

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

YVES COLIN DE VERDIÈRE

## Sur les singularités de Van Hove génériques

*Mémoires de la S. M. F. 2<sup>e</sup> série*, tome 46 (1991), p. 99-109.

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1991\\_2\\_46\\_\\_99\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__99_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LES SINGULARITÉS DE VAN HOOVE GÉNÉRIQUES

*Exposé de Yves COLIN DE VERDIÈRE*

### Introduction

*Description de la décomposition spectrale de Schrödinger périodique ; la densité d'états et ses singularités ; position du problème et conjectures.*

On s'intéresse à l'opérateur de Schrödinger périodique,  $H = \Delta + V$ , où  $\Delta$  est le laplacien euclidien et  $V$  est un potentiel  $C^\infty$ ,  $\Gamma$ -périodique,  $\Gamma$  réseau de  $\mathbf{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$  dans la suite).

La théorie spectrale de cet opérateur essentiellement auto-adjoint dans  $L^2(\mathbf{R}^d)$  est bien connue par la théorie de Bloch ([R-S, IV]): son spectre est absolument continu de multiplicité localement finie et peut être décrit de la façon suivante :

pour chaque  $k \in \mathbf{R}^d$ , on considère le problème aux limites:

$$\begin{aligned} (\Delta + V)\varphi &= E\varphi, \\ \forall \gamma \in \Gamma, \quad \varphi(x + \gamma) &= e^{i\langle k|\gamma \rangle} \varphi(x) \end{aligned} \quad (*)$$

En fait, si  $k - k' \in \Gamma^*$ , où  $\Gamma^*$  est  $2\pi$ -fois le réseau dual de  $\Gamma$  (un domaine fondamental de  $\Gamma^*$  s'appelle *zone de Brillouin* dans la littérature de physique du solide), on a le même problème (\*). On notera dans la suite  $\mathcal{B}$  le quotient  $\mathbf{R}^d/\Gamma^*$ . Le problème (\*) peut se réécrire comme un problème portant sur la fonction  $\Gamma$ -périodique  $\psi(x) = e^{-i\langle k|x \rangle} \varphi(x)$  :

$$\begin{aligned} (\Delta_k + V)\psi &= E.\psi, \\ \forall \gamma \in \Gamma, \quad \psi(x + \gamma) &= \psi(x) \end{aligned} \quad (**)$$

où

$$\Delta_k = \sum_{j=1}^d \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} + k_j \right)^2.$$

L'opérateur  $H_{k,V}$  sur  $L^2(\mathbf{R}^d/\Gamma)$  défini par (\*\*) est auto-adjoint à résolvante compacte et a donc un spectre discret :

$$E_1(k) \leq E_2(k) \leq E_3(k) \leq \dots$$

où les  $E_n(k)$  sont des fonctions continues de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathbf{R}$ , en fait elles sont même analytiques réelles tant que  $E_n(k)$  n'est pas une valeur propre multiple de (\*\*).

Le spectre de  $H$  sur  $L^2(\mathbf{R}^d)$  est la réunion des intervalles  $I_n$ , images de  $\mathcal{B}$  par  $E_n$ ; les intervalles  $I_n$  s'appellent les *bandes*, les composantes connexes bornées du complémentaire dans  $\mathbf{R}$  de la réunion des  $I_n$  s'appellent les *lacunes*. En dimension  $d = 1$ , les  $I_n$  ne peuvent se rencontrer qu'en leurs extrémités, au contraire, en dimension 2 ou 3, les  $I_n$  se recouvrent au point que le nombre de lacunes est toujours fini ([SK1],[SK2],[D-T]).

Soit  $\mu_n$  l'image directe par  $E_n$  de la mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{B}$  et

$$\mu = (2\pi)^{-d} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n .$$

$\mu$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de  $\mathbf{R}$ , on note  $\rho(\lambda)$  la densité de  $\mu$ . Le support de  $\rho$  est le spectre de  $H$ . En physique,  $\rho$  s'appelle la *densité d'états*.

Soit  $N(R; \lambda)$  le nombre de valeurs propres de  $H$  opérant dans un cube de côté  $R$  (avec conditions de Dirichlet) inférieures à  $\lambda$ , on a :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R; \lambda)}{R^d} = \int_{-\infty}^{\lambda} \rho(t) \cdot dt .$$

DÉFINITION. — *Les singularités de  $\rho$  s'appellent singularités de van Hove ([A-M],[VH]).*

Les singularités de van Hove sont de 2 types :

le type (I) : ce sont des valeurs  $\lambda$  qui sont valeurs critiques d'une fonction  $E_n$ ;

le type (II) : ce sont les valeurs de  $\lambda$  telles qu'il existe  $(n, k) \in \mathbf{N} \times \mathcal{B}$  telles que  $\lambda = E_n(k) = E_{n+1}(k)$  : en un tel  $k$ ,  $E_n$  et  $E_{n+1}$  ne sont pas différentiables en général comme fonctions de  $k$ .

Nous examinons dans la suite ce qui se passe pour le cas générique: un fait remarquable est que les singularités de type (II) peuvent apparaître génériquement en dimension 2 pour des potentiels  $V$  pairs et en dimension  $\geq 3$  sans restrictions.

Plus précisément, les arguments développés dans cet article plaident en faveur de la

CONJECTURE. — *Pour  $V$  générique, les propriétés des fonctions  $E_n$  sont les propriétés génériques du spectre d'une famille d'opérateurs hermitiens (complexes) dépendant de  $d$  paramètres ( $k \in \mathcal{B}$ ): les dégénérescences apparaissent donc stablement dès que  $d \geq 3$  ([V-W],[A]).*

*Lorsque  $V$  est pair, la situation est celle des matrices symétriques réelles, les dégénérescences apparaissent stablement pour  $d \geq 2$*

Pour d'autres résultats de généricité sur le spectre, voir [UK] et [ZE].

On s'intéresse ensuite au nombre asymptotique de singularités quand  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Plan**

1. La dimension 1
2. Les petits potentiels en dimension 2
  - a. Le cas libre
  - b. Les petits potentiels génériques
  - c. Les petits potentiels pairs
3. Les petits potentiels en dimension 3
4. L'asymptotique des dégénérescences
5. Références

**1. La dimension 1**

*Description du spectre ; la situation générique ; la densité des potentiels dont le spectre n'a qu'un nombre fini de lacunes.*

On considère ici un potentiel  $V \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ,  $2\pi$ -périodique. L'équation de Schrödinger,  $H\varphi = -\varphi'' + V\varphi$  s'appelle aussi *équation de Hill*.

Pour chaque  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on introduit l'application  $F(\lambda)$  qui à  $(\varphi(0), \varphi'(0))$  associe  $(\varphi(2\pi), \varphi'(2\pi))$  où  $\varphi$  est solution de  $(H - \lambda)\varphi = 0$ . Soit alors  $\Delta(\lambda) = \text{Tr}(F(\lambda))$ . La fonction  $\Delta(\lambda)$  (*discriminant*) a l'allure suivante:

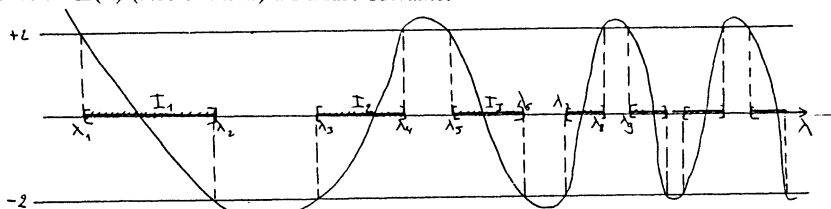


Fig. 1 : graphe de  $\Delta(\lambda)$

$\Delta(\lambda) = 2$  (resp.  $-2$ ) correspond aux valeurs de  $\lambda$  qui sont valeurs propres du problème périodique (resp. anti-périodique).

Soit  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4 \leq \lambda_5 < \dots$  la suite (avec multiplicités) des solutions de  $\Delta(\lambda) = \pm 2$ . Si  $k \in \mathcal{B} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ , le spectre de  $H_{k,V}$  est déterminé par  $\Delta(\lambda) = 2 \cos k$ . On déduit de ce qui a été dit plus haut que  $\text{Spectre}(H) = \{\lambda \mid |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = \cup_{n=1}^\infty I_n$  avec  $I_n = [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$  et l'application  $E_n : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow I_n$  est définie implicitement par  $2 \cos k = \Delta(\lambda)$ .

Cette application est un revêtement double du cercle  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  sur  $I_n$  avec identification des points  $k = 0$  et  $k = 1/2$  aux extrémités de  $I_n$ .

*Le cas générique:* il est facile de voir par la théorie des perturbations qu'il existe un résiduel de l'ensemble des potentiels tel que les intervalles  $I_n$  sont 2 à 2 disjoints. Dans ce cas, l'application  $E_n$  est une fonction de Morse sur  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  ayant 2 points critiques ( $k = 0$  ou  $1/2 \bmod \mathbf{Z}$ ). La densité d'état est alors singulière aux extrémités des  $I_n$  et est donnée par :

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{|\Delta'(\lambda)|}{\sqrt{4 - \Delta(\lambda)^2}} .$$

*Les potentiels n'ayant qu'un nombre fini de lacunes :* ces potentiels, hautement non génériques sont identifiés avec précision, ce sont des fonctions *hyperelliptiques*. On peut montrer que de façon assez surprenante ces potentiels sont denses dans l'ensemble de tous les potentiels périodiques (pour une démonstration élémentaire de ce fait, voir [C-K]).

## 2. Les petits potentiels en dimension 2

*Description du spectre : zones de Brillouin, droites de Bragg. Parité et réalité. L'éclatement générique des points triples. Description des singularités de van Hove génériques.*

### a. Le cas libre.

Dans la suite,  $\Gamma$  est un réseau fixé de  $\mathbf{R}^2$  et les objets définis sont des objets géométriques intrinsèquement attachés à  $\Gamma$ .

Le spectre de  $\Delta_k$  est aisé à calculer, car les  $\Delta_k$  se diagonalisent simultanément sur la base  $e_\gamma$  ( $\gamma \in \Gamma^*$ ) avec  $e_\gamma(x) = e^{i\langle \gamma, x \rangle}$ . On trouve que  $\text{Spectre}(\Delta_k) = \{\|k + \gamma\|^2 \mid \gamma \in \Gamma^*\}$ .

Cette description du spectre ensembliste ne donne pas la numérotation :

$$E_1(k) \leq E_2(k) \leq \dots$$

Cette description de l'ordre est importante, car on veut appliquer la théorie des perturbations (minimax...) et regarder les valeurs propres multiples.

Pour cela, on introduit les zones de Brillouin,  $\mathcal{B}_n$ , qui sont les domaines fondamentaux de  $\Gamma^*$  définis par :

$$\mathcal{B}_n = \{k \in \mathbf{R}^2 \mid \|k\|^2 = E_n(k)\} ,$$

$\mathcal{B}_1$  est évidemment un domaine fondamental de Dirichlet pour  $\Gamma^*$ . Les  $\mathcal{B}_n$  entourent  $\mathcal{B}_1$  par ordre croissant; plus précisément, si on définit les *droites de Bragg*  $D_\gamma$  par :

$$D_\gamma = \{k \in \mathbf{R}^2 \mid \|k + \gamma\| = \|k\|\} ,$$

les frontières des  $\mathcal{B}_n$  sont formées de segments des  $D_\gamma$  qui séparent localement des zones de Brillouin d'indices consécutifs. La situation, pour un réseau générique est

représentée sur la figure suivante :

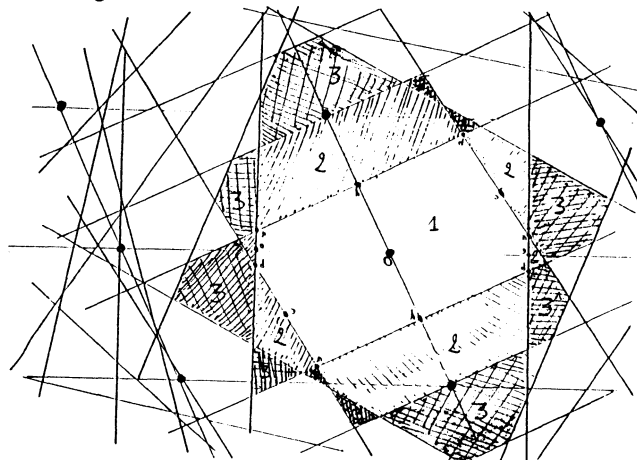


Fig. 2 : zones de Brillouin

Si  $k$  est sur  $D_\gamma$ ,  $\Delta_k$  admet  $\|k\|^2$  comme valeur propre de multiplicité  $m + 1$ , où  $m$  est le nombre de  $D_\gamma$  tels que  $k \in D_\gamma$ . Dans le cas d'un réseau générique, cette multiplicité est au plus 3 ( $d + 1$  en dimension  $d$ ).

Maintenant la valeur propre  $E_n(k)$  est la restriction à  $\mathcal{B}_n$  de la fonction  $k \rightarrow \|k\|^2$ . La complication des  $\mathcal{B}_n$  traduit donc une complication croissante des fonctions  $E_n$ .

Cette description permet de vérifier que la définition de la densité d'état donné au début redonne dans le cas libre le résultat très simple  $\rho_0(\lambda) \equiv \frac{1}{4\pi}$ .

*Questions.* — La géométrie des zones de Brillouin est très intéressante et plusieurs problèmes n'ont que peu été étudiés à ce jour :

soit  $I_n = [a_n, b_n]$  l'image de  $\mathcal{B}$  par  $E_n$ , il est clair que  $a_{n+1} < b_n$ . le fait que la différence  $b_n - a_{n+1}$  tende vers l'infini est responsable (minimax) du fait que le nombre de lacunes est fini ([SK1] et [SK2]). Il serait intéressant d'obtenir une minoration de ces nombres à partir d'informations simples sur  $\Gamma$ .

Un autre problème intéressant est de mesurer effectivement la complexité des  $\mathcal{B}_n$  quand  $n \rightarrow \infty$  : nombre de composantes connexes, ... Voir à ce sujet dans le dernier § le calcul asymptotique du nombre de points communs à plusieurs droites de Bragg.

#### b. Les petits potentiels génériques.

On a en vue de prouver le théorème suivant:

**THÉORÈME.** —  $\Gamma$  étant donné, il existe, pour tout entier  $N$ , un résiduel  $\mathcal{R}$  d'un voisinage de 0 dans  $C^\infty(\mathbf{R}^2/\Gamma, \mathbf{R})$  tel que, si  $V \in \mathcal{R}$ , pour tout entier  $n \leq N$  et pour tout  $k \in \mathcal{B}$ , les valeurs propres  $E_n(k)$  de  $\Delta_k + V$  sont simples et les fonctions  $E_n(\cdot)$  sont de Morse

Il est probable que cet énoncé reste vrai globalement, i.e. pas seulement dans un voisinage de 0 (qui en plus dépend de  $N!!$ ). Cela a été prouvé pour le cas discret dans [G-K-T].

*Preuve.* — Il est visible que la seule chose à examiner est ce qui se passe près des droites de Bragg; en effet, dans le cas libre, pour  $k \in \text{Intérieur}(\mathcal{B}_n)$ , la valeur propre  $E_n$  est simple et de différentielle non nulle, sauf pour  $k = 0$  et  $n = 1$  où la fonction  $E_1$  a un minimum non dégénéré.

Soit maintenant  $[A, B]$  un côté de  $\mathcal{B}_n$ .

a) Si  $k$  est intérieur à  $[A, B]$ , la perturbation se fait conformément à la figure suivante où  $k$  est repéré par une coordonnée  $\xi$  le long du bord et une coordonnée  $\eta$  transversalement. Il est clair que la fonction  $E_n$  admet un point critique de Morse proche de la projection orthogonale de 0 sur  $[A, B]$ .

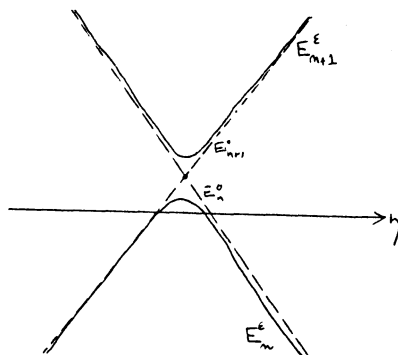


Fig. 3 : éclatement des valeurs propres  $E_n$  et  $E_{n+1}$  le long d'une droite de Bragg.

b) On va maintenant supposer que  $k_0$  est commun à  $\mathcal{B}_n$ ,  $\mathcal{B}_{n+1}$  et  $\mathcal{B}_{n+2}$  et pour simplifier l'écriture que  $k_0$  n'est que sur 2 droites de Bragg  $D_\gamma$  et  $D_{\gamma'}$ .

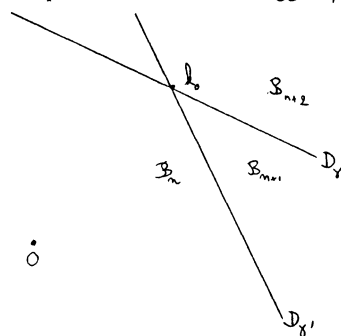


Fig. 4 : point triple

Soit  $E$  l'espace engendré par  $1, e_\gamma$  et  $e_{\gamma'}$ . Si  $V = \sum a_\gamma \cdot e_\gamma$  (série de Fourier),

on obtient comme matrice de  $\langle (H + \varepsilon V) \cdot | \cdot \rangle | E$  l'écriture suivante :

$$\begin{pmatrix} \|k\|^2 & \varepsilon a_\gamma & \varepsilon a_{\gamma'} \\ \varepsilon \bar{a}_\gamma & \|k + \gamma\|^2 & \varepsilon a_{\gamma - \gamma'} \\ \varepsilon \bar{a}_{\gamma'} & \varepsilon \bar{a}_{\gamma - \gamma'} & \|k + \gamma'\|^2 \end{pmatrix}$$

Il résulte de la théorie des perturbations que les 3 valeurs propres

$$\lambda_0(k, \varepsilon) \leq \lambda_1(k, \varepsilon) \leq \lambda_2(k, \varepsilon)$$

de cette matrice vérifient :

$$E_{n+i}(k, \varepsilon) = \lambda_i(k, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad (i = 0, 1, 2)$$

pour  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  et  $\|k - k_0\| \leq \alpha$ .

Une étude simple montre alors que :

i) si le produit  $a_\gamma a_{\gamma'} a_{\gamma - \gamma'}$  n'est pas réel, on a  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$  avec un écart minimal de l'ordre de  $\varepsilon$ . On en déduit :

$$E_n < E_{n+1} < E_{n+2} .$$

ii) il existe une condition ouverte dense portant sur les 3 coefficients de Fourier  $a_\gamma, a_{\gamma'}, a_{\gamma - \gamma'}$  telle que  $\lambda_0, \lambda_1$  et  $\lambda_2$  soient des fonctions de Morse de  $k$ .

$\lambda_0$  n'a qu'un maximum,  $\lambda_2$  n'a qu'un minimum, alors que le nombre de points critiques de  $\lambda_1$  peut varier entre 2 et 6.

On déduit facilement le théorème de ce qui précède.

### c. Les potentiels pairs.

Lorsque le potentiel  $V$  est pair, on revient de la situation hermitienne complexe à la situation *symétrique réelle*, en effet les opérateurs  $\Delta_k + V$  sont de type réel au sens de la :

DÉFINITION. — *Une structure réelle sur un C-espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est la donnée d'une involution anti-linéaire  $J$  de  $\mathcal{H}$ . Si  $\mathcal{H}_R = \text{Fix}(J)$ , on a :*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_R \oplus i\mathcal{H}_R$$

et :

$$J(x \oplus iy) = x \oplus (-iy) .$$

Un opérateur auto-adjoint  $A$  sur  $\mathcal{H}$  est dit de type réel (sous-entendu relativement à  $J$ ) s'il commute à  $J$ .

Si  $A$  est de type réel, la matrice de  $A$  dans une base orthonormée réelle quelconque est à coefficients réels.

Par exemple sur  $L^2(X, \mathbb{C})$ , où  $X$  est une variété riemannienne compacte, le laplacien est réel pour la structure réelle canonique  $J_0(f) = \bar{f}$ .

Ici, on a  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2/\Gamma; \mathbb{C})$  et on introduit  $J$  défini par  $J(f)(x) = \bar{f}(-x)$ .

On a alors la proposition évidente :

PROPOSITION. — *Si  $V$  est pair,  $\Delta_k + V$  est de type réel relativement à  $J$ .*



Nous avons en vue de montrer le :

THÉORÈME. — Soit  $k_0$  l'intersection de 2 droites de Bragg  $D_\gamma$  et  $D_{\gamma'}$  tel que  $k_0$  ne soit sur aucune autre droite de Bragg. Soit  $\alpha$  tel que le disque de centre  $k_0$  et de rayon  $\alpha$  ne rencontre que ces 2 droites de Bragg. Soit  $V$  un potentiel  $\Gamma$ -périodique pair, tel que le produit (réel) des coefficients de Fourier de  $V$ ,  $a_\gamma, a_{\gamma'}, a_{\gamma-\gamma'}$  soit non nul.

Alors, il existe  $\varepsilon_0$ , tel que pour  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , il existe un  $k(\varepsilon)$  unique dans le disque de centre  $k_0$  et de rayon  $\alpha$  tel que  $\Delta_{k(\varepsilon)}$  admette une valeur propre double proche de  $\|k_0\|^2$ . De plus,  $k(\varepsilon)$  et cette valeur propre dépendent analytiquement de  $\varepsilon$ .

Autrement dit la valeur propre triple  $\|k_0\|^2$  de  $\Delta_{k_0}$  éclate en une valeur propre simple et une valeur propre double. On a 2 situations possibles

$$\lambda = \mu < \nu \quad \text{et} \quad \lambda < \mu = \nu,$$

le choix dépendant uniquement du signe du produit des 3 coefficients de Fourier de  $V$  introduit plus haut (1<sup>er</sup> cas si le produit est  $> 0$ ).

*Preuve.* — Donnons une preuve directe de l'existence de  $k(\varepsilon)$ . Soit  $C$  le cercle de centre  $k_0$  et de rayon  $\alpha$ . Lorsque  $V = 0$ , les 3 valeurs propres  $\lambda_1 = \|k\|^2$ ,  $\lambda_2 = \|k - \gamma\|^2$  et  $\lambda_3 = \|k - \gamma'\|^2$  se croisent 6 fois (chaque fois que  $C$  coupe une droite  $D_\gamma$ ,  $D_{\gamma'}$  ou  $(Ok_0)$ ) suivant la figure suivante où on a représenté  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  en fonction d'un paramètre angulaire sur  $C$ .

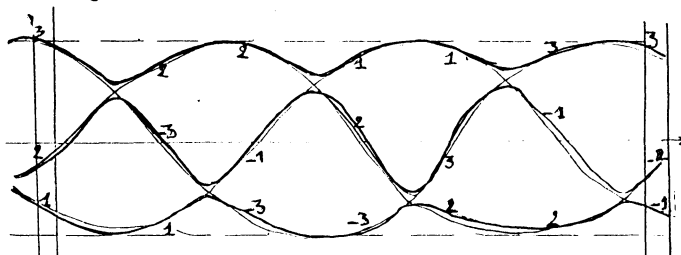


Fig. 5 : valeurs propres pour  $k \in C$ .

Pour  $\Delta_k + \varepsilon V$ ,  $V$  vérifiant les hypothèses du théorème, ces croisements disparaissent et l'on peut suivre la base propre  $(1, e_\gamma, e_{\gamma'})$  par continuité :

chaque croisement induit une rotation de  $\pm\pi/2$  autour d'un des axes de coordonnées. Le produit de ces rotations est de la forme :

$$R = ABCA^{-1}B^{-1}C^{-1}$$

où  $A, B, C$  sont des rotations de  $\pm\pi/2$  autour des 3 axes.  $R$  est une rotation de  $\pi$  autour d'un des axes.

Il y a donc une holonomie non triviale incompatible avec l'existence d'une trivialisat on   l'intérieur de  $C$  qui existerait si les valeurs propres restaient non dégénérées.

Lorsque  $k$  parcourt  $C$  une fois, deux des fonctions propres changent de signe : cette propriété générale est utilisée dans [B-W] afin de mettre en évidence numériquement des valeurs propres multiples.

### 3. Les petits potentiels en dimension 3

*L'éclatement générique des points quadruples.*

Utilisant les mêmes méthodes que précédemment, on peut montrer que des valeurs propres doubles peuvent exister pour des potentiels petits.

Plus précisément près de chaque  $k_0$  commun à 3 plans de Bragg (et 3 seulement), il y a apparition (avec une condition générique sur les coefficients de Fourier de  $V$ ) de 0 ou 2 points  $k_i(\varepsilon)$  où  $\Delta_{k_i(\varepsilon)} + \varepsilon V$  admet une valeur propre double. La distinction entre les 2 cas est donnée par un polynôme homogène de degré 8 en les coefficients de Fourier de  $V$ .

### 4. L'asymptotique des dégénérescences

*L'asymptotique conjecturée; relation avec les travaux de Berry et Wilkinson.*

Dans ce §, on revient au cas de la dimension 2 et des potentiels pairs.

Pour un potentiel petit générique, les dégénérescences sont liées aux points d'intersection  $A_{\gamma, \gamma'}$  de 2 droites de Bragg  $D_\gamma$  et  $D_{\gamma'}$ . Pour les grandes valeurs de l'énergie l'asymptotique du spectre est semblable à celle des petits potentiels (c'est clair en dimension 1 et aussi vrai en dimension plus grande pour presque tout le spectre ([F-K-T])).

On est donc amené à penser que pour un potentiel générique pair en dimension 2, l'asymptotique des singularités de van Hove est la même que l'asymptotique des points  $A_{\gamma, \gamma'}$ .

Cette asymptotique n'est pas difficile à évaluer, on a :

PROPOSITION. — Si  $N_\Gamma(R) = \#\{A_{\gamma, \gamma'} \mid \|0A_{\gamma, \gamma'}\| \leq R\}$ , on a, lorsque  $R \rightarrow \infty$ , l'asymptotique :

$$N_\Gamma(R) \sim \left( \frac{2\pi}{\text{aire}(\mathbb{R}^2/\Gamma)} \right)^2 \cdot R^4.$$

*Preuve.* — La preuve n'est pas difficile, elle utilise le lemme géométrique suivant :

LEMME. — Si  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^N$  dont la frontière est de mesure nulle, le nombre de points  $N(R)$  d'un réseau  $\mathcal{R}/R$  contenus dans  $K$  admet quand  $R \rightarrow \infty$

l'asymptotique suivante:

$$N(R) \sim \frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(\mathbf{R}^N/\mathcal{R})} \cdot R^N.$$

On applique ce lemme à l'image de l'application

$$F : \mathcal{B} \times [0, 1] \times ((S^1)^3 \setminus \text{diagonale}) \rightarrow (\mathbf{R}^2)^3$$

définie par

$$F(z, t, \theta_j) = (z + te^{i\theta_j})$$

et au réseau  $\Gamma^3/R$ .

Ce résultat est peut-être à rapprocher de la conjecture de [B-W].

## 5. Références

- [A-M] N. ASHCROFT ET N. MERMIN. — *Solid states physics*, Holt, Rinehart et Winston, 1976.
- [AR] V. ARNOLD. — *Modes and quasi-modes*, Functional analysis and its applications, **6** (1972), 94–101.
- [BY] M. BERRY. — *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proc. R. Soc. Lond., **A 392** (1984), 45–57.
- [B-W] M. BERRY ET M. WILKINSON. — *Diabolical points in the spectra of triangles*, Proc. R. Soc. Lond., **A 392** (1984), 15–43.
- [C-K] Y. COLIN DE VERDIÈRE ET T. KAPPELER. — *On double eigenvalues of Hill's operator*, J. of Funct. Analysis, **86** (1989), 127–135.
- [D-T] B. DAHLBERG ET E. TRUBOWITZ. — *A remark on two dimensional periodic potential*, Comment. Math. Helvetici, **57** (1982), 130–134.
- [F-K-T] J. FELDMAN, H. KNOERRER ET E. TRUBOWITZ. — *The perturbatively stable spectrum of a periodic Schrödinger operator*, ETH, (1989), .
- [G-K-T] D. GIESEKER, H. KNOERRER ET E. TRUBOWITZ. — *An overview of the geometry of algebraic Fermi curves*, Preprint ETH, (1989).
- [R-S, IV] M. REED ET B. SIMON. — *Methods of modern mathematical physics, t. 4 : analysis of operators*, Academic press, 1978.
- [SK1] M. SKRIGANOV. — *The spectrum band structure of the three-dimensional Schrödinger operator with periodic potential*, Invent. Math., **80** (1985), 107–121.
- [SK2] M. SKRIGANOV. — *Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators*, Proc. Steklov Inst. Math., **171** (1987), 1–121.
- [UK] K. UHLENBECK. — *Generic properties of eigenfunctions*, American J. of Math., **98** (1976), 1059–1078.

- [VH] L. VAN HOVE. — *The occurrence of singularities in the elastic frequency distribution of a crystal*, Phys. Rev., **89** (1953), 1189–1193.
- [V-W] J. VON NEUMANN ET E. WIGNER. — *Ueber das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen*, Physik. Zeitschr., **30** (1929), 467–470.
- [ZE] S. ZELDITCH. — *On the spectrum of a Riemannian cover*, Ann. Inst. Fourier (soumis), (1989).

—  $\diamond$  —

Yves COLIN DE VERDIÈRE  
Institut Fourier  
UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I  
B.P.74  
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex  
(France)

*Codes AMS* : 35J10, 35P15, 58G25, 81H20.

*Mots clés* : équation de Schrödinger, réseaux, valeurs propres multiples, zones de Brillouin.

*Résumé* : On étudie les singularités (dites de Van Hove) de la densité d'états pour l'équation de Schrödinger  $d$ -dimensionnelle avec un potentiel périodique lisse. L'étude du cas des petits potentiels en dimension 2 et 3 rend plausible une conjecture sur la situation générique. On discute aussi la prolifération des singularités de Van Hove quand  $\lambda \rightarrow \infty$ .