mu}{4}) - \tau_0) + h \sum \omega_j(k_j + \frac{1}{2})$). Ce sont les espaces propres λ du spectre joint de $(\hat{D}, \hat{I}_j, j = 1, \dots, \nu)$.

On appelle *polyades semi-excitées* les espaces tels que $\|(hn - \tau_0), \lambda_1, \dots, \lambda_\nu\| = O(h^\alpha)$ avec $\alpha > 0$. On note \mathcal{H}_λ les polyades. Alors les $\hat{U}(\mathcal{H}_\lambda)$, pour λ semi-excité, sont des quasi-modes d'ordre infini pour \hat{H} .

Par exemple dans le cas non résonant à 2 degrés de liberté, on trouve une famille de valeurs propres approchées

$$\mu_{n,k} = E_0 + a(h(n + \frac{\mu}{4}) - \tau_0) + \omega(k + \frac{1}{2}) + \sum_{j=2}^{\infty} h^j \Phi_j((n + \frac{\mu}{4}) - \frac{\tau_0}{h}, k)$$

où les Φ_j sont des polynômes de degré $\leq j$.

Si l'hamiltonien de départ est $h\sqrt{\Delta}$ où Δ est le laplacien riemannien, on a une invariance par homothétie qui permet d'avoir la QBNF :

$$a\hat{\tau} + \hat{H}_2 + \sum_{j \geq 3} Op_W(K_j(\theta, y, \eta))$$

et, dans le cas non résonant en dimension 2, les valeurs propres approchées pour $\sqrt{\Delta}$:

$$\frac{2\pi}{T}(n + \frac{\mu}{4}) + \omega(k + \frac{1}{2}) + \sum |n|^{-j} \Phi_j(k + \frac{1}{2})$$

où Φ_j est un polynôme de degré $\leq j$. Les nombres quantiques (n, k) vérifient :

$$0 \leq k \leq Cn^{1-\alpha}.$$

17.3. La formule des traces semi-classique : les orbites périodiques.

La méthode

- (1) La contribution de l'orbite périodique γ à la trace ne dépend que du jet d'ordre infini du symbole total de \hat{H} le long de γ . De plus cette contribution est invariante par conjugaison microlocale dans un voisinage de γ . On en déduit que la série de Birkhoff détermine le développement BKW de la contribution de γ à la formule de trace semi-classique : cette contribution est la même que celle de γ_0 à la formule de traces pour la QBNF.

- (2) Il s'agit maintenant de calculer la formule de trace pour la forme normale de Birkhoff. Pour cela, on se place dans le cas non résonant où l'hamiltonien de Birkhoff est de la forme $\Phi_h(\hat{D}, \hat{I}_1, \dots, \hat{I}_{n-1})$ où Φ_h est un symbole de degré 0 dont la partie principale Φ_0 est une submersion. Il suffit donc (...) d'écrire la formule des traces jointe pour les n opérateurs $\hat{D}, \hat{I}_1, \dots, \hat{I}_{n-1}$ et de prendre l'image directe par Φ_h .

Mettons ceci en oeuvre pour une orbite hyperbolique à 2 degrés de liberté :
Supposons que la forme normale de Birkhoff de γ soit

$$\hat{H}_0 = E_0 + a\hat{D} + \omega \text{Op}_W(y\eta) + \sum_{j \geq 3} \text{Op}_W(K_j(h, \tau - \tau_0, y\eta)) ,$$

et donc

$$\Phi_0(E_1, E_2) = E_0 + aE_1 + \omega E_2 + \dots ,$$

avec a et ω non nuls.

Soit $Z_1(t_1)$ la fonction de partition quantique de \hat{D} et $Z_2(t_2)$ celle de $\hat{I} = \text{Op}_W(y\eta)$. On peut calculer explicitement ces 2 distributions ; on trouve, avec la formule sommatoire de Poisson :

$$Z_1(t_1) = 2\pi e^{it_1(\frac{\tau_0}{h} - \frac{\mu}{4})} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta(t_1 - 2p\pi)$$

Le propagateur de $\hat{I} = \text{Op}_W(y\eta)$ est donné par :

$$u(t, y) = e^{-t/2} u_0(ye^{-t})$$

et donc son noyau $k(t, y, z)$ vaut $k(t, y, z) = e^{-t/2} \delta(y - ze^{-t})$ et sa trace ponctuelle (pour $t_2 \neq 0$) :

$$Z_2(t_2) = \frac{1}{2 \sinh \frac{|t_2|}{2}} .$$

Si Π est un pseudo-diff. qui microlocalise près de 0 en (y, η) la microfunction $\text{Tr}(\Pi e^{-it\hat{I}/h} \Pi)$ est donnée au voisinage de $(\mathbb{R} \setminus 0) \times 0$ par la formule précédente qui donne la contribution de la seule trajectoire périodique de $y\eta$, le point fixe à l'origine. On vérifie que $WF_h(Z_2) = (\mathbb{R} \times 0) \cup (0 \times \mathbb{R})$. Le WF_h de $Z_1 \otimes Z_2$ est donc $\Lambda = \cup_{p \in \mathbb{Z}} \Lambda_p \cup M$ où $\Lambda_p = \{(2p\pi, E_1; t_2, 0) | p \in \mathbb{Z}\}$ et $M = \{(2p\pi, E_1; 0, E_2) | p \in \mathbb{Z}\}$. On va voir que M ne contribue pas à la formule.

La trace $Z(t)$ cherchée est donc l'image de $Z_1(t_1)Z_2(t_2)$ par un OIF associé à la relation canonique donnée par la suspension cotangente de Φ_0 .

Examinons cet OIF. Tout d'abord, l'image directe $T \rightarrow (\Phi_h)_*(T)$ est donnée par :

$$(\Phi_h)_*(T) = (2\pi h)^{-1} \int e^{it(\Phi_h(E_1, E_2) - E)/h} T(E_1, E_2) dE_1 dE_2 ,$$

puis la densité spectrale jointe $T(E_1, E_2)$ de \hat{D} et \hat{I} est donnée microlocalement sur Λ_p ($p \neq 0$) par

$$T = (2\pi h)^{-3/2} \int e^{-i(2p\pi(E_1 + \tau_0 - h(\mu/4)) + t_2 E_2)/h} \frac{2\pi}{2 \sinh t_2/2} dt_2$$

La contribution de γ à la formule de traces semi-classique est donc donnée par la microfunction

$$D(E) = (2\pi h)^{-5/2} e^{2p\pi i(-\tau_0/h + (\mu/4))} \int e^{i(t\Phi_h(E_1, E_2) - 2p\pi E_1 - t_2 E_2 - tE)/h} \frac{2\pi}{2 \sinh t_2/2} dt dt_2 dE_1 dE_2$$

Appliquant la phase stationnaire avec le point critique $ta = 2p\pi, t\omega = t_2, E_1 = E_2 = 0$, on trouve la phase $-2p\pi\tau_0$ qui est l'intégrale d'action sur l'itérée d'ordre p de γ et l'amplitude

$$(2\pi h)^{-\frac{1}{2}} \frac{2\pi}{|a|} \frac{1}{2 \sinh |2p\pi\omega/a|} e^{i\mu\pi/2}$$

qui s'identifie avec le calcul direct, car les v.p. de Poincaré sont les $e^{\pm 2p\pi\omega/a}$ et la période primitive $2\pi/|a|$.

CHAPITRE 9

L'EFFET TUNNEL

1. Introduction

On considère l'opérateur de Schrödinger

$$\hat{H} = h^2 \Delta_g + V ,$$

où g est une métrique riemannienne sur une variété compacte X (ou éventuellement la métrique euclidienne sur \mathbb{R}^n). Si X a un bord, on utilisera les conditions de Dirichlet. On supposera toujours que l'on s'intéresse à des états bornés, ie que $E_0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} V(x)$. Soit donc φ_h une fonction propre de \hat{H} :

$$\hat{H}\varphi_h = E_h\varphi_h ,$$

où $\int_X |\varphi_h|^2 dx = 1$ et E_h tend vers E_0 quand h tend vers 0. On s'intéresse à la localisation de φ_h : il n'est pas difficile de voir que les φ_h se concentrent dans la région U_{E_0} où $V(x) \leq E_0$. On verra même que cela se fait avec un taux de décroissance exponentielle : si $x \notin U_{E_0}$, $|\varphi(x)| = O(e^{-\frac{C}{h}})$ avec $C > 0$.

Cette région non vide U_{E_0} se décompose en composantes connexes

$$U_{E_0} = \cup_j U_j ,$$

les U_j s'appellent les puits.

Qu'appelle-t-on *effet tunnel* ?

D'abord revenons à la mécanique classique, donnée par l'hamiltonien $H_0(x, \xi) = \|\xi\|^2 + V(x)$; si $H_0(x_0, \xi_0) = E_0$, il est clair que $x_0 \in U_{E_0}$ et cela reste vrai pour $x(t)$ si $(x(t), \xi(t))$ est la trajectoire de (x_0, ξ_0) . Donc $x(t)$ reste indéfiniment dans le même puits.

En mécanique quantique, il n'en est pas de même, par exemple un état stationnaire n'est jamais complètement localisé. Une équation elliptique n'a pas de solution nulle dans un ouvert non vide et non identiquement nulle.

Précisons ce point sur l'exemple classique du double puits. Considérons le cas où il existe une involution σ de la variété riemannienne (X, g) qui échange les 2 puits U_1 et U_2 avec $U_{E_0} = U_1 \cup U_2$. Le spectre se décompose alors en spectre pair et spectre impair suivant la parité par rapport à σ . Ces 2 spectres sont extrêmement voisins près de E_0 , c'est une conséquence immédiate de la décroissance exponentielle de φ_h en dehors des puits : si φ_+ est paire, il existe en général une fonction φ_- impaire telle que les valeurs propres E_{\pm} vérifient :

$$\Delta E = |E_+ - E_-| ,$$

est très petit ($O(e^{-\frac{C}{h}})$) et que $\varphi_o = \varphi_+ - \varphi_-$ soit concentrée dans U_1 et donc $\varphi_+ + \varphi_-$ dans U_2 .

Examinons ce qui se passe pour la solution $\varphi(t)$ de l'équation de Schrödinger de donnée initiale φ_o :

$$\varphi(t) = e^{it\frac{E_-}{\hbar}} (e^{it\frac{\Delta E}{\hbar}} \varphi_+ - \varphi_-) .$$

On constate qu'au bout d'un temps $T = \pi \frac{\hbar}{\Delta E}$ qui est de l'ordre de $e^{\frac{C}{\hbar}}$ la solution $\varphi(t)$ se trouve concentrée dans l'autre puits.

On conçoit la grande importance de ce phénomène purement quantique en physique, par exemple en physique du solide (déplacement des électrons) ou en chimie des molécules.

Il se trouve qu'une théorie mathématique de cet effet est disponible depuis quelques années grâce aux travaux de B. Simon et surtout à la série d'articles de Helffer-Sjöstrand ([Sim84], [HS84], [HS85a], [HS85b], [HS85c]).

Que contient cette théorie?

Tout d'abord, des estimations géométriques précises de la décroissance des fonctions propres en dehors des puits, décroissance qui s'explique en termes de la distance à U_{E_0} au sens d'une métrique riemannienne dégénérée, la distance d'Agmon dont le $d\sigma^2$ est donné par

$$d\sigma^2 = (V(x) - E_0)_+ ds^2 ,$$

$ds^2 = g$ étant la métrique initiale : si $d_{E_0}(x)$ désigne la distance d'Agmon de x à U_{E_0} et si E_h tend vers E_0 , on a une majoration de $\varphi(x)$ de l'ordre de $e^{-\frac{d_{E_0}(x)}{\hbar}}$.

Ensuite, une méthode très générale pour calculer les valeurs propres approchées et les *splitting* exponentiels en termes des spectres pour des problèmes à un seul puits. Il s'agit de l'adaptation d'un principe général d'analyse fonctionnelle : un contrôle à $O(\varepsilon)$ près des espaces propres permet un calcul à $O(\varepsilon^2)$ près des valeurs propres ; ici $\varepsilon \sim e^{-\frac{S_o}{\hbar}}$ où S_o est la distance minimale de Agmon séparant 2 puits distincts.

Enfin, dans le cas des puits non dégénérés, ie $E_0 = 0 = \inf V$, et les minimas sont non dégénérés, on peut pousser plus loin le calcul grâce à la forme BKW des fonctions propres pour 1 seul puits (voir 7) : $\varphi_h \sim a(x, h) e^{-\frac{d_{E_0}(x)}{\hbar}}$ où a admet un développement asymptotique en puissances de h . Le calcul de l'effet tunnel se concentre alors sur les géodésiques de longueur S_o joignant 2 puits ; on peut remarquer que 2 telles géodésiques ne se coupent pas, ce qui est la source des applications aux graphes plongés, ie dont les arêtes ne se coupent pas.

Il y a des applications mathématiques intéressantes qui seront décrites :

la première application est à la *théorie de Morse* et plus précisément à l'étude de ce qu'on appelle le complexe de Witten dont les formes harmoniques donnent la cohomologie de de Rham de X par la théorie de Hodge habituelle ; il se trouve que ce complexe dépend d'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et d'un petit paramètre h et que l'étude lorsque ce petit paramètre h tend vers 0 est en fait une étude semi-classique pour un problème à plusieurs puits pour le potentiel $\|df\|^2$, on montre ainsi facilement les inégalités de Morse reliant les nombres de Betti de X aux points critiques de la fonction de Morse f sur X . En fait, on peut montrer plus : *la limite semi-classique du complexe de Witten est le complexe de Thom-Smale* fabriqué en termes des variétés stables et instables d'un champ de vecteurs $\text{grad}(f)$. C'est un exemple très instructif de calcul explicite de l'effet tunnel...

Une 2ème application que l'on décrira est la suivante : si $E_1 < E_2 \leq E_3 \leq \dots \leq E_N$ est une suite de réels donnée ainsi qu'une variété X , peut-on construire une

métrique g sur X et un potentiel V tels que la suite E_i soit celle des N premières valeurs propres avec multiplicité de $\hat{H} = \Delta_g + V$? Il se trouve que ce problème est relié à un problème topologique classique : celui du plongement d'un graphe dans une surface (voir [Col98b]).

On ne traite qu'un cas très particulier de l'effet tunnel : celui où la localisation des fonctions propres est uniforme et due au potentiel V . Ces méthodes *réelles* ne permettent pas de traiter par exemple l'effet tunnel entre les quasi-modes associés à 2 trajectoires périodiques stables, il faudrait pour cela se placer dans la situation analytique réelle et considérer les variétés lagrangiennes complexes stables et instables des trajectoires concernées.

2. Distance d'Agmon et décroissance des fonctions propres

2.1. Distance de Agmon. Dans la suite E_0 est fixée (si X était non compacte, on prendrait $E_0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} V(x)$). Soit α_{E_0} la métrique riemannienne donnée par

$$\alpha_{E_0} = (V(x) - E_0)_+ g .$$

Cette métrique riemannienne est identiquement nulle dans la réunion des puits

$$U_{E_0} = \{V(x) \leq E_0\} .$$

Cette métrique, dite *métrique d'Agmon* (elle dépend de E_0), donne lieu à une distance (d'Agmon) d_{E_0} définie par

$$d_{E_0}(x, y) = \inf_{\gamma} \int_0^1 \sqrt{(V(\gamma(t)) - E_0)_+} \|\gamma'(t)\| dt ,$$

où le inf porte sur les arcs $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ de classe C^1 tels que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

2.2. Cas des puits non dégénérés. On va décrire la distance d'Agmon lorsque $E_0 = \inf V$ (on supposera dans ce §1.2 que $E_0 = 0$) et que les puits $U_o = \{U_1, \dots, U_N\}$ sont non dégénérés, ce qui signifie que $\forall j$, $V''(U_j)$ est une forme quadratique définie positive. On a alors le :

THÉORÈME 93. *Au voisinage de U_j , $d_0(x) = d_0(x, U_j)$ est une fonction C^∞ ayant en U_j un minimum non dégénéré.*

Preuve. –

Dans le formalisme hamiltonien, les géodésiques de α_0 , ie les courbes intégrales de l'hamiltonien $H_0(x, \xi) = \frac{\|\xi\|^2}{V}$ telles que $H_0 = 1$ sont aussi les courbes intégrales (reparamétrisées) de $H_1 = \|\xi\|^2 - V$. Le champ hamiltonien \mathcal{X}_1 de H_1 admet en $(U_j, 0)$ un point singulier de type hyperbolique. En effet dans des coordonnées orthonormales pour g en U_1 telles que la matrice de $V''(U_j)$ soit diagonale, on a $H_1(x, \xi) = \sum \xi_i^2 - \sum a_i^2 x_i^2 + O(|x|^3)$. Il est bien connu dans cette situation ([Irw80]) que la variété instable est lisse près de U_j . De plus l'espace tangent T_j à cette variété instable en $(U_j, 0)$ est la variété instable du champ linéarisé

$$\mathcal{X}_o = 2 \sum (\xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_i x_i \frac{\partial}{\partial \xi_i})$$

$T_j = \{(x, \xi) | \xi_i = a_i x_i\}$ qui est un espace lagrangien qui se projette bijectivement sur l'espace tangent en U_j . On en déduit en propageant par le flot que la variété instable elle-même est lagrangienne. Elle est donc localement le graphe de la différentielle d'une fonction $S_j(x) = S(x)$ définie au voisinage de U_j dont on peut supposer qu'elle s'annule en U_j .

Il reste à identifier $S(x)$ à $d(x, U_j)$. On remarque d'abord que :

$$\|dS\|^2 = V .$$

Soit maintenant $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, tel que $\gamma(0) = U_j$ et $\gamma(1) = x$; calculons la longueur de γ pour α_0 .

$$|S(x) - S(U_j)| = \left| \int_0^1 dS(\gamma'(t)) dt \right| \leq \int_0^1 \sqrt{V} \|\gamma'(t)\| dt = L_{\alpha_0}(\gamma) .$$

Donc $S(x) \leq d_0(x, U_j)$.

Réciproquement, on vérifie que la longueur pour la métrique d'Agmon, d'une trajectoire issue de U_j pour le flot hamiltonien de H_1 et allant de U_j à x est de longueur $S(x)$.

□

Remarquons que les géodésiques issues du puits U_j ont des vecteurs tangents en U_j , mais que ces vecteurs ne sont pas arbitraires : il suffit de considérer le problème linéarisé (champ \mathcal{X}_o) pour lequel les courbes en question sont données par :

$$x_i(t) = x_i(0) e^{2a_i t} ,$$

et donc, dans le cas générique, on peut supposer $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ et une géodésique qui vérifie $x_1(0) \neq 0$ est tangente en U_j au vecteur $\frac{\partial}{\partial x_1}$.



FIGURE 1. Géodésiques d'Agmon issues de U_j

2.3. Perturbation de la distance de Agmon. Le but de ce § est de comparer les distances aux puits pour E et E_0 , d_E et d_{E_0} lorsque E tend vers E_0 . Il est clair que, si $E \leq E_0$, on a : $d_{E_0} \leq d_E$, car alors $(V - E_0)_+ \leq (V - E)_+$. On peut donc supposer $0 \leq E - E_0 = \Delta_E = o(1)$ pour prouver le :

THÉORÈME 94. (i) Si $E_0 = \inf V$ et que les minimas de V sont tous non dégénérés

$$d_E \leq d_{E_0} \leq d_E + O(\Delta_E \log \frac{1}{\Delta_E}) .$$

(ii) Si E_0 n'est pas valeur critique de V ,

$$d_E = d_{E_0} + O(\Delta_E) .$$

Preuve. –

On a d'abord :

$$\sqrt{(V - E)_+} = \sqrt{(V - E_0)_+} + O\left(\frac{\Delta E}{\sqrt{(V - E_0)_+}}\right).$$

Donc, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ est une géodésique pour α_E qui réalise la distance de x à U_E , on a :

$$d_{E_0}(x) \leq d_E(x) + O(\Delta E) \int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\| dt}{\sqrt{(V - E_0)_+}}.$$

On est donc ramené à étudier dans les 2 cas le comportement des géodésiques pour α_E près de U_E .

(i) Dans ce cas si on installe des coordonnées polaires près du puits concerné de façon que $V - E_0 = r^2$, on doit montrer que

$$\int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\| dt}{r} = O\left(\log \frac{1}{\Delta E}\right).$$

Cette intégrale J est majorée par

$$J \leq C\left(\int_{\sqrt{\Delta E}}^1 \frac{|dr|}{r} + \int_0^1 r|\theta'(t)| dt\right).$$

La démonstration complète est donnée en appendice de **[HS85b]**.

(ii) Dans le 2ème cas, on choisit des coordonnées locales telles que $V - E_0 = x_1$, et on doit montrer que

$$\int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\| dt}{\sqrt{x_1}} = O(1).$$

□

2.4. Décroissance des fonctions propres. On a le

THÉORÈME 95. Si $\hat{H}\varphi_h = E_h\varphi_h$ avec $E_h \rightarrow E_0$ et $\int_X |\varphi_h|^2 dx = 1$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, |\varphi_h(x)| = O\left(e^{-\frac{d_{E_0}(x, U_{E_0})}{h} + \frac{\varepsilon}{h}}\right).$$

On a une estimation analogue pour les dérivées de φ_h . Cette estimation reste valable pour le problème de Dirichlet si X a un bord.

On notera cette décroissance $\tilde{O}(e^{-\frac{d_{E_0}(x, U_{E_0})}{h}})$. On appellera *inégalité d'énergie* les inégalités obtenues par la méthode ci-dessous.

Preuve. –

La preuve est basée sur la formule de Green-Stokes que l'on peut écrire, en posant $P = H + V - E$:

$$h^2 \int_X \|\nabla e^{\frac{x}{h}} u\|^2 dx + \int_X (V - E - \|\nabla \varphi\|^2) e^{2\frac{x}{h}} u^2 dx = h^2 \int_X e^{2\frac{x}{h}} P u \cdot u dx,$$

où ∇ est le gradient par rapport à g , $\|\nabla f\|$ sa norme pour g et dx la mesure riemannienne. Question régularité, la formule est clairement valable dès que φ est lipschitzienne, u étant lisse et vérifiant les éventuelles conditions au bord. Pour prouver cette formule, on

commence par se débarrasser des termes qui contiennent $V - E$, puis on part de

$$\int_X e^{2\frac{\varphi}{h}} u \Delta u dx$$

que l'on intègre par parties.

L'idée est maintenant, en gros d'utiliser la formule avec $u = \varphi_h$ et $\varphi = d_E$, en effet cette dernière fonction est lipschitzienne et vérifie

$$\|\nabla d_E\|^2 \leq (V - E)_+$$

avec en fait égalité presque partout (en dehors des points conjugués et cut-locus). Cela ne donne pas tout à fait ce que l'on veut, on introduit donc $E' = E + 2h$, et on applique la formule précédente avec $\varphi = d_{E'}$: on obtient ainsi facilement :

$$\|e^{\frac{d_{E'}}{h}} u\|_{H^1} = O\left(\frac{1}{h}\right).$$

Si φ est une approximation C^∞ de $d_{E'}$ à $O(h)$ près en norme uniforme, de gradient borné et dont toutes les dérivées sont à croissance modérées par rapport à h , on a ainsi :

$$\|e^{\frac{\varphi}{h}} u\|_{H^1} = O\left(\frac{1}{h}\right).$$

Puis des estimations pour les normes H^l en calculant le laplacien et en remplaçant le laplacien de u par sa valeur donnée par l'équation de Schrödinger. On obtient ainsi des estimations du type :

$$|D^\alpha u(x)| = O\left(\frac{1}{h^{N_\alpha}}\right) e^{-\frac{d_{E'}}{h}}.$$

On en déduit le résultat en remarquant que $d_{E'}$ converge uniformément vers d_{E_0} lorsque E tend vers E_0 .

□

2.5. Décroissance des fonctions propres pour E_0 non critique et les fonds de puits si $E_0 = O(h)$. On a en fait le résultat suivant :

THÉORÈME 96. *Supposons E_0 non valeur critique de V ou $E_0 = \inf V$ et ce minimum non dégénéré, et supposons que $E = E_0 + O(h)$, alors on a :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |D^\alpha \varphi_h(x)| = O(h^{-N_\alpha}) e^{-\frac{d_{E_0}(x)}{h}}.$$

Preuve.—

Cela résulte des estimations précédentes et du résultat du §2.3 sur les perturbations de la distance d'Agmon.

□

3. Matrice d'interaction abstraite

3.1. Quasi-modes. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, E, F 2 sous-espaces vectoriels de dimension finie, on pose

$$d(E, F) = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \inf_{y \in F} \|x - y\| ,$$

et donc, si $\sin \alpha = d(E, F)$, α est l'angle de E et F , au sens de la géométrie élémentaire où l'on définit l'angle d'une droite et d'un plan.

Cet angle est nul si et seulement si $E \subset F$. L'angle vaut $\pi/2$ dès que $\dim(E) > \dim(F)$.

Si les dimensions de E et F sont les mêmes, $d(E, F) = d(F, E)$. C'est le cas si ces 2 distances sont finies.

On a la :

PROPOSITION 38. *Soit A autoadjoint sur \mathcal{H} , $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ et $a > 0$ tels que $\text{Spectre}(A) \cap ([\alpha - a, \alpha] \cup [\beta, \beta + a]) = \emptyset$. Soit ψ_j , $j = 1, \dots, N$ telles que $\|(A - \mu_j)\psi_j\| \leq \varepsilon$ avec $\alpha \leq \mu_j \leq \beta$ et F le sous-espace engendré par les ψ_j . Si E est l'image du projecteur spectral Π de A associé à l'intervalle $I = [\alpha, \beta]$, on a :*

$$d(F, E) \leq \frac{\varepsilon \sqrt{N}}{a \sqrt{\lambda_S}} ,$$

où λ_S est la plus petite valeur propre de la matrice $S = \langle \psi_i | \psi_j \rangle$.

Preuve.—

Soit $\psi_j = v_j + \eta_j$ où ϕ_j est la projection de ψ_j sur E . On a :

$$\varepsilon \geq \|(A - \mu_j)\psi_j\| \geq \|(A - \mu_j)\eta_j\| \geq a \|\eta_j\|$$

et donc $\|\psi_j - v_j\| \leq \varepsilon/a$.

Maintenant, si $\psi = \sum x_j \psi_j$ et v est la projection de ψ sur E , on a :

$$\|\psi - v\| \leq \sqrt{\sum x_j^2} \cdot \sqrt{N} \cdot \frac{\varepsilon}{a} ,$$

puis :

$$\|\psi\|^2 = \sum x_i x_j s_{i,j} \geq \lambda_S \sum x_j^2 .$$

On en déduit le résultat. □

3.2. Matrice d'interaction. On conserve les notations précédentes, mais on suppose que $\dim(E) = \dim(F)$, $S = Id + O(\varepsilon)$, $\alpha(E, F) = O(\varepsilon)$, alors, on a :

THÉORÈME 97. *Théorème—Si $v_j = \Pi \psi_j$ et $e_j = S^{-1/2} v_j$ qui est une b.o. de E , la matrice A_E de A dans la base (e_j) est donnée par :*

$$\langle A e_i | e_j \rangle = \mu_i \delta_{i,j} + \frac{1}{2} (\langle r_i | \psi_j \rangle + \langle r_j | \psi_i \rangle) + O(\varepsilon^2) ,$$

avec $r_i = (A - \mu_i)\psi_i = O(\varepsilon)$.

Preuve.—

Posons $T_{i,j} = \langle \psi_i | \psi_j \rangle - \delta_{i,j} (= O(\varepsilon))$, alors

$$\langle v_i | v_j \rangle = \langle \psi_i | \psi_j \rangle + O(\varepsilon^2)$$

par Pythagore, et donc : $\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{i,j} + T_{i,j} + O(\varepsilon^2)$.

De même

$$\langle Av_i | v_j \rangle = \langle A\psi_i | \psi_j \rangle + O(\varepsilon^2).$$

Ce dernier résultat s'obtient en décomposant :

$$A(\psi_i - v_i) = \mu_i(v_i + (\psi_i - v_i)) + r_i - Av_i$$

et en utilisant à nouveau Pythagore.

On obtient ainsi après quelques manipulations et en utilisant la symétrie de A à :

$$(\langle Av_i | v_j \rangle) = D_\mu + \frac{1}{2}(D_\mu T + T D_\mu) + \frac{1}{2}(\langle r_i | \psi_j \rangle + \langle r_j | \psi_i \rangle) + O(\varepsilon^2),$$

où D_μ est la matrice diagonale d'entrées les μ_i .

On utilise alors le fait que $e_i = (Id - 1/2T + O(\varepsilon^2))v_i$ pour conclure :

$$(\langle Ae_i | e_j \rangle) = (Id - \frac{T}{2})(\langle Av_i | v_j \rangle)(Id - \frac{T}{2}) + O(\varepsilon^2).$$

Cela donne le résultat sans peine. □

4. Approximation par les problèmes à un puits

Soit E_0 fixé. On s'intéresse aux valeurs propres de H situées dans un intervalle I_h convergent vers E_0 . On désigne par

$$X_j = X \setminus \cup_{k \neq j} B(U_k, \eta),$$

où η est petit (mais indépendant de h). Soit alors H_j la réalisation autoadjointe de H dans X_j avec les conditions de Dirichlet au bord. On désignera par problème à un puits (U_j) le problème spectral associé à H_j . On suppose que

(H1) Il existe $C > 0$ et $N_0 \in \mathbb{N}$ tels que, si $J_h = B(I_h, C.h^{N_0})$, on ait $\forall j, \text{Spectre}(H_j) \cap (J_h \setminus I_h) = \emptyset$.

Cela implique facilement que la même hypothèse est vraie pour $\text{Spectre}(H)$ quitte à augmenter un peu I_h et à diminuer un peu C . En effet, la décroissance exponentielle des fonctions propres montre que les valeurs propres pour H sont exponentiellement proches de valeurs propres pour au moins un des puits.

Soit maintenant E le sous-espace de $L^2(X)$ engendré par les fonctions propres de \hat{H} dont les valeurs propres sont dans I_h et F la somme des espaces engendrés par les $\psi_\alpha = \chi_{j(\alpha)} \varphi_\alpha$ où les φ_α sont les fonctions propres d'un $\hat{H}_{j(\alpha)}$ situées dans I_h et χ_j des fonctions plateaux nulles au bord de X_j et valant 1 en dehors des boules $B(U_k, 2\eta)$ pour tout $k \neq j$.

THÉORÈME 98. *Sous l'hypothèse (H1), on a*

i) *pour h assez petit, $\dim(E) = \dim(F) (= O(h^{-N_1}))$,*

ii) *l'angle de E et F , noté $d(E, F)$ vérifie :*

$$d(E, F) = \tilde{O}(e^{-\frac{s_0}{h}}),$$

où $S_0 = \inf_{j \neq k} d_{E_0}(U_j, U_k)$ est la distance minimale entre deux puits distincts pour la distance de Agmon.

Il est alors clair d'après le §3 que $\text{Spectre}(\hat{H}) \cap I_h$ peut se calculer à $\tilde{O}(e^{-\frac{2S_0}{h}})$ près en calculant des éléments de matrice relatifs à F .

Remarque importante: les géodésiques joignant 2 puits distincts et de longueurs S_0 ne se coupent pas. C'est un effet de l'inégalité triangulaire.

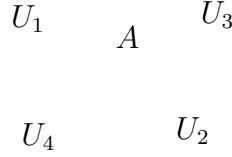


FIGURE 2. Les géodésiques de longueurs S_0 ne se coupent pas

Preuve. –

Soit U_i , $i = 1, 2, 3, 4$ 4 puits tels que des géodésiques γ et γ' de longueur S_0 joignant U_1 à U_2 et U_3 à U_4 se coupent en A ; il est facile de voir que les tangentes à γ et γ' en A sont distinctes. Il existe alors 2 indices $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{3, 4\}$ tels que $d(U_i, A) + d(A, U_j) \leq S_0$ les longueurs étant comptées sur γ et γ' : en effet la somme de ces 4 expression possible vaut $4S_0$. On en déduit que $d(U_i, U_j) < S_0$, ce qui est contradictoire.

□

5. L'effet tunnel général : matrice d'interaction

On note maintenant P la projection orthogonale de F sur E , par $v_\alpha = P\psi_\alpha$ et si $\langle v_\alpha | v_\beta \rangle = Id + T$ et $S = (Id + T)^{-\frac{1}{2}}$, par $e_\alpha = Sv_\alpha$ la base orthonormée de E déduite de v_α . Le but est de calculer asymptotiquement $\text{Spectre}(\hat{H}) \cap I_h$ et donc de calculer la matrice de $H|_E$ dans la base e_α .

Notons \hat{H}_I cette matrice. Alors le résultat principal, vrai sous uniquement **(H1)** est le suivant :

$$h_{\alpha,\beta} = (\hat{H}_I)_{\alpha,\beta} = D + W + \tilde{O}(e^{-2\frac{S_0}{h}}),$$

où D est la matrice diagonale formée des μ_α telles que $\hat{H}_{j(\alpha)}\varphi_\alpha = \mu_\alpha\varphi_\alpha$ et $W = \tilde{O}(e^{-\frac{S_0}{h}})$ se calcule en termes des φ_α par des formules assez explicites : ce sont les formules du §3. Si $r_\alpha = (\hat{H} - \mu_\alpha)\psi_\alpha$, on a :

$$w_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}(\langle \psi_\alpha | r_\beta \rangle + \langle \psi_\beta | r_\alpha \rangle).$$

Ce résultat montre une première chose : l'effet tunnel n'est significatif que si la largeur de I_h est du même ordre que les éléments de W : on est donc amené à faire l'hypothèse

(H2) $|I_h| = O(h^\infty)$.

Dans la foulée, on va voir que les résultats s'expriment agréablement si on a :

(H3) $|\varphi_\alpha(x)| = O(h^{-N} e^{-\frac{d_{E_0}(x, U_{j(\alpha)})}{h}})$.

Rappelons que (H3) est vérifiée pour les puits qui sont des minimum de V égaux à E_0 et non dégénérés et dans les cas génériques (par exemple si E_0 est non critique pour V) à condition que $|I_h - E_0| = O(h)$.

Posons maintenant $S_{i,j} = d_{E_0}(U_i, U_j)$.

Dans ce cas, le calcul de W est simple :

THÉORÈME 99. *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), on a : $h_{\alpha,\beta} = \mu_\alpha \delta_{\alpha,\beta} + w_{\alpha,\beta} + O(h^\infty e^{-\frac{S_{\alpha,\beta}}{h}})$, où $w_{\alpha,\beta}$ est nul si $j(\alpha) = j(\beta)$ et donné par la formule suivante : $w_{\alpha,\beta} = h^2 \int_\Gamma (\varphi_\alpha \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial n} - \varphi_\beta \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial n}) d\sigma_\Gamma$ où Γ est un germe d'hypersurface transverse aux géodésiques de longueur $S_{\alpha,\beta}$ joignant $U_{j(\alpha)}$ et $U_{j(\beta)}$ et la dérivée normale est prise vers $U_{j(\beta)}$.*

Ce théorème assure un calcul asymptotique du spectre de \hat{H}_I à condition d'en savoir plus sur les φ_α (en particulier comment assurer les hypothèses (Hi)). C'est possible pour les minimas de V non dégénérés.

Le calcul.—

Pour simplifier, nous supposons qu'il y a au plus une valeur propre par puits et donc que l'indexation de la base de E et des puits est la même. D'après le §2.2, il s'agit de calculer $\langle \psi_\alpha, r_\beta \rangle$ avec $r_\beta = [\hat{H}, \chi_\beta] \varphi_\beta$; on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \psi_\alpha, r_\beta \rangle &= h^2 \int \chi_\alpha (\varphi_\beta \nabla \varphi_\alpha - \varphi_\alpha \nabla \varphi_\beta) \nabla \chi_\beta dx + h^2 \langle \nabla \chi_\alpha \varphi_\alpha, \nabla \chi_\beta \varphi_\beta \rangle \\ &= h^2 \int \chi_\alpha (\varphi_\beta \nabla \varphi_\alpha - \varphi_\alpha \nabla \varphi_\beta) \nabla \chi_\beta dx + O(h^\infty e^{-\frac{S_{\alpha,\beta}}{h}}). \end{aligned}$$

Maintenant, sous l'hypothèse $|I_h| = O(h^\infty)$, on voit que $w_{\alpha,\beta} - w_{\beta,\alpha} = (\mu_\beta - \mu_\alpha) \langle \psi_\alpha, \psi_\beta \rangle = O(h^\infty) e^{-\frac{S_{\alpha,\beta}}{h}}$. On remarque d'abord que $w_{\alpha,\beta} = O(h^\infty) e^{-\frac{S_{\alpha,\beta}}{h}}$ si $d_{E_0}(U_\alpha, U_\beta) > S_{\alpha,\beta}$. Puis sinon, il suffit pour évaluer $w_{\alpha,\beta}$ de s'intéresser au calcul de l'intégrale dans une région où $E_a = d(x, U_\alpha) + d(x, U_\beta) \leq S_{\alpha,\beta} + a$ avec $a > 0$. E_a ne contient pas d'autres puits que U_α et U_β .

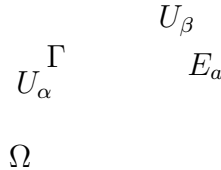


FIGURE 3. Ω , Γ , E_a

On introduit alors un voisinage compact à bord lisse Ω de U_α dont le bord rencontre E_a suivant les transversales Γ de l'énoncé. On a alors :

$$w_{\alpha,\beta} = h^2 \int_\Omega (\varphi_\alpha \nabla \varphi_\beta - \varphi_\beta \nabla \varphi_\alpha) \nabla \chi_\beta + O(h^\infty) e^{-\frac{S_{\alpha,\beta}}{h}},$$

intégrale que l'on évalue par la formule de Green :

$$w_{\alpha,\beta} = h^2 \int_\Gamma (\varphi_\alpha \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial n} - \varphi_\beta \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial n}) d\sigma_\Gamma + O(h^\infty) e^{-\frac{S_{\alpha,\beta}}{h}}.$$

6. Le cas des puits non dégénérés

Dans ce §, on suppose que $\inf V = 0$, que $V^{-1}(0)$ est un ensemble fini $\{A_1, \dots, A_\alpha, \dots, A_N\}$ et que $V''(A_\alpha)$ est définie positive. On aura aussi $E_0 = 0$.

6.1. Oscillateurs harmoniques associés aux fonds de puits. On choisit au voisinage de chaque A_α des coordonnées orthonormales (x_i) telles que dans ces coordonnées, on ait : $V(x) = \sum a_{i,\alpha}^2 x_i^2 + O(|x|^3)$ (avec $a_{i,\alpha} > 0$). On introduit alors les oscillateurs harmoniques Ω^α associés aux différents puits et définis sur \mathbb{R}^n qu'on peut interpréter canoniquement comme l'espace $T_{A_\alpha} X$:

$$\Omega_h^\alpha = -h^2 \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum a_{i,\alpha}^2 x_i^2 .$$

Leur décomposition spectrale se calcule aisément en se ramenant par séparation des variables à la dimension 1, puis par une homothétie de x à $-\frac{d^2}{dx^2} + x^2$. On trouve que les valeurs propres de Ω^α sont les

$$E_{\mathbf{k}}^\alpha = h \sum (2k_i + 1) a_i ,$$

avec $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ parcourant \mathbb{N}^n . Les fonctions propres associées sont les

$$\Phi_{\mathbf{k}}^\alpha = e^{-\frac{1}{2h} \sum a_i x_i^2} P_{\mathbf{k}}^\alpha \left(\frac{x}{\sqrt{h}} \right) ,$$

où les $P_{\mathbf{k}}$ sont des produits de polynômes d'Hermite de chacune des variables.

$\frac{1}{2} \sum a_i x_i^2$ est exactement la distance d'Agmon à l'origine pour le potentiel $\sum a_i^2 x_i^2$.

Notons maintenant $\Omega = \oplus_\alpha \Omega^\alpha$ et $\Lambda_j = h \tilde{\Lambda}_j$ le spectre de Ω ordonné dans l'ordre croissant, alors on a :

THÉORÈME 100. *Théorème—Si $0 < \lambda_1 < \dots \leq \lambda_j \leq \dots$ est le spectre de H :*

$$\lambda_j(h) = \Lambda_j(1 + o(1)) ,$$

lorsque h tend vers 0^+ .

On trouvera une preuve de ce résultat dans [Sim83] qui est reprise dans [CFKS80].

Idée pour la preuve :

On utilise le *Neumann-Dirichlet bracketting* (voir chapitre 2) de la façon suivante : on décompose X en la réunion des boules B_α (pour g) de centres A_α et de rayons $h^{2/5}$ et du complémentaire Z . Dans Z , $V \geq Ch^{4/5}$ avec $C > 0$. Dans les B_α , on pose $x = \sqrt{h}x'$ ce qui ramène à des boules de rayon $h^{-1/10}$ dans \mathbb{R}^n et à des opérateurs qui convergent vers $h.\Omega_1^\alpha$. Il est facile de voir que les spectres de Neumann et Dirichlet de H dans ces boules sont très proches du spectre des Ω_h^α . Les valeurs propres de H sur Z sont toutes supérieures à $C.h^{4/5}$.

6.2. Solutions BKW formelles. On veut construire des solutions BKW formelles près d'un fond de puits. On supposera comme précédemment qu'on a choisi des coordonnées orthonormales x près du puits et que $V = \sum a_i^2 x_i^2 + O(x^3)$.

Si S désigne la distance d'Agmon au puits, on a :

$$\frac{1}{h} e^{\frac{S}{h}} H e^{-\frac{S}{h}} = \mathcal{L} ,$$

avec :

$$\mathcal{L} = 2\nabla S - \Delta S + h\Delta .$$

Cet opérateur \mathcal{L} opère sur les séries formelles en (x, h) . On gradue cet espace \mathcal{E} de séries formelles par

$$\deg(h^j x^\alpha) = 2j + |\alpha| .$$

Alors \mathcal{L} préserve la filtration associée et sur les quotients successifs \mathcal{L} opère comme \mathcal{L}_0 associé à l'oscillateur osclateur qui est homogène de degré 0 par rapport au degré défini plus haut.

Soit $E_0 h$ une valeur propre de H_0 , $\text{Ker}(\mathcal{L}_0 - E_0)$ est engendré comme module sur les séries formelles en h par des polynômes (u_1, \dots, u_μ) où μ est la multiplicité de la valeur propre $E_0 h$ de H_0 .

On désignera par \mathcal{E}_N les polynômes homogènes de degré N .

Il y a 2 cas à distinguer suivant que les degrés des u_i sont congrus modulo 2 ou non. Nous traiterons seulement le 1er cas. Dans l'autre cas, il s'introduit des puissances $h^{\frac{1}{2}}$ et il faut travailler dans des séries formelles en $h^{\frac{1}{2}}$ et x .

Dans le premier cas, soit $N_0 = \sup_i \deg(u_i)$ et soit (v_1, v_2, \dots, v_μ) une base de $\text{Ker}(\mathcal{L}_0 - E_0) \cap \mathcal{E}_{N_0}$.

On a alors le :

THÉORÈME 101. *Il existe une série formelle*

$$E = E_0 Id + hE_1 + \dots ,$$

où les E_i sont des endomorphismes de \mathbb{R}^μ et une série formelle

$$W = V_0 + V_1 + \dots + V_k + \dots ,$$

où $V_0 = (v_1, \dots, v_k)$ et $V_k \in (\mathcal{E}_{N_0+k})^\mu$ tel que dans les séries formelles vectorielles, on ait :

$$(H - hE)W = 0 .$$

La preuve utilise le :

LEMME 25. *On a*

$$\mathcal{E}_N = \text{Im}(\mathcal{L}_0 - E_0) \oplus \text{Ker}(\mathcal{L}_0 - E_0) .$$

Ce lemme vient du fait que \mathcal{L}_0 est symétrique sur \mathcal{E}_N pour le produit scalaire

$$(u, v) = h^{-(\frac{n}{2} + N)} \int e^{-2\frac{S_0}{h}} u v dx .$$

La démonstration du théorème est alors banale par récurrence sur k .

On peut en déduire le développement asymptotique des valeurs propres en utilisant le fait que $E(h)$ est symétrique pour un produit scalaire formel sur \mathbb{R}^μ (développement en puissances entières de h . On sait que dans ce cas les valeurs propres ont un développement asymptotique en puissances entières de h (voir Kato).

Si on réalise les séries formelles au voisinage de 0, on fabrique visiblement un quasi-mode d'ordre infini. Les développements asymptotiques précédents sont donc ceux des vraies valeurs propres du problème à un puits.

6.3. Solutions BKW globales. Soit A un des puits non dégénérés de V . On note par $S(x)$ la distance d'Agmon de x à A . Soit Ω l'ouvert de X formé des points x tels qu'il existe une unique géodésique joignant x à A de longueur $S(x)$ et que cette géodésique ne rencontre ni le bord de X , ni les autres puits. Alors, il est clair que S est C^∞ sur Ω . Le but de ce § est de prouver l'existence sur Ω d'une solution BKW au sens suivant :

THÉORÈME 102. *Soit $\tilde{\varphi}$ une solution formelle quelconque en A au sens du §5.2, alors il existe une solution BKW $\varphi = e^{-\frac{S(x)}{h}} a(x, h)$ où a est un symbole en h ($a \sim \sum h^l a_l(x)$), avec $a_l \in C^\infty(\Omega)$) vérifiant*

$$i) (H - E(h))\varphi = O(h^\infty) e^{-\frac{S(x)}{h}} \text{ dans } \Omega ,$$

$$ii) \int_K |\varphi - \tilde{\varphi}|^2 dx = O(h^\infty) ,$$

où K est un voisinage compact de A et $\tilde{\varphi}$ est un prolongement arbitraire à K de la solution formelle .

Remarque : l'ouvert Ω n'est pas vraiment l'ouvert maximal où l'on peut définir une solution BKW : pour dépasser le cut-locus de x il faut éventuellement superposer plusieurs solutions BKW ou écrire une intégrale s'il y a des points conjugués. Par contre, les problèmes de bords de X sont beaucoup plus délicats ; concernant le franchissement des autres puits, je renvoie le lecteur à [HS85b] où les solutions BKW correspondantes sont construites.

Preuve. –

On est ramené à résoudre des équations de transport :

$$((2\nabla S) - \Delta S + E_0)w = r ,$$

où le second membre est plat en 0. Cela se fait classiquement par intégration sur les trajectoires à partir de $-\infty$.

□

6.4. Les solutions BKW sont proches des vraies solutions. Soit u_h une fonction propre pour le problème à un puits associée à une valeur propre ayant le d.a. étudié précédemment. La théorie des quasi-modes montre l'existence d'une solution BKW $v_h = e^{-\frac{S}{h}} a(\cdot, h)$ telle que l'on ait :

$$\|u_h - v_h\|_{L^2} = O(h^\infty) .$$

On aimerait savoir que cette solution BKW est proche de u en un sens beaucoup plus fort, c'est-à-dire en tenant compte du poids $e^{-\frac{S}{h}}$.

THÉORÈME 103. *Le résultat espéré est vrai sur Ω au sens suivant : sur tout compact de Ω ,*

$$|u_h(x) - v_h(x)| = O(h^\infty) e^{-\frac{S(x)}{h}} ,$$

et cette estimation est aussi vraie pour les dérivées de u .

La preuve utilise le

LEMME 26. *Soit Ω un ouvert de X et $U_1 \subset V^{-1}(0) \cap \Omega$, on note par $\delta(x)$ la distance d'Agmon de U_1 à x et on suppose Ω étoilé par rapport à U_1 , c'est-à-dire que si γ joint $x \in \Omega$ à U_1 et est de longueur $\delta(x)$, γ est contenue dans Ω .*

On suppose en outre qu'on a des fonctions $\varphi = \varphi_h$ définies sur Ω et vérifiant :

i) il existe un voisinage V de U_1 tel que

$$\|\varphi_h\|_{L^2(V)} = O(h^\infty) ,$$

ii) $(H - E_h)\varphi_h = o(h^\infty e^{-\frac{\delta(x)}{h}})$ et mêmes estimations pour les dérivées, avec $E_h = O(h)$,

$$\text{iii) } |D^\alpha \varphi_h(x)| = O(h^{-N_\alpha} e^{-\frac{\delta(x)}{h}}).$$

Alors, on a, uniformément sur tout compact K de Ω et pour tout indice de dérivation α :

$$|D^\alpha \varphi(x)| = O(h^\infty e^{-\frac{\delta(x)}{h}}).$$

Preuve. –

(du lemme)

On peut supposer que K est lui-même étoilé par rapport à U_1 . On considère un voisinage compact K_1 de K et on a alors un $\varepsilon > 0$ tel que tout chemin de U_1 à $x \in K$ sortant de K_1 soit de longueur $\geq \delta(x) + \varepsilon$. Soit alors χ une fonction plateau nulle au voisinage du bord de Ω , égale à 1 au voisinage de K_1 . On va modifier la métrique d'Agmon $d\sigma_E$ au voisinage du support L de $\nabla\chi$ en une métrique $(d\sigma'_E)^2 = (1 - W)^2 d\sigma_E^2$ où W est strictement positive dans un voisinage de L et nulle sur K_1 . On peut choisir W assez petite pour avoir les 2 relations :

a) Sur K les distances $\delta_E(x)$ et $\delta'_E(x)$ de x à U_1 pour $d\sigma_E$ et $d\sigma'_E$ coïncident,

b) il existe $\alpha > 0$ telle que, si x est dans L , on ait :

$$\delta'_E(x) \leq \delta_E(x) - \alpha.$$

On applique alors les inégalités d'énergie avec $u = \chi\varphi$ et $\varphi\delta'_E$. Cela donne facilement l'estimation

$$\|\nabla(e^{\frac{\delta'_E(x)}{h}}\varphi)\|_{L^2(K)} = O(h^\infty),$$

d'où l'on déduit une estimation H^1 (où l'on peut remplacer $\delta'_E(x)$ par $\delta(x)$) par l'inégalité de Poincaré et les estimations C^k par la méthode déjà utilisée plus haut.

□

Preuve. –

(du théorème)

On applique le lemme avec $\varphi = u_h - v_h$, où la solution BKW est choisie pour donner l'hypothèse i) et u une vraie solution de l'équation de Schrödinger.

□

6.5. Matrices d'interaction. On peut ainsi calculer approximativement la matrice d'interaction dans la cas des fonds de puits non dégénéré. Nous le ferons uniquement pour les états fondamentaux des problèmes à un puits.

On souhaite calculer explicitement $w_{\alpha,\beta}$ pour l'interaction entre les fondamentaux de 2 puits. On part des expressions approchées :

$$\varphi_\alpha(x) \sim h^{-\frac{n}{4}} a_\alpha(x) e^{-\frac{d(x, U_\alpha)}{h}},$$

avec $a_\alpha(x) = \theta_\alpha^{-\frac{1}{2}}(x)$ où θ_α est le déterminant de l'application *exponentielle* issue de U_α . De même pour φ_β . On doit donc évaluer :

$$I(h) = -h^{1-\frac{n}{2}} \int_\Gamma a_\alpha(x) a_\beta(x) \left(\frac{\partial d_\alpha}{\partial n} - \frac{\partial d_\beta}{\partial n} \right) e^{-\frac{\delta(x)}{h}} dS_\Gamma,$$

avec $\delta(x) = d_\alpha(x) + d_\beta(x)$ et on obtient en supposant Γ normale en M_0 à la géodésique minimisante :

$$I(h) = -2h^{1-\frac{n}{2}} \int_{\Gamma} a_\alpha(x) a_\beta(x) e^{-\frac{\delta(x)}{h}} .$$

On en déduit facilement :

THÉORÈME 104. *Il existe $C, C' > 0$ tels que :*

$$Ch^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{S_{\alpha,\beta}}{h}} \leq w_{\alpha,\beta} \leq C'h^{1-\frac{n}{2}} e^{-\frac{S_{\alpha,\beta}}{h}} .$$

Lorsque $\delta(x)$ admet un minimum non dégénéré, on peut appliquer la phase stationnaire et on trouve :

THÉORÈME 105.

$$w_{\alpha,\beta} \sim -h^{\frac{1}{2}} a_{\alpha,\beta} e^{-\frac{S_{\alpha,\beta}}{h}} ,$$

où $(a_{\alpha,\beta})$ est > 0 .

Il serait intéressant de relier $a_{\alpha,\beta}$ au déterminant de l'application de Poincaré le long de γ à une constante universelle près.

Preuve. –

On applique la phase stationnaire.

□

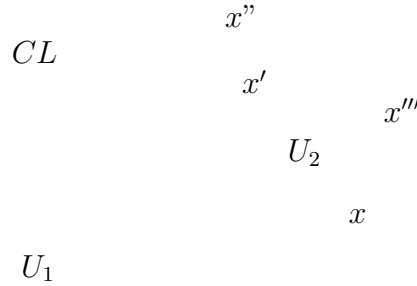


FIGURE 4. X est un tore de dimension 2 et il y a 2 puits ponctuels U_1 et U_2 . La région hachurée est l'ensemble des points x tels que la géodésique minimisante de x à U_1 passe par U_2 . On a représenté aussi (CL) le cut-locus de U_1 et des géodésiques minimisantes de points x à U_1 .

7. Le reste amélioré

On peut améliorer les résultats de façon à avoir un contrôle de l'effet tunnel tenant compte de certaines géodésiques de longueur $> S_0$.

Si on introduit la matrice

$$\mathcal{D}_{i,j} = e^{-\frac{S_{i,j}}{h}} ,$$

où $S_{i,j}$ est la distance d'Agmon du puits U_i au puits U_j et $\mathcal{D}_{i,i} = 0$, on a

$$h_{\alpha,\beta} = m_\alpha \delta_{\alpha,\beta} + w_{\alpha,\beta} + \tilde{O}(\mathcal{D}^2 + \mathcal{D}^3) .$$

Ce résultat prouvé dans [HS85a] permet de traiter les cas où les puits sont regroupés par paquets dont les diamètres sont de l'ordre de S_0 éloignés d'une distance de l'ordre de $S_1 > S_0$.

8. Puits non résonants

Imaginons que l'on s'intéresse aux valeurs propres situées dans un intervalle I_h de longueur $|I_h| = O(h^\infty)$ dans le cas de minimas non dégénérés pour V . Il peut arriver que certains puits (appelés *non résonants*) n'ait aucune valeur propre dans J_h . Dans ce cas le résultat de décroissance ignore les puits non résonants, plus précisément :

THÉORÈME 106. *Sous les hypothèses précédentes, si $H\varphi = E\varphi$, avec $\int_X |\varphi|^2 dx = 1$, on a, en désignant par U^r la réunion des puits résonants :*

$$\varphi(x) = \tilde{O}(e^{-\frac{d_{E_0}(x, U^r)}{h}}) ,$$

et un résultat amélioré sous les mêmes hypothèses que plus haut.

Preuve. –

De l'approximation par les problèmes à un puits, on déduit l'estimation indiquée près des puits non résonants. On applique ensuite l'inégalité d'énergie. Les contributions près des puits non résonants se contrôlent alors facilement. □

9. Plongements de graphes

Il n'y a pas d'effet tunnel pour un potentiel générique : en effet, il n'y aucune raison alors pour qu'il y ait des puits résonants. L'écart générique entre les valeurs propres des problèmes à un puits n'est pas $O(h^\infty)$.

Pour voir agir l'effet tunnel, on doit soit ajouter des hypothèses de symétrie, soit considérer des familles de potentiels dépendant de paramètres.

Le cas des *symétries* est facile à comprendre : si une isométrie non triviale de (X, g) préserve V et transforme un puits en un autre, les valeurs propres pour les 2 problèmes à un puits considérés sont les mêmes. On est donc dans une situation de résonance ; ce cas est étudié dans [HS85a].

Étudions plutôt le cas de *familles avec paramètres*.

Pour une famille à 1 paramètre générique, les valeurs propres des problèmes à un puits se croisent 2 à 2. L'effet tunnel agit alors à la hauteur de ce croisement en évitant le croiement des vraies valeurs propres, en effet la matrice d'interaction pour les 2 puits résonants est alors de la forme :

où ε est < 0 et exponentiellement petit. Il faut remarquer que cet effet a lieu dans une région exponentiellement petite de l'espace des paramètres, ce qui conduira plus bas à la notion de matrice d'interaction *renormalisée* :

$$H_2^r = \frac{1}{\sqrt{h}} e^{\frac{S_0}{h}} H_2 .$$

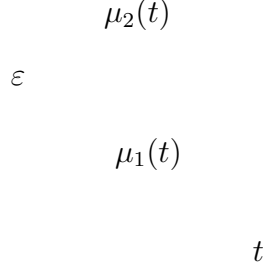


FIGURE 5. Presque croisement

Il est intéressant de considérer des familles à plus de paramètres. Ce qui va compter maintenant, si par exemple on s'intéresse aux vraies dégénérescences du spectre, est non seulement le nombre de paramètres, mais le *graphe d'Agmon*.

Soit $V_0 \geq 0$ un potentiel ayant des puits non dégénérés $A_i, i = 1, \dots, N$. On va considérer plus bas une famille de potentiels proches de V_0 . Soit S_0 la distance d'Agmon minimale entre les puits de V_0 . On suppose que les géodésiques joignant 2 puits et de longueurs S_0 sont non dégénérées. Le graphe d'Agmon de V_0 est le graphe $\Gamma = (S, E)$ (plongé dans X) dont les sommets (S) sont les A_i et les arêtes (E) les géodésiques de longueur S_0 joignant 2 puits distincts. Ce graphe peut avoir des arêtes multiples, il n'a pas de boucles.

On désigne par O_Γ le cône des matrices $A = (a_{i,j})$ symétriques réelles $N \times N$ vérifiant $a_{i,j} < 0$ si $(i, j) \in E$, $a_{i,j} = 0$ si $(i, j) \notin E$ et $i \neq j$.

On considère maintenant un potentiel V_0 vérifiant les hypothèses données plus haut et tel que le graphe d'Agmon Γ de V_0 n'ait pas d'arêtes multiples. Soit V un potentiel C^2 proche de V_0 et x_i ses valeurs critiques proches de 0. On se donne des fonctions plateaux χ_i égale à 1 près de A_i et à 0 près de A_j pour $j \neq i$. On pose

$$\tilde{V} = V - \sum_i x_i \chi_i ,$$

qui vérifie les mêmes hypothèses que V_0 . On note $S_{i,j}$ les distances d'Agmon entre les puits de \tilde{V} .

On considère maintenant Z une sous-variété de l'espace des potentiels C^2 proches de V_0 de dimension $= \dim(O_\Gamma) = N + \#E$ et on suppose

i) $\forall V \in Z$, V admet N minimas non dégénérés A_i proches de ceux de V_0 et pour \tilde{V} les géodésiques d'Agmon proches des arêtes de Γ sont non dégénérées et de longueurs $S_{i,j}$ proches de S_0 .

ii) Les $(x_i, S_{i,j})$ forment un système de coordonnées global sur Z .

L'existence d'un tel Z résulte du théorème des fonctions implicites (et de la différentiabilité des $S_{i,j}$ au voisinage de V_0).

Désignons par $\mu_i(h, V)$ la première valeur propre pour le problème à un puits A_i associé à $h^2 \Delta + V$ (on suppose évidemment X_i indépendant de V) et φ_i les fonctions propres normalisées associées. Soit $Z_h \subset Z$ l'ouvert des $V \in Z$ tels que $|\mu_i(h, V)| < h^2$ (notons que $V_0 \notin Z_h$).

Soit $F = F(h, V)$, $V \in Z_h$, l'espace engendré par les N premières fonctions propres de $h^2\Delta + V$. On le munit de la base orthonormale e_j localisée près des différents puits comme plus haut et on remarque que à h fixé petit e_i dépend différentiablement de V . On note alors $H_N(h, V)$ la matrice d'interaction. Il est clair que dans Z_h , $x_i = O(h)$ et donc $V = \tilde{V} + O(h)$. Les coefficients non diagonaux de la matrice d'interaction peuvent donc être calculés au premier ordre par les solutions *BKW* pour \tilde{V} . On désignera par matrice d'interaction *BKW* la matrice $H_N^{BKW}(h, V)$ dont les coefficients diagonaux sont les $\mu_i(h, V)$ et les coefficients non diagonaux $h_{i,j}$ sont nuls si i, j n'est pas une arête du graphe d'Agmon de V_0 et

$$h_{i,j} = -a_{i,j} \sqrt{h} e^{-\frac{S_{i,j}}{h}},$$

si (i, j) est une arête de ce graphe.

On associera aux matrices $H_N(h, V)$ et $H_N^{BKW}(h, V)$ leurs versions renormalisées $H_N^r = \frac{1}{\sqrt{h}} e^{\frac{S_0}{h}} H_N$ et de même $H_N^{BKW,r}$.

Soit maintenant K un ouvert relativement compact de O_Γ et $K_h \subset Z_h$ l'ensemble des V tel que

$$H_N^{BKW,r} \in K.$$

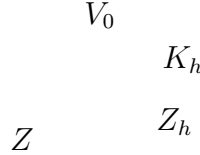


FIGURE 6. Z, Z_h, K_h, V_0

On a le :

THÉORÈME 107. *L'application*

$$\Phi_h : K_h \rightarrow K,$$

qui à V associe la matrice $H_N^{BKW,r}(h, V)$ est un difféomorphisme pour h assez petit.

Preuve. –

L'application Φ_h est évidemment différentiable. L'inversibilité se voit par le théorème des fonctions implicites, les équations à résoudre sont en notant $A = (A_{i,j}) \in K$: Les $S_{i,j}$ étant déjà les coordonnées sur Z , il suffit de vérifier (uniformément par rapport à V dans tout compact de Z_h) que :

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} = \delta_{i,j} + O(h), \quad \frac{\partial \mu_i}{\partial S_{k,l}} = O(h).$$

Cela ne pose pas de problème si on utilise

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial t} = \int_X |\varphi_i|^2 \frac{\partial V}{\partial t},$$

et qu'on évalue cette dernière intégrale en remplaçant φ_i par son approximation BKW . Lorsque h est petit, le second membre est petit, ce qui permet de conclure. \square

Remarquons que K_h est très petit. Sa mesure est de l'ordre de $e^{-N \frac{S_0}{h}}$.

Maintenant, il est clair que $H_N^{BKW,r}(h, V)$ converge uniformément vers $H_N^r(h, V)$ pour $V \in K_h$. On en déduit que la configuration locale dans Z_h pour la matrice d'interaction est voisine une fois la renormalisation effectuée de celle de $K \subset O_\Gamma$.

En particulier, si une variété W de l'espace des matrices symétriques $N \times N$ coupe O_Γ transversalement, elle coupe aussi l'ensemble des matrices d'interaction renormalisées.

Comme conséquence, on a une nouvelle preuve des résultats fondamentaux sur l'invariant $\mu(\Gamma)$ et sa relation avec les plongements de Γ :

Soit $W_{2,m} \subset O_\Gamma$ la sous-variété formée des matrices dont la seconde valeur propre est de multiplicité m . $W_{2,m}$ est de codimension $\frac{m(m+1)}{2} - 1$. On dira que λ_2 2ème valeur propre de $A_0 \in O_\Gamma$ est stable (relativement à Γ) si O_Γ et $W_{2,m}$ se coupent transversalement en A_0 . Il faut et il suffit pour cela, en désignant par F l'espace propre que les formes quadratiques sur F soient engendrées par les restrictions à F des $x_i^2, i \in S$ et $x_i x_j, (i, j) \in E$.

En particulier, on introduit in invariant $\mu(\Gamma)$ du graphe Γ en considérant le sup des m pour lesquels cela se produit :

$$\mu(\Gamma) = \sup\{m | \exists A \in O_\Gamma \cap W_{2,m} \text{ tel que } \lambda_2(A) \text{ est stable} \} .$$

On a alors le

THÉORÈME 108. *Si Γ est un graphe plongé dans X , il existe un opérateur de Schrödinger sur X tel que la multiplicité de sa 2ème valeur propre soit $\mu(\Gamma)$.*

La preuve de ce théorème découle alors des considérations qui précèdent et du

LEMME 27. *Tout graphe Γ plongé dans X est isotope au graphe d'Agmon d'un V_0 comme plus haut.*

10. Théorie de Morse et complexe de Witten

10.1. Théorie de Hodge. Considérons pour commencer un complexe de cochaines de dimension finie sur \mathbb{R} :

$$(\mathcal{C}, d) : 0 \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots \rightarrow C^n \rightarrow 0 .$$

On définit les espaces de cohomologie de (\mathcal{C}, d) :

$$H^k = \text{Ker } d_k / \text{Im } d_{k-1} .$$

Si maintenant, on munit chaque C^k d'une structure euclidienne, on peut définir les adjoints d_k^* de la différentielle et le laplacien

$$\Delta_k = d_k^* d_k + d_{k-1} d_{k-1}^* = (d + d^*)_{C^k}^2 ,$$

qui est un opérateur symétrique sur C^k . On a ainsi une notion de cochaîne harmonique $\mathcal{H}_k = \text{Ker}(\Delta_k)$ et les formes harmoniques sont exactement les formes fermées et cofermées car

$$(\Delta_k \alpha | \alpha) = \|d_k \alpha\|^2 + \|d_{k-1}^* \alpha\|^2 .$$

La théorie de Hodge nous dit alors que chaque C^k admet une décomposition orthogonale :

$$C^k = \mathcal{H}_k \oplus d_{k-1}C_{k-1} \oplus d_k^*C_{k+1} = \mathcal{H}_k \oplus E_k \oplus F_k ,$$

et que d_{k-1} induit un isomorphisme de F_{k-1} sur E_k et d_k^* de E_{k+1} sur F_k ; de plus ces décompositions sont préservées par les laplaciens et on a

$$\Delta_k \circ d_{k-1} = d_{k-1} \circ \Delta_{k-1}$$

et une relation analogue pour d^* . En particulier, pour tout $\lambda_0 \geq 0$ donné, les espaces $\mathcal{C}_k^{\lambda_0}$, sommes des espaces propres de Δ_k de valeurs propres $\leq \lambda_0$, forment un sous-complexe de (\mathcal{C}, d) de même cohomologie que le complexe initial.

En particulier, il existe dans chaque classe de cohomologie une unique cochaîne harmonique. Géométriquement, cette cochaîne minimise la norme dans la classe de cohomologie, en effet l'orthogonalité de α avec dC_{k-1} s'écrit :

$$\forall \beta \in C_{k-1}, (\alpha | d\beta) = 0 = (d^*\alpha | \beta) ,$$

et donc $d^*\alpha = 0$.

Un exemple simple est fourni par la théorie des réseaux électriques. Si on note V l'ensemble des sommets, A l'ensemble des arêtes supposées orientées et $\rho_{i,j} > 0$ la résistance de l'arête $\{i, j\}$, on a un complexe :

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^V \xrightarrow{d_0} \mathbb{R}^A \rightarrow 0 ,$$

défini par

$$dx(\{i, j\}) = \frac{1}{\rho_{i,j}}(x(i) - x(j)) .$$

Si on munit \mathbb{R}^V (l'espace des potentiels) de la norme $\sum dx_i^2$ et \mathbb{R}^A (l'espace des courants) de la norme $\sum \rho_{i,j} dI_{i,j}^2$, l'adjoint d_0^* est donné par

$$d_0^*(I)(i) = \sum_{j \sim i} I_{i,j} ,$$

et donc les courants harmoniques sont exactement ceux qui vérifient la loi de Kirchhoff en tous les sommets.

Toute la théorie précédente s'applique au complexe de de Rham d'une variété compacte en munissant les Ω_k d'un produit scalaire local de la forme

$$\|\alpha\|_{\mu,g}^2 = \int_X \|\alpha(x)\|_g^2 d\mu ,$$

où g est une métrique riemannienne C^∞ et $\mu = e^{-2\varphi} v_g$, où $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ , une mesure sur X . En effet, dans ce cas les $\Delta_{g,\mu}$ sont elliptiques autoadjoints et admettent donc une décomposition spectrale avec un spectre purement discret.

10.2. Laplaciens avec poids. Soit $d_k : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$ le complexe de de Rham de la variété X . Si g est une métrique sur X et $\mu = e^{-2\varphi} v_g$ une densité régulière, on peut comme précédemment munir les Ω^k d'une structure préhilbertienne donnée par :

$$\|\alpha\|^2 = \int_X |\alpha(x)|_g^2 d\mu ,$$

et définir des adjoints formels D_μ^* de d . On a alors des laplaciens de Hodge déformés $\Delta_\mu = D_\mu^* d + d D_\mu^*$ pour lesquels la théorie de Hodge s'applique. En particulier la cohomologie de de Rham de X est donnée par les noyaux des Δ_μ (formes μ -harmoniques).

Dans la suite de ce §9.1. on considère le cas $k = 0$.

Il nous faut calculer l'adjoint D_μ^* qui satisfait :

$$\int (df|\alpha) e^{-2\varphi} dx = \int f(D_\mu^* \alpha) e^{-2\varphi} dx .$$

Un calcul simple donne :

$$D_\mu^* \alpha = d^* \alpha + 2(d\varphi|\alpha) ,$$

où d^* est l'adjoint riemannien ordinaire. On en déduit :

$$\Delta_{\mu,0} = \Delta_g + 2\nabla\varphi .$$

On aura souvent intérêt à transporter le problème sur $L^2(X, v_g)$ par la transformation $Uf = fe^{-\varphi}$. La différentielle se réécrit :

$$d_\varphi \alpha = d\alpha + d\varphi \wedge \alpha .$$

L'opérateur transporté de Δ_μ est un opérateur de Schrödinger H_μ qui s'écrit :

$$H_\mu = \Delta_g + \|d\varphi\|^2 + \Delta_g \varphi .$$

Maintenant, l'idée de Witten est de regarder ce qui se passe pour le poids φ/h . On a alors des opérateurs

$$h\Delta_h = h\Delta_g + 2\nabla\varphi$$

et

$$H_h = \Delta_g + \frac{1}{h^2} \|d\varphi\|^2 + \frac{1}{h} \Delta_g \varphi .$$

Les 2 expressions sont intéressantes.

La première peut être lue comme une perturbation du champ $-2\nabla\varphi$ par un brownien. Plus précisément, on peut considérer le processus stochastique engendré par Δ_h . Si $p_t(x, y)dy$ est le noyau de $e^{-th\Delta_h}$, ce noyau représente la loi de probabilité de $\gamma(t)$ pour un chemin aléatoire $\gamma : [0, \infty[\rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = x$. On s'attend lorsque h est petit et t grand à avoir convergence vers le fonds du bassin où est la position initiale avec une grande probabilité. Un problème important est d'évaluer cette probabilité et celle d'aller dans un autre puits.

La 2ème écriture nous ramène à l'effet tunnel semi-classique et l'étude faite plus haut va nous permettre une analyse fine des fonctions propres et valeurs propres. C'est aussi en utilisant cette 2ème forme que Witten montre les inégalités de Morse et que le complexe donné par les espaces propres correspondant aux petites valeurs propres des H_h converge vers le complexe de Thom-Smale associé au champ de gradients de φ .

10.3. Le cas $k = 0$. Le but de ce §9.2. est d'analyser précisément les petites valeurs propres de H_h pour les fonctions. On fera dans toute la suite l'hypothèse (★) pour simplifier les calculs :

(★) : il existe près de chaque point critique A_i de φ des coordonnées locales telles que $g = \sum_{i=1}^n dx_i^2$ et

$$\varphi(x) = \varphi(A_i) + \frac{1}{2}(-x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2) ,$$

(k est l'indice du point critique).

Distance d'Agmon : il est facile de vérifier que près des minimas A_i de φ la distance d'Agmon $d(x, A_i)$ vaut $\varphi - \varphi(A_i)$. Si maintenant les bassins \mathcal{B}_i de A_i et \mathcal{B}_j de A_j se touchent par un col C_k , il y a une géodésique d'Agmon qui passe par ce col et qui est de longueur : $2\varphi(C_k) - \varphi(A_i) - \varphi(A_j)$.

Solutions BKW

Les solutions BKW dans les bassins correspondant à la valeur propre approchée 0 sont les $ce^{-\frac{\varphi}{h}}$ qui sont du reste des solutions exactes. On voit ainsi que H_h à N petites valeurs propres (exponentiellement petites) où N est le nombre de bassins. On peut normaliser ces solutions ; si on pose $a_i = \varphi(A_i)$, la fonction $\varphi_1 = (\pi h)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{\varphi - a_i}{h}}$ est de norme $1 + O(e^{-\frac{C}{h}})$.

Il s'agit de voir comment recoller ce qui se passe dans les différents bassins. Si f est fonction propre pour un problème à un puits, sa différentielle sera une forme propre.

On est ainsi amené à étudier H_μ pour les 1-formes fermées. On a le :

LEMME 28. *Pour les 1-formes, les seuls puits résonants pour des valeurs propres exponentiellement petites sont les points critiques d'indice 1.*

Ce lemme sera prouvé plus bas dans §10.4.

Cela montre que la différentielle de f se concentre près de ces points cols d'indice 1. Une expression BKW de ces 1-formes permettra de prolonger φ_1 au-delà des cols et de calculer la matrice d'interaction.

C'est ce que nous allons faire maintenant.

Solutions 1-formes près des cols

Dans les coordonnées locales adaptées, la forme α suivante est fermée et cofermée pour la différentielle de Witten $d_\varphi = hd + d\varphi \wedge$.

$$\alpha = (e^{-\frac{x_1^2}{h}} dx_1) e^{\frac{\varphi}{h}} .$$

Cela résulte d'un calcul facile.

On peut ainsi avoir un prolongement BKW des solutions de fonds de puits au-delà des cols. Introduisons la fonction

$$\text{Erf}(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt .$$

A_1

FIGURE 7. Le bassin de A_1 et les cols adjacents

La fonction φ_1 définie près du minimum A_1 de φ se prolonge près du col C avec des coordonnées locales telles que le bassin de A_1 soit du côté $x_1 > 0$ par

$$\varphi_1 = (\pi h)^{-\frac{n}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Erf}\left(\frac{x_1}{\sqrt{h}}\right) e^{-\frac{\varphi - a_1}{h}}.$$

Dans la zone proche du col où $0 < c \leq x_1 \leq 2c$, les 2 solutions BKW sont proches de $(\pi h)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{d(x, A_i)}{h}}$ et diffèrent d'une exponentielle d'un ordre plus petit encore. On peut donc les recoller en une solution semi-classique encore appelée φ_1 définie dans le bassin \mathcal{B}_1 de A_1 et dans les voisinages des cols adjacents à ce bassin. Les méthodes développées plus haut montrent en fait que φ_1 est proche de la solution pour le problème à un puits : il existe une fonction propre ψ_1 de H_h ($H_h \psi_1 = \lambda_1 \psi_1$) pour le problème de Dirichlet dans X privé de voisinages des minimas locaux de φ telle que $|\varphi_1 - \psi_1| = O(e^{-\frac{d(x, A_1) + \varepsilon}{h}})$ là où φ_1 est définie.

On va ainsi pouvoir évaluer la matrice d'interaction en prenant une hypersurface $x_1 = b < 0$ près du col.

Soit un 2ème puits A_2 dont le bassin est limité par le même col C avec $\varphi(C) = c$ et $\varphi_2 = (\pi h)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{\varphi - a_2}{h}}$ avec $a_2 = \varphi(A_2)$. On a : $h_{1,2} = h^2 \int_{x_1=b} (\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}) dx'$.

Un calcul donne :

$$h_{1,2} = -\frac{1}{\pi h} e^{-\frac{2c - a_1 - a_2}{h}},$$

réponse très simple surtout si on remarque que $2c - a_1 - a_2$ est la distance d'Agmon de A_1 à A_2 le long de la géodésique passant par C .

En fait on peut aussi donner une expression approchée pour les coefficients diagonaux de la matrice d'interaction. En effet, on sait que la fonction $\varphi_0 = e^{-\frac{\varphi}{h}}$ vérifie $H_h \varphi_0 = 0$. Si e_i est la b.o.n. de la somme des espaces propres correspondant aux N valeurs propres exponentiellement petites de H_h déduite des premières fonctions propres des problèmes à un puits, on a : $e_i = (\pi h)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{\varphi - a_i}{h}} (1 + O(e^{-\frac{\varepsilon}{h}}))$ près de A_i . De plus, on a : $\varphi_0 = \sum_i z_i e_i$. On en déduit que $z_i = (\pi h)^{\frac{n}{4}} e^{-\frac{a_i}{h}} (1 + O(e^{-\frac{\varepsilon}{h}}))$. Si $T = (t_{i,j})$ est la matrice d'interaction, on a

$$\sum_j t_{i,j} z_j = 0.$$

En particulier :

$$t_{i,i} \sim \frac{1}{\pi h} \sum_k e^{-2\frac{c_k - a_i}{h}},$$

où la somme porte sur les cols adjacents à \mathcal{B}_i .

Interprétation probabiliste.

Seules les valeurs propres associées aux minimas de $h\Delta_h$ tendent vers 0. On en déduit que quand t tend vers l'infini $e^{-th\Delta_h}$ est asymptotique à sa restriction à la somme des N premiers vecteurs propres. Et donc :

$$e^{-th\Delta_h} \sim e^{-thT} \Pi_N,$$

où T est la matrice de transmission et Π_N la projection sur la somme des N premiers vecteurs propres. Si $t = O(h^{-M})$, on peut approcher e^{-thT} par $\operatorname{Id} - thT$ et on voit ainsi que la probabilité de sauter de \mathcal{B}_i à \mathcal{B}_j est $\sim \frac{1}{\pi} t \sum_k e^{-d_k(A_i, A_j)}$ où la somme est sur les cols C_k qui font passer de \mathcal{B}_i à \mathcal{B}_j et d_k est la distance de A_i à A_j par le

col C_k . Si les 2 bassins ne sont pas adjacents la formule précédente ne s'applique pas.

10.4. Les inégalités de Morse. Le but de ce § est de prouver les inégalités de Morse.

Soit b_k les nombres de Betti de X , ie la dimension des espaces de cohomologie de de Rham

$$H_{dR}^k = Z_k / d\Omega_{k-1} ,$$

où Z_k est l'espace des formes fermées sur X .

Soit d'autre part $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse (ie dont les points critiques sont non dégénérés). L'indice d'un point critique est le nombre de carrés négatifs dans la hessienne de φ en ce point. L'indice est 0 pour un minimum local, n pour un maximum local. On note c_k le nombre de points critiques d'indice k .

Alors on a les inégalités de Morse (faibles)

$$b_k \leq c_k, \quad \sum (-1)^k b_k = \sum (-1)^k c_k ,$$

et même les inégalités fortes qui se traduisent par l'existence d'un polynôme $f(t)$ à coefficients ≥ 0 tel que

$$\sum c_k t^k = \sum b_k t^k + (1+t)f(t) ,$$

et que l'on peut réécrire :

$$\begin{aligned} b_0 &\leq c_0 \\ b_0 - b_1 &\geq c_0 - c_1 \\ b_0 - b_1 + b_2 &\leq c_0 - c_1 + c_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Ces dernières inégalités équivalent à l'existence d'un complexe de cochaines $\delta_k : E^k \rightarrow E^{k+1}$ dont la cohomologie est la même que celle du complexe de de Rham et tel que $\dim E_k = c_k$. En effet, la décomposition de Hodge assure alors l'existence de nombres ≥ 0 f_k tels que $c_k = b_k + f_{k-1} + f_k$.

En fait, il y a plusieurs façons de construire un tel complexe.

10.5. Le complexe de Witten. *Le complexe de Witten* est un sous-complexe de celui des formes différentielles C^∞ sur X . Il est défini à partir des laplaciens à poids associés aux mesures $\mu_h = e^{-2\frac{\varphi}{h}} v_g$, les $\Delta_{k,h}$. On va noter E_h^k la somme directe des espaces propres de $\Delta_{k,h}$ pour des valeurs propres ≤ 1 . La théorie de Hodge nous apprend qu'il s'agit d'un sous-complexe du complexe de de Rham dont la cohomologie donnée par les formes $\Delta_{k,h}$ -harmoniques est celle de de Rham.

On a alors le :

LEMME 29. *Pour h assez petit, la dimension de E_h^k est égale à c_k . En particulier, on a les inégalités de Morse fortes.*

Preuve.—

Rappelons que si $Uf = e^{-\frac{\varphi}{h}} f$, la différentielle d_h transportée de d par U s'écrit :

$$d_h \alpha = d\alpha + \frac{1}{h} d\varphi \wedge \alpha .$$

L'opérateur $H_h = d_h^* d_h + d_h d_h^*$, qui est autoadjoint sur $L^2(X, v_g)$ a le même spectre que Δ_h ; il peut s'écrire :

$$H_h = \Delta + \frac{1}{h^2} \|d\varphi\|^2 + \frac{1}{h} K ,$$

où $K = \mathcal{L}_{\nabla\varphi} + \mathcal{L}_{\nabla\varphi}^*$ est tensoriel (d'ordre 0), en effet

$$\mathcal{L}_Z f \alpha = f \mathcal{L}_Z \alpha + df(Z) \alpha ,$$

alors que

$$\mathcal{L}_Z^* f \alpha = f \mathcal{L}_Z^* \alpha - df(Z) \alpha .$$

□ Il suffit donc de prouver le :

LEMME 30. *Les oscillateurs harmoniques osculateurs $\Omega_{l,h}$ près d'un point critique d'indice k opérant sur les l -formes n'ont de valeurs propres nulles que si $l = k$ et dans ce cas ils n'en ont qu'une.*

Preuve.—

Soit $Q = 1/2(-x_1^2 - \dots - x_k^2 + y_1^2 + \dots + y_{n-k}^2)$ la hessienne de φ au point critique C d'indice k et donc $\varphi = Q + \varphi(C)$ dans des coordonnées normales au voisinage de C , et considérons le spectre de H_Q^l qui est essentiellement un oscillateur harmonique vectoriel :

$$H_Q^l = \Delta_0 + \frac{1}{h^2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) + \frac{1}{h} K_k^l ,$$

où K_k^l est un tenseur constant. Calculons l'action de K_k^l sur une forme $\omega_I = \wedge_{i \in I} dz_i$. Il suffit de calculer $K_i \omega_I = (\mathcal{L}_{z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} + \mathcal{L}_{z_i}^* \frac{\partial}{\partial z_i}) \omega_I$, où z_i désigne un x_i ou un y_i . On vérifie facilement que $K_i \omega_I = \pm \omega_I$ suivant que l'indice i figure ou non dans ω_I . On en déduit que $K_k^l \omega_I = -n \omega_I$ si et seulement si $\omega_I = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k$ et donc $l = k$. Donc l'oscillateur harmonique H_Q^l osculateur à H_h^l admet une valeur propre nulle si et seulement si $l = k$, la forme propre correspondante est

$$e^{-\frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2h}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k = e^{-\frac{Q}{h}} (e^{-\frac{\|x\|^2}{h}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) .$$

On vérifie facilement, en utilisant l'hypothèse (\star) que la valeur propre associée est exponentiellement petite, car la forme précédente est alors une solution exacte de $H_{k,h} \omega = 0$ dans un voisinage du point critique. Donc les valeurs propres de $\Delta_{k,h}$ associées aux puits d'indice k sont exponentiellement petites, les autres supérieures à C/h avec $C > 0$, ce qui finit les preuves.

□ *Remarque* : On vient en fait de calculer la cohomologie L^2 du complexe de de Rham sur \mathbb{R}^n avec les structures (pré)-hilbertiennes sur les k -formes données par les poids $e^{-2\frac{Q}{h}} dx$. Le complexe ainsi obtenue est *globalement elliptique* au sens que les laplaciens sont à résolvantes compactes. On peut évidemment modifier Q dans une région compacte sans changer cette cohomologie.

On peut aussi localiser : on considère un domaine $D = D^k \times D^{n-k}$ où D^m est la boule euclidienne de \mathbb{R}^m . On sépare la frontière en $\partial D_0 = S^{k-1} \times D^{n-k}$ et $\partial D_n = D^k \times S^{n-k-1}$ et on calcule la cohomologie du complexe de de Rham des

formes à support contenu dans $\text{int}(D^k) \times D^{n-k}$. Cette cohomologie (relative) est donnée par la théorie de Hodge à bord : *Dirichlet* sur ∂D_0 et *Neumann* sur ∂D_n . On peut le faire avec le poids $e^{-2\frac{Q}{h}} dx$ où avec n'importe quel poids. Le résultat est toujours l'existence d'une unique forme harmonique en degré k et aucune dans les autres degrés. Cette forme est localisée (pour $L^2(D, dx)$) près du point critique. On voit qu'on retrouve la présentation usuelle de la théorie de Morse : le franchissement d'une valeur critique qui géométriquement correspond à l'adjonction d'une anse, correspond ici à une augmentation de $+1$ de la dimension de E_h^k .

10.6. Le complexe de Thom-Smale. Pour des détails sur cette section consulter [Lau92].

La variété stable V_C^s du point critique C d'indice k est une sous-variété (non fermée) de X difféomorphe à \mathbb{R}^k : c'est l'ensemble des X pour lesquels les lignes de gradients croissantes convergent vers C (on définit de même les variétés instables V_C^u). On va supposer qu'on a orienté une fois pour toutes ces variétés. On ne peut intégrer les k -formes de $\Omega^k(X)$ sur V_C^s que si elle est assez régulière à l'infini. On supposera outre l'hypothèse (\star) que l'hypothèse de transversalité (générique) suivante est satisfaite :

$$\forall C, C' \text{ critiques, } V_C^s \text{ et } V_{C'}^u$$

se coupent transversalement. Le fait que cette propriété de transversalité soit générique est une conséquence du fameux théorème de Kupka-Smale. Dans ce cas, on peut intégrer les k -formes sur W_C^s et on a la formule de Stokes :

$$\forall \alpha \in \Omega^{k-1}(X), \quad \int_{V_C^s} d\alpha = \sum n_{C,C'} \int_{V_{C'}^s} \alpha ,$$

où l'entier $n_{C,C'}$ est nul si C' n'est pas dans l'adhérence de V_C^s et égal la somme de ± 1 correspondant aux différentes manières dont $V_{C'}$ est le *bord* de V_C^s . Notons que la *frontière* $\bar{V}_C^s \setminus V_C^s$ de V_C^s est une réunion de variétés stables et que celles-ci correspondent à des points critiques d'indice $< k$ sous l'hypothèse de transversalité précédente. En particulier, si (\mathcal{D}', ∂) est le complexe des courants (dual des formes) de X muni de la transposée ∂ de d , on peut plonger les espaces vectoriels engendré par les points critiques d'indice k dans \mathcal{D}'_k en associant à C le courant d'intégration sur V_C^s et cela forme un sous-complexe (F_k, ∂) du complexe des courants : c'est le *complexe de Thom-Smale*. Remarquons qu'il nécessite la donnée de g en plus de celle de la fonction de Morse φ . On notera $\langle C \rangle_s$ le courant d'intégration sur la variété stable du point critique C .

On a alors un accouplement bilinéaire $(\cdot|\cdot)_k$ entre E_h^k et F_k induit par celui entre Ω^k et \mathcal{D}'_k . On va montrer le

LEMME 31. *L'accouplement $(\cdot|\cdot)_k$ est non dégénéré pour h assez petit.*

Preuve. –

On va montrer que la matrice de l'accouplement dans une base bien choisie converge vers l'identité. Autrement dit, on a dans ces bases convergence *analytique* du complexe de Witten vers le dual du complexe de Thom-Smale attaché aux variétés stables, c'est-à-dire le complexe de Thom-Smale attaché aux variétés instables.

On choisit la base des ω_C projections orthogonales sur E_h^k des quasi-modes $\frac{1}{(\pi h)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{h}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ dans les coordonnées normales près du point C . On a alors

$$|\omega_C(x)| = O\left(\frac{1}{h^N} e^{\frac{\varphi(x) - \varphi(C) - d(x, C)}{h}}\right),$$

et il reste à remarquer que :

$$\varphi(x) - \varphi(C) \leq d(x, C)$$

avec égalité exactement pour les x qui peuvent être joint par une réunion de trajectoires du gradient de φ sur lesquelles φ est croissante : cette réunion est exactement V_C^u . On en déduit facilement que $\int_{V_C^s} \omega_C$ tend vers $\delta_{C, C'}$. En effet, il résulte de ce qui précède que ω_C est exponentiellement petite sur les variétés stables des autres points d'indice k , à cause de l'hypothèse de transversalité.

□

Remarque 1 : en fait, il est probable que sous les hypothèses indiquées, les courants $T_{\omega_C} = \int_X \cdot \wedge \omega$ de degré $n - k$ convergent vers les courants d'intégration sur les variétés instables V_C^u . Cela signifie que le complexe de Witten converge *géométriquement* vers le complexe de Thom-Smale associé aux variétés instables. En effet, on a montré que T_{ω_C} se concentre sur V_C^u . Montrons aussi que sur l'intérieur relatif, on a convergence vers $< C >_u$. Il suffit de prouver que si Z est un germe de sous-variété de dimension k transverse à V_C^u en un point intérieur, on a : $\lim_{h \rightarrow 0} \int_Z \omega_C = 1$. C'est le cas si Z est proche du point critique à cause de la forme normale. Il suffit donc de prouver que $d\omega_C$ tend vers 0 au voisinage de tout compact de V_C^u . Cela résulte du fait que $d\omega_C$ est une combinaison à coefficients bornés (presque entiers) des formes propres associées aux points critiques d'indice $k + 1$ et que V_C^u ne coupe pas l'adhérence de leur variété instable à cause de l'hypothèse de transversalité.

Remarque 2 : on a aussi montré que la cohomologie du complexe de Thom-Smale est la même que celle du complexe de de Rham. Lorsque la décomposition cellulaire correspond à une triangulation de X , c'est le théorème de de Rham !!

LES SYSTEMES SEMI-CLASSIQUES

1. Introduction : Born-Oppenheimer, Maxwell, systèmes adiabatiques

1.1. Approximation de Born-Oppenheimer.

1.2. Optique.

1.3. Limite adiabatique.

1.4. Hamiltonien matriciels généraux.

2. La séparation des niveaux

Il s'agit d'étudier une région de l'espace des phases où les valeurs propres $\lambda_1(x, \xi) < \lambda_2(x, \xi) < \dots < \lambda_N(x, \xi)$ sont de multiplicités constantes. Le système se découple microlocalement en une somme de systèmes diagonaux.

3. Le cas lisse : polarisation, connection géométrique, bandes

On veut écrire les équations de transport dans la situations précédente.

4. Croisements de niveaux : la géométrie

Il s'agit d'étudier les croisements de niveaux dans la situation générique ainsi que des formes normales pour les croisements évités.

5. La formule de Landau-Zener

6. Les croisements de codimension ≥ 2