93a

Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 13 , Roma (1993), 433-460

Multiplicités des valeurs propres
Laplaciens discrets et laplaciens continus

Y.COLIN de VERDIERE

PRESENTAZIONE: *Il Comitato di redazione inizia, con la pubblicazione di questo articolo, una nuova politica editoriale, che consiste nell'incentivare la pubblicazione di lavori di rassegna e di orientamento della ricerca, su argomenti di attualità scientifica. Questo articolo è stato redatto in occasione di una serie di conferenze, tenute dall'Autore all'Università di Roma "La Sapienza" nel novembre 1992. La sua suddivisione in capitoli, ciascuno autosufficiente, è un riflesso della sua origine, che ha indotto altresì l'Autore ad arricchire il testo di motivazioni e di esempi. L'Autore ha inteso da un lato offrire al lettore una guida attraverso la letteratura sull'argomento, e dall'altro esporre il suo punto di vista, rinnovato e semplificato talora nella presentazione unitaria dei risultati.*

I primi capitoli introducono alle problematiche relative alla molteplicità degli autovalori degli operatori differenziali del secondo ordine, autoaggiunti ed a coefficienti reali, su di una varietà compatta: operatori di Schrödinger in assenza di campo magnetico. Successivamente sono esposti, in forma rimaneggiata e semplificata, i risultati concernenti le maggiorazioni della molteplicità e la costruzione dei laplaciani continui sulle varietà compatte. Si accoppiano le idee sulla trasversalità, introdotte da Arnold, con i procedimenti che introducono come modelli semplici i laplaciani sui grafi. Si trattano poi gli spettri dei grafi ed i relativi operatori ammissibili, motivandone la introduzione, e si definisce un nuovo invariante, detto segnatura spettrale, che congloba tutti gli invarianti considerati in precedenza, e che si inquadra, in modo naturale, in teorie combinatorie classiche.
L'ultimo capitolo è dedicato alla enunciazione di problemi aperti, con l'indicazione deli riferimenti bibliografici. La bibliografia conclusiva è ampia ed ha carattere di completezza sull'argomento.

ABSTRACT: *This paper is a survey on multiplicities of eigenvalues of Schrödinger operators on compact manifolds. It include several papers of the author with some new point of view in many cases.*

KEY WORDS: *Spectrum – Multiplicities – Transversality – Finite elements – Perturbation of spectra.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 05C10, 35P05, 47A55, 58G25

1 – Introduction

Ce texte, rédigé à l'occasion d'une série de conférences données à l'université de Rome en novembre 1992, a été conçu à la fois comme une introduction au sujet, permettant de cheminer dans la littérature et comme un complément aux travaux de l'auteur, comportant souvent des reformulations et des simplifications.

On y trouvera donc, outre une liste de problèmes ouverts et une bibliographie, l'énoncé et souvent une idée de preuve de la plupart des résultats généraux connus sur les multiplicités de valeurs propres d'opérateurs différentiels elliptiques du second ordre auto-adjoints à coefficients réels sur une variété compacte, i.e. d'opérateurs de Schrödinger sans champ magnétique (voir [27] pour les champs magnétiques).

Ces résultats sont de 2 types:

les majorations de multiplicités: les résultats initiaux de CHENG [12] pour les surfaces compactes ont été améliorés en utilisant la même idée de base, en particulier par BESSON [5] et NADIRASHVILI [39]. Les résultats optimaux ne sont pas encore connus.

La construction d'exemples par des méthodes assez générales, sujet développé dans la série d'articles [18], utilisant de façon cruciale des idées de transversalité introduites par ARNOLD [2]. L'idée étant alors de considérer les laplaciens sur les graphes comme modèles simplifiés des laplaciens continus sur les variétés, bien entendu l'introduction de graphes et de leurs laplaciens dans le sujet n'est pas nouvelle, mais ce qui l'est sans doute plus est le couplage avec les idées de transversalité !

Un des aboutissements de ces techniques est l'introduction d'invariants des graphes fabriqués en considérant l'ensemble de tous les opérateurs admissibles. L'obtention d'un *critère de planarité* en termes de tels invariants est un peu miraculeux. Ci-dessous, nous faisons une tentative d'introduction d'invariants plus complets, sous le nom de *signature* *spectrale* d'un graphe.

Une autre conséquence marquante est l'absence totale de contraintes sur une section finie du spectre du laplacien sur une variété de dimension ≥ 3.

Il nous a paru intéressant de rassembler au début (chapitre 2) des résultats connus (classiques?) sur les *perturbations de valeurs propres et d'espaces propres*, que ce soit dans le cas lisse (2.1) ou le cas singulier (2.4 : petites valeurs propres et 2.5 : compactifications). La situation transversale est alors facile à décrire (2.2), ainsi que la topologie locale et les arguments de monodromie (2.3).

On trouvera au chapitre 3, l'énoncé des résultats connus sur les *bornes pour la multiplicité* (3.2), ainsi qu'un idée sur leur preuve (3.3). Le cas de la dimension 1, populaire en raison du succès des méthodes spectrales inverses, est rappelé ici (3.1), car il s'intègre bien à l'ensemble.

Au chapitre 4, consacré au *spectre des graphes*, on trouvera, outre la définition des opérateurs admissibles et ses motivations (4.1), des résultats généraux difficile à localiser (4.2) comme un énoncé du théorème de Courant pour les graphes. Enfin on a englobé notre invariant $\mu(\Gamma)$ ([22]) dans un invariant plus général, appelé ici *signature spectrale* (4.3) et montré comment ceci rentre bien dans le cadre de la théorie des *mineurs* et des graphes *critiques*.

Le chapitre 5 est consacré au résultat principal: *construction de laplaciens continus* sur une variété X ayant comme section començante un spectre stable d'opérateurs sur un graphe plongé dans X. Il nous a paru intéressant d'en donner une preuve assez détaillée, plus simple que les preuves initiales.

Il a paru intéressant, au chapitre 6, de revisiter la méthode des *éléments finis*, bien connue en analyse numérique, et de montrer ainsi que l'approche par les graphes permet en principe de trouver tous les exemples.

On trouvera enfin au chapitre 7 une liste de *problèmes et de références annexes* et au chapitre 8 une *bibliographie du sujet*.

Pour finir, je veux remercier le département de mathématiques de l'université de Rome et tout spécialement M. Bordoni, pour leur hospitalité.

2 – Perturbations des valeurs propres multiples et transversalité

2.1 – Le cas différentiable

Références pour 2.1:[1], [40], [29].

Plaçons-nous dans un espace de Hilbert *réel* $\mathcal{H}$ qu'on va supposer de dimension finie pour alléger l'écriture (en dimension infinie, il faudrait considérer des opérateurs auto-adjoints tous de même domaine) dont on notera $(.|.)$ le produit scalaire. On notera $\mathrm{Sym}(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs symétriques sur $\mathcal{H}$ qu'on pourra identifier à l'espace des formes quadratiques au moyen de la bijection

$$A \to q_A \ ,$$

qui associe à A la forme quadratique $q_A(x) = (Ax|x)$.

Soit $A_o \in \mathrm{Sym}(\mathcal{H})$, λ_o une valeur propre de A_o, E_o l'espace propre associé et N la dimension de E_o (en dimension infinie, on supposerait que λ_o est un point isolé du spectre et que l'espace propre associé est de dimension finie) .

Soit D un disque fermé de centre λ_o du plan complexe ne contenant pas d'autre valeur propre de A_o que λ_o. Soit V un voisinage ouvert connexe de A_o tel que les opérateurs $A \in V$ n'ont pas de valeur propre sur $\gamma = \partial D$.

Alors $P_A = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}(\lambda - A)^{-1}d\lambda$ est le projecteur orthogonal (cela se vérifie immédiatement par diagonalisation de A) sur le sous-espace de $\mathcal{H}$ engendré par les vecteurs propres de A dont la valeur propre est dans D. Il est clair que P_A dépend analytiquement de A dans V. Quitte à restreindre V, on peut supposer que l'image E du projecteur P_A est transverse à l'orthogonal F_o de E_o. On définit alors une *isométrie* $U_{E_o,E}$ de E_o sur E par la formule:

$$U_{E_o,E} = (\mathrm{Id}_{E_o} + B) \circ C \ ,$$

où $B : E_o \to F_o$ est l'application linéaire dont le graphe est E et

$$C = [({}^t(\mathrm{Id}_{E_o} + B))(\mathrm{Id}_{E_o} + B)]^{-\frac{1}{2}} \ ,$$

où la puissance $-\frac{1}{2}$ est prise au sens du calcul fonctionnel des opérateurs symétriques dans E_o.

On considère alors, toujours pour $A \in V$, l'opérateur $\Phi(A) = (U_{E_o,E})^{-1} \circ A_{|E} \circ U_{E_o,E}$ qui est symétrique sur E_o et admet pour spectre celui de $A_{|E}$ c'est-à-dire les valeurs propres de A situées dans D.

L'application Φ est analytique dans V et on peut calculer la différentielle L de $\Psi : A \to q_{\Phi(A)}$ en A_o.

On trouve, par un calcul sans malices:

$$L(\delta A) = (\delta A.|.)_{|E_o} .$$

On en déduit que Φ est une submersion de V sur $\mathrm{Sym}(E_o)$. En particulier, on a les résultats suivants:

THÉORÈME 1. *Les valeurs propres* $\lambda_1(\epsilon) \leq \ldots \leq \lambda_N(\epsilon)$ *situées dans* D *de* $A_o + \epsilon\delta A$ *vérifient:*

$$\lambda_i(\epsilon) = \lambda_o + \epsilon\mu_i + O(\epsilon^2) ,$$

où $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_N$ *sont les valeurs propres de* $L(\delta A) = (\delta A.|.)_{|E_o}$.

THÉORÈME 2. W_{N,λ_o}, *l'ensemble des matrices de* $\mathrm{Sym}(\mathcal{H})$ *ayant* λ_o *comme valeur propre de multiplicité* N, *est une sous-variété (non fermée) de codimension* $\frac{N(N+1)}{2}$ *de* $\mathrm{Sym}(\mathcal{H})$ *et* $W_N = \cup_{\lambda \in \mathbf{R}} W_{N,\lambda}$ *en est une sous-variété de codimension* $\frac{N(N+1)}{2} - 1$.

En particulier W_2 est de codimension 2, W_3 de codimension 5, etc...

Une famille à un paramètre réel générique de matrices symétriques n'a donc pas de valeurs propres dégénérées, une famille à 2 paramètres peut en avoir en des points isolés, etc... Cette observation remonte à VON NEUMANN et WIGNER [45], et a été amplifiée par ARNOLD [2] qui curieusement ne les cite pas.

Il faut remarquer la formule très simple donnant la variation première des valeurs propres. Cette formule est un cas particulier de la théorie des pertubations des variétés critiques non-dégénérées au sens de BOTT [8].

Si $F_\epsilon : Z \to \mathbf{R}$, où Z est une variété C^∞, admet pour $\epsilon = 0$ une variété critique non-dégénérée C, on obtient une formule pour les valeurs critiques de F_ϵ au premier ordre en considérant les valeurs critiques de la restriction à C de $\frac{dF_\epsilon}{d\epsilon}$ en $\epsilon = 0$. Ici il faudrait considérer les valeurs propres de A comme les valeurs critiques de q_A restreinte à la sphère unité de $\mathcal{H}$.

Ce phénomène est aussi à la base de la possibilité d'évaluer l'effet tunnel en régime semi-classique même en l'absence d'analyticité du potentiel [31].

2.2 – L'hypothèse de transversalité

Il faut remarquer que la transversalité ne se voit pas au niveau des valeurs propres, mais au niveau des matrices: si $A(t) = \mathrm{diag}(t, -t) \in \mathrm{Sym}(\mathbf{R}^2)$. Les valeurs propres $\lambda_1(t) = -|t|$ et $\lambda_2(t) = |t|$ semblent se croiser transversalement. Mais il n'en est rien: si on considère $A_\varepsilon(t)$ obtenu en ajoutant ε hors de la diagonale à $A(t)$, les valeurs propres de $A_\varepsilon(t)$, pour $\varepsilon \neq 0$ ne sont dégénérées pour aucune valeur de t.

Soit maintenant

$$F : Z \to \mathrm{Sym}(\mathcal{H})$$

une application différentiable et z_o tel que $F(z_o) = A_o$. On dira que la suite de valeurs propres $\Sigma = ((\lambda_1, m_1), (\lambda_2, m_2), \ldots, (\lambda_k, m_k))$ de A_o de multiplicités $m_i = dim E_i$ est *transversale pour l'application* F ou *stable* si F est transversale en z_o à la sous-variété W_Σ de $\mathrm{Sym}(\mathcal{H})$ formée des matrices ayant Σ comme partie de leur spectre avec les multiplicités $m(\lambda_i) = m_i$. On construit alors une application $\Phi : V \to \oplus_{i=1}^{i=k} Q(E_i)$ comme au 2.1. où V est un voisinage de A_o dans $\mathrm{Sym}(\mathcal{H})$. On a alors transversalité si et seulement si la différentielle

$$L : T_{z_o}Z \to \bigoplus_{i=1}^{i=k} Q(E_i) ,$$

de Φ, définie par $L(\delta z) = \oplus (F'_{z_o}(\delta z).|.)_{|E_i}$ est surjective.

Il est clair que si c'est le cas et si F_ε converge au sens C^0 vers F, alors il existe z_ε convergeant vers z_o tel que le spectre de $F_\varepsilon(z_\varepsilon)$ admette les valeurs propres λ_i avec la multiplicité m_i.

2.3 – La topologie

Il est intéressant de pouvoir détecter la présence de valeurs propres multiples dans une famille d'opérateurs de façon purement topologique. Bornons-nous au cas de la dimension 2.

Soit $W_2^k \subset \mathrm{Sym}(\mathcal{H})$ défini comme l'ensemble des matrices telles que $\lambda_k = \lambda_{k+1}$. W_2^k est formé d'une strate générique de codimension 2 et d'autres strates correspondant à des dégénérescences plus élevées et de codimension relative ≥ 3.

W_2^k définit donc un cycle à coefficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et on peut définir l'entrelacement d'une courbe γ fermée de $\mathrm{Sym}(\mathcal{H})$ ne rencontrant pas W_2^k avec cet ensemble, soit $e(\gamma, k)$ ce nombre entier modulo 2. Si E_k est le fibré en droites réelles au-dessus de γ défini comme l'espace propre associé à λ_k et $(-1)^{\varepsilon_k}$ sa monodromie, on a:

$$\varepsilon_k = e(\gamma, k) + e(\gamma, k-1) \bmod 2 ,$$

qui se démontre par homotopie et linéarisation.

En utilisant la géométrie décrite au §2.1., on se ramène au cas où $\mathcal{H} = \mathbf{R}^2$ et γ est définie par $\gamma(t) =$ la symétrie orthogonale autour d'une droite faisant un angle t avec une droite fixe. On voit que si t augmente de π, $\gamma(t)$ est inchangé alors que les vecteurs propres ont tourné de π.

Cette propriété permet de détecter numériquement les valeurs propres dégénérées dans les familles à 2 paramètres. Si γ est le bord d'un domaine D et que le fibré E_k est non trivial sur γ, D contient des points où la k-ème valeur propre est dégénérée. Cette propriété est utilisée dans [4].

De la même façon, NADIRASHVILI a montré le résultat suivant [16]:

THÉORÈME. *Soit D un domaine convexe compact du plan. Soit Z l'ensemble des métriques euclidiennes sur le plan telles que l'aire de D vaille 1 (Z est de dimension 2). Pour tout entier k pair, il existe $g \in Z$ telle que la k-ème valeur propre du problème de Neumann dans (D, g) est dégénérée.*

L'idée de la preuve est de regarder ce qui se passe à l'infini de Z qui est topologiquement un disque. Le domaine D devient alors linéaire et aucune valeur propre du problème unidimensionnel n'est multiple. On peut alors calculer la monodromie en utilisant les propriétés des zéros des fonctions propres pour un problème de Sturm-Liouville.

On peut généraliser au cas *hermitien complexe.* Dans ce cas W_2 est de codimension réelle 3 et on doit regarder l'entrelacement avec une surface compacte. La classe de Chern du fibré analogue à E_k permet de calculer le nombre d'entrelacement qui est ici un entier. On peut le calculer par intégrale de la courbure d'une connection naturelle, c'est l'interprétation géométrique que B. SIMON a donné de la phase de BERRY [43],[9],[10],[27].

2.4 – Le cas singulier I: petites valeurs propres

2.4.1. – Ce §2.4. reprend un manuscrit non publié (*variations spectrales*) et les *lemmes de petites valeurs propres de* [11] et [21]).

$\mathcal{H}$ est toujours un espace de Hilbert, q_ε une forme quadratique positive fermée sur $\mathcal{H}$ dépendant du paramètre réel $\varepsilon > 0$ et de domaine $\mathcal{H}_1$ indépendant de ε.

On note $|g|_1^2 = |g|^2 + q_\varepsilon(g)$, la norme sur $\mathcal{H}_1$ associée à q_ε.

On a une distance naturelle sur la grassmannienne des sous-espaces de dimension N finie fixée de $\mathcal{H}$ définie par exemple comme la distance de Hausdorff des traces sur la sphère unité de $\mathcal{H}$. On la note $\alpha(.,.)$.

On note E_N la somme des espaces propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_N$ de q_ε (on aura toujours $\lambda_{N+1} > \lambda_N$).

On a alors les 2 théorèmes suivants:

THÉORÈME 3. *On suppose que $\lambda_{N+1} \geq C > 0$ et qu'il existe un espace $F \subset \mathcal{H}_1$ de dimension N tel que*

$$\forall f \in F,\ \forall g \in \mathcal{H}_1 ,$$

on ait:

$$|q_\varepsilon(f,g)| \leq \varepsilon \|f\| \|g\|_1 .$$

Alors:

i) $\alpha(E_N, F) = O(\varepsilon)$,

ii) $\|q_{\varepsilon|E_N} \circ U_{F,E_N} - q_{\varepsilon|F}\| = O(\varepsilon^2)$.

En particulier, si μ_i sont les valeurs propres de $q_{\varepsilon|F}$, on a:

$$\lambda_i(\varepsilon) = \mu_i(\varepsilon) + O(\varepsilon^2) .$$

THÉORÈME 4. *On suppose maintenat que:* $\lambda_N \leq C < C+1 \leq \lambda_{N+1}$ *et qu'il existe une suite*

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_N$$

de sous-espaces de $\mathcal{H}_1$ *tels que* F_i *est de dimension* i *et que*

$$q_{\varepsilon|F_i}(.) \leq (\lambda_i + \varepsilon)\|.\|^2 \ .$$

Alors:
i) $\alpha(E_N, F_N) = O(\sqrt{\varepsilon})$,
ii) $\|q_{\varepsilon|E_N} \circ U_{F_N,E_N} - q_{\varepsilon|F_N}\| = O(\varepsilon)$.

PREUVE.
2.4.2: *Distances sur les grassmanniennes*

Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, il y a, sur la grassmannienne des sous-espaces de dimension N, 2 distances utiles qui sont quasi-isométriques avec des constantes ne dépendant que de N. Ce sont la distance α qui est la distance de Hausdorff des traces sur la sphère unité ("angle") et la distance définie à partir de la distance sur les tenseurs antisymétriques d'ordre N ou fermions, (qui sont munis d'une structure hilbertienne canonique) en utilisant le plongement qui associe à un sous-espace orienté de dimension N le tenseur $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N$ où les e_i forment une b.o. > 0 du sous-espace considéré.

2.4.3: *Proximité des espaces propres et des espaces tests*

Le but de ce §2.4.3. est de prouver le i) des théorèmes 3 et 4. La stratégie est la même:
A. Preuve pour $N = 1$ (sans malices).
B. Extension des opérateurs aux fermions d'ordre N.

2.4.5: *Ellipsoïdes emboités*

On a besoin du

LEMME. *Soit* Q_o *et* Q_1 *2 formes quadratiques positives sur un espace euclidien* E *de dimension* $N < \infty$ *et telles que* $Q_o \leq Q_1 \leq M$ *et les valeurs propres vérifient:*

$$\forall i, \lambda_i(Q_o) \leq \lambda_i(Q_1) \leq \lambda_i(Q_o) + \varepsilon \ ,$$

alors $\|Q_o - Q_1\| = O(\varepsilon)$, *où le* O *ne dépend que de* N *et* M.

La preuve utilise une diagonalisation simultanée des 2 formes.

2.4.6: *Preuve des théorèmes*

Dans les 2 cas le théorème se prouve en utilisant 2.4.5. appliqué à $q_{F_N}(Ux)$ et $q_{E_N}(x)$, où U est l'isométrie canonique de E_N sur F_N. Les inégalités entre les formes quadratiques sont vérifiées à $O(\varepsilon)$ (resp. à $O(\varepsilon^2)$) près.

2.5 – Le cas singulier II: compactifications

Il s'agit du problème suivant: soit E est un espace vectoriel réel de dimension finie, et $Q(= Q_E)$ le cône fermé des formes quadratiques ≥ 0 sur E. Ce cône admet une compactification naturelle définie de la façon suivante: les éléments à l'infini ∂Q de Q sont les couples $q = (F, r)$ où F, le domaine de q, est un sous espace vectoriel strict de E et r une forme quadratique ≥ 0 sur F. On plonge Q et ses éléments à l'infini ∂Q dans I^E où $I = [0, +\infty]$, en associant à une forme q de domaine F la fonction semi-continue inférieurement (sci) définie par q sur F et $+\infty$ ailleurs (on fera cette identification sans le dire ultérieurement). On munit alors $\hat{Q} = Q \cup \partial Q$ de la topologie induite par la convergence simple sur E. Il n'est pas difficile de vérifier que $\hat{Q}$ est compact.

Si on suppose E euclidien de dimension N, on peut parler des valeurs propres d'une forme quadratique $q = (F, r)$ avec $\dim(F) = m \leq n$: il s'agit de la suite $\lambda_1 \leq \lambda_2 < ... < \lambda_m < \lambda_{m+1} = ... = \lambda_N = +\infty$ qui est du reste obtenue par application directe du minimax à l'extension de r par $+\infty$ hors de F.

Les valeurs propres sont alors semi-continues supérieurement, mais pas nécessairement continues comme le montre cet

Exemple: $E = \mathbf{R}^2$ avec la structure euclidienne canonique, $q_a(x, y) = (1/a^2)(x - ay)^2$ avec $0 < a \leq 1$ et $q_0 = (\{x = 0\}, y^2)$. On vérifie que q_a tend vers q_0. On a $\lambda_1(a) = 0$ pour $a > 0$, alors que $\lambda_1(0) = 1$.

On va montrer que les valeurs propres sont continues si on se restreint aux compactifiés de cônes simpliciaux. Un sous-cône C de Q est dit *simplicial* s'il existe des $e_\alpha \in C$ $(\alpha \in A)$, linéairement indépendants tels que

C soit l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs (≥ 0) des e_α. La relation d'ordre des formes quadratiques positives restreintes à ces cônes a une propriété spéciale: le cône est réticulé (on peut prendre des "sup" et des "inf").

On compactifie alors C en prenant son adhérence dans $\hat{Q}$. En fait $\hat{C}$ peut être vu comme l'ensemble des $\sum_\alpha x_\alpha e_\alpha$ où les $x_\alpha \in I$, mais cette représentation n'est pas unique: l'application naturelle "can" de A^I dans $\hat{C}$ est surjective, mais généralement pas injective. Par exemple $\text{can}(\infty.(x-y)^2 + \infty.(y-z)^2 + c.(z-x)^2)$ est indépendante de c: son domaine est en effet $x = y = z$ où elle vaut 0.

On a alors le

Théorème 5. *Théorème 5—Si C est simplicial, les valeurs propres λ_k sont continues de $\hat{C}$ dans I, ainsi que la résolvante définie plus bas.*

Preuve. La preuve est assez simple. On procède par le minimax: on considère pour chaque k, la famille $\mathcal{F}_k$ de compacts de la sphère unité de E qui sont les traces des sous-espaces de dimension k de E. On pose pour un tel compact K et une forme q: $\tilde{q}(K) = \sup_{x\in K} q(x)$. La fonction $\tilde{q}$ est semi-continue inférieurement sur l'ensemble des compacts de la sphère unité munie de la topologie de Hausdorff. On a maintenant, par le minimax: $\lambda_k(q) = \inf_{K\in\mathcal{F}_k} \tilde{q}(K)$.

Considérons maintenant une suite q_n convergent vers q_∞ dans $\hat{C}$. On a d'abord $\lim \lambda_k(q_n) \leq \lambda_k(q_\infty)$ qui est toujours vrai.

Puis, si $Q_n = \inf_{k\geq n} q_n$, Q_n est une suite croissante d'éléments de $\hat{C}$ convergent vers q_∞. On a de plus:

$$\lambda_k(q_n) \geq \lambda_k(Q_n) ,$$

et on peut passer à la limite à droite, grâce au:

Lemme. *Si f_n est une suite croissante de fonctions sci sur un compact $\mathcal{F}$, on a:*

$$\lim(\inf f_n) = \inf(\lim f_n) .$$

On a ainsi $\lim \lambda_k(Q_n) = \lambda_k(q_\infty)$. On remarque aussi que, si $\tilde{q}_\infty$ atteint son minimum en un seul point K_∞ de $\mathcal{F}_k$, et que $\inf_{K\in\mathcal{F}_k} \tilde{q}_n(K) = \tilde{q}_n(K_n)$, alors K_n tend vers K_∞. Donc, si on a pour q_∞, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, on a convergence de la somme directe des espaces propres associés aux valeurs propres d'ordre $\leq k$. On en déduit la convergence des résolvantes, définies ainsi: la résolvante (pour λ non valeur propre) de $q = (F, r)$ est la projection orthogonale sur F, suivie de la résolvante de l'opérateur auto-adjoint associé à r sur F, suivie du plongement de F dans E:

$$R_q(\lambda) = j \circ (\lambda - A_r)^{-1} \circ p\ .$$

Les $R_q(\lambda)$ dépendent continûment de q pour la convergence uniforme sur le complémentaire du spectre et la topologie de $\mathrm{Sym}(\mathcal{H})$. □

Remarque. Certaines compactifications utilisées en géométrie relèvent de variantes de la méthode précédente: par exemple la compactification de l'espace de Teichmüller d'une surface au moyen des (classes d'isotopie de) feuilletages mesurés. Dans ce cas, l'espace E est l'espace des 1-formes différentielles sur la surface et il est facile d'associer à une métrique riemannienne aussi bien qu'à un feuilletage mesuré une forme quadratique positive sur E. La difficulté est de faire le quotient par les difféomorphismes isotopes à l'identité.

3 – Majorations des multiplicités

3.1 – La dimension 1

Dans ce cas, $X = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et on s'intéresse à l'opérateur de Schrödinger

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

opérant sur les fonctions périodiques. Les valeurs propres vérifient alors la suite d'inégalités:

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4 \leq \ldots < \lambda_{2k} \leq \lambda_{2k+1} < \ldots$$

et ce sont les seules contraintes sur une section finie du spectre [37].

Ces inégalités se prouvent facilement en introduisant le spectre antipériodique μ_k (ie les valeurs propres de H correspondant à des fonctions propres qui vérifient $f(x+1) = -f(x)$) et en observant que ces 2 spectres ne se rencontrent pas. La preuve se fait alors par continuité à partir du cas $V = 0$; on a ainsi les entrelacements:

$$\lambda_1 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \mu_3 \leq \dots$$

3.2 – Les surfaces

Soit $H = \Delta_g + V$, où Δ_g est le laplacien d'une métrique riemannienne g sur une surface X connexe et $V \in C^\infty(X, \mathbf{R})$, opérant sur l'espace des fonctions sur X.

On note de nouveau $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ le spectre de H et m_k la multiplicité de λ_k.

On a alors les résultats suivants:

Théorème 6 [12], [5], [39], [21]. *Les multiplicités m_k vérifient:*
Si $X = S^2$, $m_k \leq 2k - 1$,
si $X = P^2(\mathbf{R})$ ou K_2 (la bouteille de Klein), $m_k \leq 2k + 1$,
si $X = T^2$, $m_k \leq 2k + 2$,
enfin si la caractéristique d'Euler $\chi(X)$ est < 0, $m_k \leq 2k+1-2\chi(X)$.

Ces inégalités sont optimales pour $k = 2$ **et** $\chi(X) \geq 0$. L'optimalité est obtenue pour des métriques à courbure constante, sauf pour K^2 où une chirurgie à partir de P^2 est nécessaire [21] (ou [39] pour un autre exemple).

Voir § 7.1 pour les problèmes ouverts.

3.3 – Une idée des preuves

La preuve de Cheng et ses améliorations reposent sur le théorème de Courant sur les domaines nodaux [13] p. 451-453:

Théorème 7. —*Si $\varphi \in E_{\lambda_k}$, alors le nombre de composantes connexes de $X \setminus \varphi^{-1}(0)$ est inférieur ou égal à k.*

On a besoin en outre d'un résultat sur la structure locale des zéros d'une fonction propre, si $H\varphi = \lambda\varphi$, au voisinage d'un zéro de φ, on a, dans des coordonnées orthonormales en z_o:

$$\varphi(z) = P_N(z) + O(|z|^{N+1}) ,$$

où P_N est un polynôme homogène harmonique de degré N.

De cela, on déduit que $\varphi^{-1}(0)$ est un graphe Γ plongé dans X dont les sommets sont de degré pair.

On note alors Ω_i les composantes connexes de $X \setminus \varphi^{-1}(0)$ et S l'ensemble des sommets s de ce graphe, dont on note par $v(s)$ le degré. Le calcul de la caractéristique d'Euler de X donne:

$$\chi(X) = \sum_i \chi(\Omega_i) + \sum_s (1 - \frac{v(s)}{2}) .$$

Dans le second membre, la première somme est $\leq k$ d'après le théorème de Courant. La seconde est rendue petite en utilisant le fait que si E_{λ_k} est de dimension m_k, il existe par l'algèbre linéaire élémentaire une $\varphi \in E_{\lambda_k} \setminus 0$ telle que φ ait en z_o (choisi) un zéro d'ordre $E(\frac{m_k}{2})$ (pour une solution de $H\varphi = \lambda\varphi$ s'annuler à l'ordre N lorsqu'on s'annule à l'ordre $N-1$ nécessite 2 conditions [5]). On obtient ainsi la majoration:

$$m_k \leq 2k - 2\chi(X) + 3 .$$

Cette majoration due à Besson a été raffinée par Nadirashvili dans le cas où $\chi(X) < 0$.

4 – Spectres de graphes

4.1 – Oscillateurs couplés

Quelle est la bonne notion d'opérateur sur un graphe?

Γ est ici un graphe fini dont on note S l'ensemble des $N = \#S$ sommets et A l'ensemble des arêtes. On suppose toujours Γ sans boucles ni arêtes multiples. Γ est donc un complexe simplicial fini de dimension 1. On choisit une fois pour toute une orientation de chaque arête: pour une arête α, on note α_+ son extrémité et α_- son origine.

On a alors une différentielle $d : \mathbf{R}^S \to \mathbf{R}^A$ définie par

$$df(\alpha) = f(\alpha_+) - f(\alpha_-) .$$

On peut prendre l'adjoint de d par rapport à des métriques euclidiennes diagonales $(x|y)_0 = \sum_{i\in S} V_i x_i y_i$ (resp. $(u|v)_1 = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha u_\alpha v_\alpha$) sur $\mathbf{R}^S$ (resp. $\mathbf{R}^A$) avec $V_i > 0$, $c_\alpha > 0$. On obtient ainsi un opérateur $H_{V,c} = d^\star d$ sur $\mathbf{R}^S$ qui est un analogue du laplacien. Il peut être vu comme une matrice symétrique $N \times N$ en l'écrivant dans la b.o. $e_i = 1/\sqrt{V_i}\delta(i)$. Cette matrice M a les propriétés suivantes (outre la symétrie):

i) les éléments $m_{i,j}$ où $(i, j) \in A$ sont < 0.

ii) Les éléments non diagonaux $m_{i,j}$ où (i, j) n'est pas une arête sont nuls.

Nous retiendrons i) *et* ii) *comme définition des opérateurs de Schrödinger sur* Γ. Leur ensemble O_Γ est un cône de $\mathrm{Sym}(\mathbf{R}^S)$ de dimension $N + \#A$. On sera parfois amené à considérer le cône simplicial O_Γ^+ formé des formes quadratiques q de O_Γ de la forme:

$$q(x) = \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j}(x_i - x_j)^2 + \sum_{i\in S} W_i x_i^2 ,$$

avec $c_{i,j} > 0$, $W_i > 0$. Cela ne change rien, car tout élément de O_Γ est translaté dans O_Γ^+ par un vecteur convenable $\mu.\mathrm{Id}$, ce qui n'affecte le spectre que par une translation.

En physique, ces matrices interviennent dans l'étude des petites oscillations d'un système de masses à un degré de liberté (pendules simples par ex.) couplées entre elles par des forces de rappels de combinatoire Γ. Le produit scalaire $(.|.)_0$ s'interprête comme l'énergie cinétique (i.e. les V_i sont les masses). Le produit scalaire $(.|.)_1$ s'interprête lui comme l'énergie potentielle.

Si $\lambda_1 = 0 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ sont les valeurs propres de $H_{V,c}$, les petites oscillations du système ont pour fréquences les racines carrées de ces nombres.

4.2 – Premières propriétés du spectre

Les opérateurs $H \in O_\Gamma$ ont des propriétés spectrales analogues à celles classiques des opérateurs de Schrödinger sur les variétés.

On a par exemple:

THÉORÈME 8. *Si Γ est connexe, λ_1 est de multiplicité 1 et l'espace propre est engendré par une fonction strictement positive en tout sommet .*

THÉORÈME 9. *Supposons toujours Γ connexe et soit $\varphi \in E_{\lambda_k} \setminus 0$, $\Omega_+ = \{i \in S | \varphi(i) \geq 0\}$, $\Omega_- = \{i \in S | \varphi(i) \leq 0\}$. Si $n_\pm$ est le nombre de composantes connexes de $\Omega_\pm$, alors $n_+ + n_- \leq k$.*

REMARQUE. L'énoncé précédent est une généralisation du théorème de Courant sur les domaines nodaux. La généralisation plus naturelle comme majoration du nombre de composantes connexes de l'ensemble où $\varphi \neq 0$ est fausse, comme le montre l'exemple du graphe formé d'une étoile avec beaucoup de branches, avec la matrice du graphe: E_{λ_2} est alors formé des fonctions qui s'annulent au centre et dont la somme des valeurs aux sommets est 0.

PREUVE DU THÉORÈME 8. Soit $\varphi \in E_{\lambda_1}$ de norme 1. Alors $q_H(|\varphi|) \leq q_H(\varphi)$, alors que la norme est conservée. On en déduit que $\eta = |\varphi| \in E_{\lambda_1}$. Soit $i \in S$ tel que $\eta(i) = 0$ et qu'il existe j voisin de i avec $\eta(j) > 0$. Soit $\eta_\varepsilon = \eta + \varepsilon\delta(i)$. On a:

$$\|\eta_\varepsilon\| = 1 + O(\varepsilon^2) ,$$

alors que

$$q_H(\eta_\varepsilon) = q_H(\eta) - a\varepsilon + O(\varepsilon^2) ,$$

avec $a > 0$. On en déduit une contradiction par la caractérisation variationnelle du λ_1.

PREUVE DU THÉORÈME 9. Sinon, il existe des $\Omega_i \subset S$, $1 \leq i \leq k+1$, tels que φ est de signe constant sur chaque Ω_i et pour tout sommet $j \notin \Omega_i$ mais voisin de $i \in \Omega_i$, on a $\varphi(j) < 0$ si la restriction de φ à Ω_i est positive ou nulle et inversement. Il est impossible que φ soit identiquement nulle sur Ω_i (écrire que $H\varphi = \lambda\varphi$ en i).

On définit maintenant $\eta_i = |\varphi|\chi_{\Omega_i}$. Soit $\eta = \sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i \eta_i$ orthogonal aux fonctions propres $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{k-1}$ et non nulle. On voit que

$$q_H(\eta) \leq \lambda_k \|\eta\|^2$$

K2

et donc $\eta \in E_{\lambda_k}$, ce qui est impossible: en effet, si $\Omega = \Omega_{k+1} \cup_i \Omega_i$, où la réunion porte sur les i tels que $\alpha_i = 0$, soit $j \in \partial\Omega$ et donc $j \in \Omega_l \subset \Omega$. Alors η est de signe constant et non nulle sur les voisins de j non contenus dans Ω. D'où contradiction avec l'équation des vecteurs propres.

4.3 – Signatures spectrales

On dira qu'une suite de valeurs propres $\Sigma = (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k)$ est un *spectre* $\Gamma-$*stable* si il existe $A_o \in O_\Gamma$ tel que le spectre de A_o soit $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k < \lambda_{k+1} \leq \lambda_N$ et que l'injection canonique de O_Γ dans $\mathrm{Sym}(\mathcal{H})$ soit transversale pour la suite Σ.

On appelle *signature spectrale de* Γ et on note $SS(\Gamma)$ l'ensemble des spectres Σ qui sont $\Gamma-$stables.

Comme la signature contient beaucoup d'informations, il peut être utile d'en extraire des invariants plus faibles. Par exemple, l'invariant $\mu(\Gamma)$ défini dans [22] est de ce type: $\mu(\Gamma)$ est la plus grande multiplicité de λ_2 pour un spectre $\Gamma-$stable.

Exemples de signatures spectrales (on n'a donné que les éléments maximaux des signatures de ces graphes).

Ex1: Γ est formé de N points et aucune arête, alors $SS(\Gamma) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_N\}$.

Ex2: Γ est le graphe cyclique à N sommets, alors: $SS(\Gamma) = \{\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < ... < \lambda_N\}$.

Ex3: Γ est le graphe complet à N sommets, alors: $SS(\Gamma) = \{\lambda_1 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_N\}$.

Ex4: Γ est l'étoile à 3 branches, alors: $SS(\Gamma) = \{\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4\}$. On remarque que ce graphe a même signature spectrale que le cycle à 4 sommets.

On peut conjecturer que $SS(\Gamma)$ est toujours donné par des restrictions sur la suite des multiplicités.

4.4 – Mineurs et graphes critiques

Une des propriétés principales de $SS(\Gamma)$ est la monotonie par l'opération de mineurs:

On dira que Γ_1 est une *contraction* de Γ le long de l'arête (i,j) si Γ_1 s'obtient de Γ en supprimant l'arête (i,j) et en remplaçant (i,j) par un seul sommet. Si cette opération crée des arêtes multiples on les identifie à une seule arête.

On dira que Γ_2 s'obtient de Γ par *réduction* de l'arête (i,j) si Γ_2 s'obtient en enlevant l'arête (i,j) de Γ.

On dira que Γ' est un *mineur* de Γ si Γ' s'obtient de Γ par une suite de contractions et de réductions.

Le résultat principal est le:

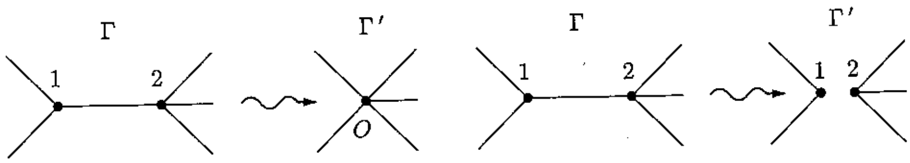
THÉORÈME 10. *Si Γ' est un mineur de Γ, et $\Sigma \in SS(\Gamma')$, alors Σ est aussi dans la signature spectrale de Γ.*

En particulier, un invariant comme $\mu(\Gamma)$ est croissant pour la relation de mineur.

PREUVE La preuve s'appuie sur la compactification décrite dans 2.5., le cône simplicial étant O_Γ^+.

Soit Γ' un mineur de Γ que l'on va supposer, par exemple, obtenu par une contraction le long de l'arête $(1,2)$. On notera 0 le sommet de Γ' obtenu en identifiant 1 et 2. Soit 3 un voisin commun de 1 et 2, soit S_1 (resp. S_2) l'ensemble des voisins dans Γ de 1 (resp. 2) distincts de 3 que l'on supposera disjoints.

Γ' mineur de Γ



Soit

$$q(x) = \sum_{i \in S_1 \cup S_2} c_i(x_0 - x_i)^2 + c_3(x_0 - x_3)^2 + W_0 x_0^2 + Q(x_i) \ ,$$

où Q ne dépend que de x_i $(i \geq 3)$ un élément de $O_{\Gamma'}^+$.

A une telle forme $q \in O^+_{\Gamma'}$, on associe, pour $\varepsilon > 0$, une forme $j_\varepsilon(q) \in O^+_\Gamma$ définie par

$$j_\varepsilon(q)(x) = \sum_{i=1,2}\sum_{j\in S_i} c_j(x_i - x_j)^2 + \frac{c_3}{2}((x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2) +$$
$$+ W_0 x_1^2 + Q(x_i) + \frac{1}{\varepsilon}(x_1 - x_2)^2 .$$

Soit maintenant $\tilde{q} \in \partial O^+_\Gamma$ associée à q de la façon suivante: $\tilde{q} = (F, r)$, où F est le sous-espace $x_1 = x_2$ de $\mathbf{R}^S$ et r s'obtient à partir de q en remplaçant x_0 par $x_1 = x_2$. Alors il est clair que $j_\varepsilon(q)$ converge vers $\tilde{q}$ dans $\bar{O}^+_\Gamma$ au sens de 2.5. lorsque ε tend vers 0.

Soit $J : \mathbf{R}^{S'} \to F$ l'injection naturelle. La structure euclidienne $g' = J^\star(g_o)$ où g_o est la structure canonique sur $\mathbf{R}^S$ est $g' = 2dx_0^2 + \sum_{i\geq 3} dx_i^2$.

Soit maintenant $q_o \in O^+_{\Gamma'}$ et $\Sigma = \{(\lambda_1, m_1), \ldots, (\lambda_k, m_k)\}$ une partie stable du spectre de q_o et donc un élément de la signature spectrale de Γ' (le spectre est calculé pour la métrique g').

Soit $E_i^o \subset F$ les espaces propres pour $\tilde{q}_o$ associés aux λ_i. Soit Ω un voisinage assez petit de q_o dans $O_{\Gamma'}$ et $E_i(q)$ ($q \in \Omega$) les sommes d'espaces propres perturbations des E_i^o pour $\tilde{q}$. Soit $U_i(q) : E_i^0 \to E_i(q)$ les isométries canoniques et $\Phi : \Omega \to \oplus Q(E_i^o)$ définie par:

$$\Phi(q) = \oplus \tilde{q} \circ U_i(q) \in \mathcal{Q} = \oplus Q(E_i^o) .$$

L'hypothèse de stabilité dit que Φ est une submersion de Ω sur $\mathcal{Q}$ en q_o.

Soit maintenant pour $j_\varepsilon(q)$, dont les "espaces propres " $E_i(q, \varepsilon)$ converge vers $E_i(q)$, U_i^ε les isométries canoniques de E_i^0 dans $E_i(q, \varepsilon)$. D'après 2.5., si $\Phi_\varepsilon(q) = \oplus_i j_\varepsilon(q) \circ U_i^\varepsilon$, on a la convergence uniforme sur Ω de Φ_ε vers Φ et donc l'existence pour ε assez petit de q_ε tel que le spectre de q_ε contienne Σ.

Il reste alors à prouver la stabilité. On sait que les formes:

$$x_o^2,\ x_o x_i\ (i = 3,\ i \in S_1 \cup S_2),\ x_i^2\ (i \geq 3),\ x_i x_j\ (i, j \geq 3,\ (i,j) \in A) ,$$

engendrent $\mathcal{Q}$. On en déduit qu'il en est de même pour:

$$x_1^2,\ x_1 x_3,\ x_1 x_i\ (i \in S_1),\ x_2 x_i\ (i \in S_2),\ x_i^2\ (i \geq 3),\ x_i x_j\ (i, j \geq 3,\ (i,j) \in A) .$$

On en déduit le résultat en utilisant le fait que la surjectivité d'une application linéaire en dimension finie est un propriété ouverte. □

Un graphe sera dit *critique* pour un spectre Σ si $\Sigma \in SS(\Gamma)$ et tout mineur strict de Γ n'a pas cette propriété. Exemples de graphes critiques: graphes cycliques, graphes complets, graphes sans arêtes, graphes μ-critiques.

5 – Approximation des laplaciens discrets par des laplaciens continus

5.1 – Résultat principal

Le résultat principal est le suivant:

THÉORÈME 11. *Si Γ se plonge dans X (comme complexe simplicial de dimension 1), alors pour tout spectre Σ de $SS(\Gamma)$ il existe un opérateur de Schrödinger H sur X tel que Σ est le début du spectre de H.*

5.2 – Stratégie de la preuve

Soit $\Sigma = (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k)$ une suite de la signature spectrale de Γ. Soit $A_o \in O_\Gamma^+$ ayant Σ comme début du spectre et de façon stable: si $E_1, \dots, E_l$ sont les espaces propres de A_o pour les valeurs propres de Σ, on choisit un voisinage compact K de A_o dans O_Γ^+ tel que l'application $\Phi : K \to \oplus_{i=1}^{i=l} \mathcal{Q}(E_i)$, introduite en 2.1, 2.2, soit une submersion de K sur un voisinage de $\sum \lambda_i.\mathrm{Id}_{E_i}$ dans $\oplus \mathcal{Q}(E_i)$.

Maintenant, on veut construire un opérateur dans une classe $\mathcal{S}$ (typiquement $\mathcal{S}$ = les opérateurs de Schrödinger sur la variété X où Γ est plongé) ayant Σ comme début de son spectre et stablement (de façon à pouvoir faire la preuve en plusieurs étapes).

Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert, on suppose qu'on a donné pour $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $A \in K$ un espace test $\mathcal{E}_A^\varepsilon$ de dimension $N = \#S$ de $\mathcal{H}$, une isométrie j_ε (dépendant de A) de $\mathbf{R}^S$ sur $\mathcal{E}_A^\varepsilon$ et, pour tout $\varepsilon > 0$ et $A \in K$, un opérateur de $\mathcal{S}$ associé à une forme quadratique positive q_A^ε dont la somme des espaces propres associés au N premières valeurs propres soit $\mathcal{F}_A^\varepsilon$.

On suppose alors que, uniformément dans K, $\alpha(\mathcal{E}_A^\varepsilon, \mathcal{F}_A^\varepsilon)$ tend vers 0 et que, si U_A^ε est l'isométrie canonique de $\mathcal{E}_A^\varepsilon$ sur $\mathcal{F}_A^\varepsilon$, on a la convergence uniforme en $A \in K$ de

$$\tilde{q_A^\varepsilon} = q_A^\varepsilon \circ U_A^\varepsilon \circ j_\varepsilon$$

vers q_A la forme quadratique sur $\mathbf{R}^S$ associée à A.

Alors on construit à partir de $\tilde{q}_A^\varepsilon$ une application "naturelle" Φ_ε : $K \to \oplus\mathcal{Q}(E_i)$ qui décrit les k premières valeurs propres de q_A^ε et qui converge uniformément vers Φ lorsque $\varepsilon \to 0^+$.

On en déduit l'existence d'une suite d'opérateurs $H_\varepsilon \in \mathcal{S}$ ayant Σ comme début du spectre.

On doit maintenant vérifier *directement la stabilité* de Σ relativement à $\mathcal{S}$ ce qui se fait directement, car on a une bonne approximation des E_i^ε par les $j_\varepsilon(E_i)$.

5.3 – Sur la preuve

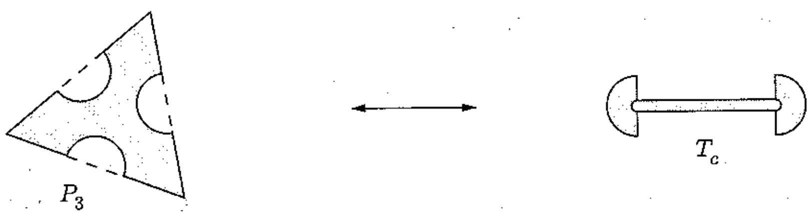
La démonstration étant donnée dans [21], nous nous contenterons d'en décrire les idées principales et ce uniquement dans le cas des surfaces. Γ est donc un graphe plongé dans une surface X (ie comme complexe simplicial de dimension 1, il est plongé de façon C^1 par morceaux dans X).

La preuve consiste en plusieurs étapes:

1. *Le spectre des voisinages D_ε.*

Etant donné une forme quadratique $q_{V,c} \in O_\Gamma^+$, on construit une famille de voisinages D_ε de Γ munis de métriques riemanniennes g et un potentiel W à support compact dans D_ε tels que les N premières valeurs propres de $\Delta_g + \varepsilon W$ soient approximées par $\varepsilon.\lambda_i$ où les λ_i sont les valeurs propres de $q_{V,c}$; cela se vérifiant au moyen du théorème 3 de 2.4.

Le domaine D_ε est constitué de morceaux P_v et de tubes T_c qui seront recollés suivant la combinatoire de Γ: un morceaux P_v (avec $v = deg(i)$) pour chaque sommet et un morceaux T_c avec $c = c_{i,j}$ pour chaque arête.



Les domaines P_v et T_c.

P_v est un polygone euclidien d'aire 1 à v côtés privé de v demi-disques disjoints de longueur l_o (fixé dans la suite assez petit).

T_c est la moitié d'une bobine de révolution, union de 2 disques euclidiens de périmètre $2l_o$ privés d'un petit disque de même centre et raccordés par un cylindre de révolution. Le rayon du cylindre de révolution est choisi pour que la capacité de ce condensateur soit exactement εc.

D_ε est maintenant la réunion des P_i, $i \in S$ et des $T_{c_{i,j}}$, $(i,j) \in A$ recollés suivant la combinatoire de Γ. Le potentiel W est la somme de potentiels W_i à support dans les P_i et d'intégrale égale à V_i.

On applique alors le théorème des petites valeurs propres (th. 3) à l'opérateur $\Delta_g + \varepsilon W$ dans D_ε avec les conditions de Neumann. L'espace propre approché E_N est formé des fonctions constantes ($= x_i$) sur P_i, harmoniques sur les tubes $T_{c_{i,j}}$ et continues sur D_ε. On constate que la norme L^2 est proche de la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^S$ identifié de la façon évidente à E_N alors que la forme quadratique associée à $\Delta + \varepsilon W$ est exactement $\varepsilon q_{V,c}$. L'application du théorème 3 nécessite de montrer

i) que λ_{N+1} ne tend pas vers 0.

ii) que l'on a l'estimation sur les fonctions tests demandée.

On peut maintenant faire cette construction uniformément sur un voisinage compact de q_o dans O_Γ^+ et on conclut, si q_o admet Σ comme partie stable de son spectre, à l'existence d'un D_ε ayant aussi Σ comme début du spectre. La stabilité se vérifie directement, en utilisant par exemple uniquement des perturbations par des potentiels à support compact dans D_ε combinaison linéaire des potentiels W_i et de potentiel $W_{i,j}$ à support dans $T_{c_{i,j}}$.

2. *Approximation du problème de Neumann par un problème sans bords* Soit maintenant $D \subset X$, g une métrique sur X et H un opérateur de Schrödinger $\Delta_g + W$ sur X associé à une forme quadratique q. On considère la mesure μ_ε sur X qui vaut v_g sur D et $\varepsilon^2 v_g$ sur $X \setminus D$. On a ainsi un nouvel espace L^2 et une intégrale de Dirichlet:

$$q_\varepsilon(f) = \int_X (\|df\|^2 + Wf^2)\mu_\varepsilon \, .$$

Faisant l'isométrie $U_\varepsilon(f) = f$ sur D et f/ε sur le complémentaire, on obtient un couple d'opérateurs de Schrödinger sur D et $X \setminus D$ avec la condition de recollement:

$$f^-_{|\partial D} = \varepsilon f^+_{|\partial D}$$

où f^+ et f^- désigne les restrictions de f à D et $X \setminus D$.

Lorsque ε tend vers 0, le spectre converge vers la réunion des spectres de Neumann de D et de Dirichlet de $X \setminus D$.

On montre la stabilité comme plus haut.

3. *Lissage.*

Il reste maintenant à lisser la métrique g et la mesure μ_ε, ce qui nécessite encore les mêmes techniques.

6 – La méthode des éléments finis revisitée

On considère maintenant un opérateur de Schrödinger sur une surface X ayant un spectre Σ stable. Peut-on trouver un graphe plongé dans X ayant ce spectre dans sa signature spectrale ?

La réponse est oui et nécessite quelques outils. l'idée est la suivante, on considère une suite de triangulations $\mathcal{T}_N$ de X dont le module (plus grand diamètre des triangles) tend vers 0.

On applique alors la méthode des éléments finis, i.e. on munit l'espace E_N des fonctions qui sont continues affines par morceaux sur le 1-squelette de $\mathcal{T}_N$ et prolongées harmoniquement à l'intérieur des triangles de la norme L^2 induite par celle de X ainsi que de la forme quadratique q_N induite par la forme quadratique de l'opérateur de départ. Plusieurs problèmes se posent: la convergence quand N tend vers l'infini; l'appartenance à O_Γ.

Le deuxième problème dépend uniquement à la limite des petits triangles de ce que les triangles ne sont pas trop aplatis: pour toute arête, la somme des 2 angles qui voient cette arête doit être $< \pi$. En particulier, c'est le cas si la triangulation n'a que des angles aigus; qu'une telle triangulation existe et même avec tous les angles $\leq 2\pi/5 + \varepsilon$ est démontré dans [15].

Pour ce qui est du premier problème, il résulte du théorème 4 de 2.5.

7 – Une liste de problèmes

7.1 – La bonne majoration

Le problème fondamental semble être de trouver les majorations optimales des multiplicités pour les surfaces. Plus précisément, quelle est la majoration optimale de $m(\lambda_k, X)$, multiplicité de la k-ème valeur propre d'un opérateur de Schroedinger sur une surface X. En particulier l'ordre de grandeur linéaire par rapport au genre de X trouvé par Cheng et Besson est-il optimal ? Par rapport à k, il résulte de [28] que l'ordre de grandeur pour H fixé est au plus $\sqrt{k}$. En est-il de même uniformément par rapport à H pour X fixée ?

Un problème relié est de trouver la forme générale des contraintes sur la suite des N premières valeurs propres. Les seules contraintes sont-elles des restrictions sur les multiplicités comme en dimension 1?

7.2 – Généralisations ?

Il y a plusieurs généralisations envisageables.

La plus simple est de considérer des opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique. Il n'y a alors aucune restriction sur le suite des N premières valeurs propres même si la variété est S^2 et le fibré en droites trivial (voir la thèse de N. TORKI [44] et [27]).

Une autre possibilité est de considérer le spectre des formes différentielles. Pour éliminer le spectre des fonctions, le premier cas à regarder est sans doute celui du spectre des 2-formes fermées sur une variété de dimension 3, par exemple S^3. Pour le laplacien canonique on obtient une multiplicité 6 pour la première valeur propre, l'espace propre associé étant formé des restrictions à S^3 des 2 formes à coefficients constants dans $\mathbf{R}^4$ (voir par exemple [30]). Une majoration serait bien intéressante. De ce point de vue, il faudrait évidemment considérer des complexes simpliciaux de dimension 2 au lieu des graphes. Il serait en particulier intéressant de voir s'il n'y a pas une connexion avec les problèmes d'entrelacement des trajectoires du champ de vecteurs à divergence nulle associé à la 2-forme fermée (voir à ce sujet [3]).

7.3 – Signature spectrale et graphes critiques

Peut-on donner des propriétés générales des graphes S-critique, par exemple des propriétés de compacité des ensembles d'opérateurs isospectraux dans le cas du spectre critique ?

Il serait aussi intéressant d'avoir une idée sur les problèmes algorithmiques associés, par exemple comment calculer les signature spectrale d'un graphe donné.

7.4 – Problèmes d'asymptotiques

Plusieurs problèmes semblent intéressants, outre ceux déjà mentionnés des majorations de multiplicité.

Mentionnons en 2:

1) Quel est l'asymptotique de $\mu(C_n)$ où C_n est le 1-squelette du cube de dimension n?
2) Formules à la Weyl: dans une famille "naturelle " d'opérateurs auto-adjoints Z, évaluer asymptotiquement, quand $\lambda \to \infty$, le volume des domaines $D_\lambda^m \subset Z \times [-\lambda, \lambda]$ formé des couples (H, λ) tels que λ est une valeur propre de multiplicité m de H.

Le cas des laplaciens euclidiens avec conditions de Dirichlet pour les triangles euclidiens et $m = 2$ est traité numériquement dans [4].

Le cas des opérateurs qui interviennent dans la théorie de Floquet pour les opérateurs de Schrödinger périodique est un des thèmes de [24].

REFERENCES

[1] C. Anné: *Bornes sur la multiplicité*, preprint (Lausanne), (1991), 1-15.

[2] V. Arnold: *Modes and quasi-modes*, Journal of Functional analysis and its applications, **6** (1972), 94-101.

[3] V. Arnold: *The asymptotic Hopf invariant and its applications*, Sel. Math. Sov. **5** (1986), 327-345.

[4] M. Berry, Wilkinson: *Spectra of triangles*, Proc royal soc London, **A392** (1984), 15-43.

[5] G. Besson: *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Fourier **30** (1980), 109-128.

[6] G. Besson: *Sur la multiplicité des valeurs propres du laplacien*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie (Grenoble), **5** (86-87),107-132.

[7] G. Besson: *Propriétés génériques des fonctions propres et multiplicités*, Comment. Math. helv., **64** (1989), 542-588.

[8] R. Bott: *Nondegenerate critical manifolds*, Ann. of Math., **60** (1954), 248-261.

[9] M. Berry: *Quantal phases accompanying adiabatic changes*, Proc. Royal soc. London, **A 392** (1984), 45-57.

[10] M. Berry: *The quantum phase five year latter*, in geometric phase in physics (edited by Shapere and Wilczek), (1988), n-n+20.

[11] B. Colbois, Y. Colin de Verdière: *Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante*, Comm. Math. Helv., **63** (1988), 194-208.

[12] S.Y. Cheng: *Eigenfonctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv., **51** (1976), 43-55.

[13] R. Courant - G. Hilbert: *Methods of math. Phys*, Interscience (New-York) (1953).

[14] Y. Colin de Verdière - T. Kappeler: *On double eigenvalues of Hill's operator*, Journal of Functional analysis, **86** (1989), 127-135.

[15] Y. Colin de Verdière - A. Marin: *Triangulations presque équilaterales des surfaces*, Journal of Diff. Geometry **32** (1990), 199-207.

[16] Y. Colin de Verdière - N. Nadirashvili - B. Sévennec: *Le théorème de Courant revisité et les multiplicités*, en préparation (1993).

[17] B. Colbois: *Petites valeurs propres du laplacien sur une surface de Riemann compacte et graphes*, CRAS, **301** (1985), 927-930.

[18] Y. Colin de Verdière: *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien*, Comment. Math. Helv., **61** (1986), 254-270.

[19] Y. Colin de Verdière: *Spectre de variétés Riemanniennes et spectre de graphes*, Proc. Intern. Cong. Math. (Berkeley), (1986), 522-530.

[20] Y. Colin de Verdière: *Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold*, Comment. Math. Helv., **63** (1988), 184-193.

[21] Y. Colin de Verdière: *Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée*, Ann. scient. E.N.S., **20** (1987), 599-615.

[22] Y. Colin de Verdière: *Un nouvel invariant des graphes finis et application à un critère de planarité*, Journal of Combinatorial theory B **50** (1990), 11-21.

[23] Y. Colin de Verdière: *Hyperbolic geometry in two dimensions and trace formulas*, Ecole de Physique des Houches: Quantum Chaos (aout 1989), (1989).

[24] Y. Colin de Verdière: *Sur les singularités de van Hove génériques*, Colloque en mémoire de Edmond Combet (Lyon, octobre 1989), mémoire de la SMF n.46 **119** (1991), 99-109.

[25] Y. Colin de Verdière: *Multiplicités de valeur propre et transformations étoile-triangle des graphes*, Prépub. Institut Fourier, **219** (1992), 1-7.

[26] Y. Colin de Verdière: *Réseaux électriques planaires*, Prépub. Institut Fourier, **225** (1992), 1-8.

[27] Y. Colin de Verdière - N. Torki: *Opérateurs de Schrödinger avec champs magnétiques*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1992/1993.

[28] H. Donnelly - C. Feffermann: *Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds*, Invent. math., **93** (1988), 163-183.

[29] K.O. Friedrichs: *Perturbation of spectra in Hilbert spaces*, AMS (Providence) 1965.

[30] S. Gallot - D. Meyer: *Opérateurs de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne*, Jour. de Maths pures et appliquées, **54** (1975), 259-284.

[31] B. Helffer - J. Sjöstrand: *Puits multiples en semi-classique I*, Comm. PDE, **9** (1984), 337-408.

[32] B. Helffer - J. Sjöstrand: *Puits multiples en semi-classique II*, Ann. IHP (Physique théorique), **42** (1985), 127-212.

[33] B. Helffer - J. Sjöstrand: *Puits multiples en semi-classique III*, Math. Nachrichten, **127** (1985), 263-313.

[34] B. Helffer - J. Sjöstrand: *Puits multiples en semi-classique IV*, Comm. PDE, **10** (1985), 245-340.

[35] K. Kuratowski: *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, Fund. Math., **15** (1930), 271-283.

[36] T. Kato: *Perturbation theory for linear operators*, Springer (Berlin) (1976).

[37] H.P. Mc-Kean - P. van Moerbecke: *The spectrum of Hill's equation*, Invent. Math., **30** (1975), 217-274.

[38] P. VAN MOERBECKE: *The spectrum of Jacobi matrices*, Invent. math., **37** (1976), 45-81.

[39] N. NADIRASHVILI: *Multiple eigenvalues of Laplace operators*, Math. USSR Sbornik, **61** (1988), 225-238.

[40] M. REED - B. SIMON: *Methods of modern math. Phys. IV*, Academic press (New-York) 1975.

[41] RINGEL: *Map color theorem—Springer Grundlehren*, 1974.

[42] N. ROBERTSON - P. SEYMOUR: *Graphs minors I*, J. Comb. th. Ser. B, **35** (1983), 39-61.

[43] B. SIMON: Phys. rev. lett., **51** (1983), 2167-2170.

[44] N. TORKI: Thèse (Université de Grenoble), 1990.

[45] E. WIGNER - VON NEUMANN: *Uber das Verhalten von Eignewerten bei adiabatischen Prozessen*, Phys. Zeit., **30** (1929), 467-470.

[46] S. ZELDITCH: *On the generic spectrum of a Riemannian cover*, Ann. Inst. Fourier, **40** (1990), 407-442.

Lavoro pervenuto alla redazione il 9 marzo 1993
ed accettato per la pubblicazione il 5 maggio 1993

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Yves Colin de Verdière - Université de Grenoble I - Institut Fourier - Laboratoire de Mathématiques associé au CNRS - BP 74, F-38402-Saint Martin d'Hères Cedex; e-mail: YCOLVER @fourier.grenet.fr