

## TRIANGULATIONS PRESQUE ÉQUILATÉRALES DES SURFACES

Y. COLIN DE VERDIÈRE & A. MARIN

On s'intéresse à montrer l'existence sur une surface riemannienne compacte sans bord arbitraire de triangulations géodésiques aussi fines que l'on veut et telles que les angles de leurs triangles soient aussi proches que possible de  $\pi/3$ . Le cas à bord lisse peut être traité de façon analogue. Les résultats obtenus sont optimaux.

La motivation initiale pour ce problème vient de la méthode des éléments finis: si  $\mathcal{T}$  est une triangulation d'une surface riemannienne compacte que l'on peut supposer localement euclidienne, notons  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  l'ensemble des sommets de  $\mathcal{T}$  et  $A$  l'ensemble des arêtes de  $\mathcal{T}$ . On associe à  $\mathcal{T}$  l'espace vectoriel  $E_{\mathcal{T}}$  de dimension  $N$  des fonctions numériques continues affines sur chaque triangle et on représente chaque fonction  $f$  de  $E_{\mathcal{T}}$  par le vecteur  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  des valeurs  $x_i = f(i)$ .

Pour  $f \in E_{\mathcal{T}}$ ,  $q(f) = \int |df|^2$ , l'intégrale de Dirichlet de  $f$  est de la forme:

$$q(f) = \sum_{\{i,j\} \in A} a_{i,j} x_i x_j + \sum_{i \in S} b_i x_i^2.$$

On souhaite que  $\mathcal{T}$  soit telle que tous les  $a_{i,j}$  soient  $< 0$ : cela est vérifié en particulier lorsque tous les triangles de  $\mathcal{T}$  sont à angles aigus: d'où le problème de se rapprocher au maximum de triangles équilatéraux. (Voir [3] pour ce genre d'opérateurs sur les graphes.)

Commençons par une

**Définition.** Si  $0 < \alpha \leq \beta$  sont deux nombres positifs et  $(\mathcal{T}_n)$  une suite de triangulations d'une surface riemannienne compacte sans bord  $(X, g)$ , on dira que  $(\mathcal{T}_n)$  est une  $\{\alpha, \beta\}$  triangulation de  $(X, g)$  si:

(i) la borne supérieure des diamètres des triangles de  $\mathcal{T}_n$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ .

(ii) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$  tel que,  $\forall n \geq N$ , les angles de tous les triangles des  $\mathcal{T}_n$  sont dans  $[\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon]$ .

On dira que  $(X, g)$  est  $\{\alpha, \beta\}$ -triangulable s'il existe une telle suite.

Nous pouvons maintenant énoncer le:

**Théorème.** (i) Si  $X$  est la sphère  $S^2$ , pour toute métrique  $g$ ,  $(X, g)$  est  $\{3\pi/10, 2\pi/5\}$  triangulable et les deux bornes sont optimales.

(ii) Si  $X$  est un tore, pour toute métrique  $g$ ,  $(X, g)$  est  $\{\pi/3, \pi/3\}$  triangulable et ce résultat est optimal.

(iii) Si  $(X, g)$  est une surface compacte de genre  $\geq 2$  orientable, elle est  $\{2\pi/7, 5\pi/14\}$  triangulable et c'est optimal.

**Problèmes.** Que peut-on dire dans le cas non compact? Donner des énoncés dans le cas d'un bord  $C^1$  par morceaux.

**Remerciements.** Dans une première version de ce travail, nous n'avions pas obtenu le résultat optimal dans le cas des surfaces de genre  $\geq 2$  (sauf dans le cas hyperelliptique): la méthode consistait à prendre l'image réciproque par une fonction méromorphe d'une triangulation de  $P^1(\mathbb{C}) = S^2$ . Le referee nous a suggéré une autre piste: l'utilisation de différentielles sextiques, ce qui donne une preuve simple du résultat optimal. Nous l'en remercions très chaleureusement.

Nous avons aussi mis au point une démonstration plus proche de la première: construire par un argument à la Tischler une application presque conforme de la surface sur un tore et rappeler une triangulation presque équilatérale de ce dernier. Cette démonstration est moins élémentaire: elle utilise les transformations *quasi-conformes* et l'équation de Beltrami. C'est pourquoi nous avons choisi la démonstration à base de différentielles sextiques.

## 1. Optimalité

Si  $\chi(X)$  est la caractéristique d'Euler de  $X$ , on a, pour toute triangulation de sommets  $\{1, 2, \dots, N\}$ , le sommet  $i$  ayant une valence  $v_i$ , la formule d'Euler:

$$6\chi(X) = \sum_{i=1}^N (6 - v_i).$$

(La valence d'un sommet est le nombre d'arêtes issues de celui-ci.)

En particulier, toute triangulation de la sphère admet au moins un sommet de valence  $\leq 5$ , ce qui donne au moins un angle  $\geq 2\pi/5$ ; dans un tel triangle, s'il est assez petit et donc presque euclidien, un des angles au moins est  $\leq 3\pi/10 + \varepsilon$ .

Même remarque lorsque  $\chi(X) < 0$ : il y a au moins un sommet de valence  $\geq 7$ , donc au moins un angle  $\leq 2\pi/7$ ; dans un tel triangle, s'il est assez petit, un des angles au moins est  $\geq 5\pi/14 - \varepsilon$ .

Dans le cas des tores, les triangulations optimales n'ont que les sommets de valence 6.

### 2. Invariance conforme

On va pouvoir simplifier le problème grâce à la:

**Proposition.** *Si  $(X, g)$  est  $\{\alpha, \beta\}$  triangulable, alors pour toute fonction  $C^\infty$ ,  $F: X \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $(X, e^F g)$  est  $\{\alpha, \beta\}$  triangulable.*

*Preuve.* Soit  $\rho > 0$  le minimum des rayons d'injectivité de  $g$  et  $e^F g$ ; alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $0 < \varepsilon_1 < \rho$  tel que, pour tout couple  $x, y$  de points de  $X$ , si  $d_g(x, y) < \varepsilon_1$ , on ait  $d_{e^F g}(x, y) < \rho$  et l'angle des 2 géodésiques minimisantes de  $x$  à  $y$  est  $\leq \varepsilon/2$ . La conclusion suit facilement en utilisant la conformalité des 2 métriques, car les angles ont la même mesure.

### 3. Cas des tores

D'après ce qui précède, il suffit de traiter le cas des tores plats  $\mathbf{R}^2/\Gamma$ , où  $\mathbf{R}^2$  est muni de la métrique euclidienne  $dx^2 + dy^2$  et  $\Gamma = \mathbf{Z}(1, 0) \oplus \mathbf{Z}(a, b)$  ( $b > 0, a \geq 0$ ). Soit  $\Gamma_1$  le réseau équilatéral ( $a = 1/2, b = \sqrt{3}/2$ ) et  $\Gamma_N = \frac{1}{N}\Gamma_1$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$  et un point  $\omega$  de  $\Gamma_N$  situé à une distance  $\leq \varepsilon$  de  $(a, b)$ : la transformation linéaire  $T_\varepsilon$  telle que  $T_\varepsilon(1, 0) = (1, 0)$  et  $T_\varepsilon(a, b) = \omega$  modifie peu les angles et transforme  $\Gamma$  en un sous-réseau de  $\Gamma_N$  qui admet des triangulations évidentes par des triangles équilatéraux: celles dont les sommets sont les points de  $\Gamma_{NM}$  projetés sur  $\mathbf{R}^2/T_\varepsilon(\Gamma)$ .

### 4. Différentielles sextiques et métriques équilatérales

Soit  $(X, g)$  une surface riemannienne compacte orientable et sans bord, de genre  $h \geq 2$ . La métrique riemannienne  $g$  définit une structure complexe sur  $X$  qui en fait une surface de Riemann compacte. D'après le théorème de Riemann Roch, il existe sur  $X$  une forme différentielle holomorphe sextique  $\Phi = \phi(z) dz^6$  dont tous les zéros sont simples: en effet, le degré du fibré  $\Omega^{\otimes 6}$  des formes sextiques sur  $X$  est  $12h - 12 \geq 2h$ , donc [5, Corollaire 3.2, p. 308] il y a deux formes sextiques  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sans zéros communs; alors, pour  $\varepsilon$  assez petit, tous les zéros de  $\Phi_1 + \varepsilon\Phi_2$  sont simples.

Soit  $\Phi$  une telle forme. La racine cubique du module de  $\Phi$  est une métrique singulière conforme à  $g$ , cette métrique est plate et ses singularités sont des cônes d'angles  $7\pi/3$  aux zéros de  $\Phi$ .

Les intégrales de la forme différentielle multivaluée  $\omega = \sqrt[6]{\Phi}$  donnent des cartes canoniques formant un atlas dont les changements de cartes sont de la forme  $az + b$  avec  $a$  une racine sixième de l'unité. Aux singularités, on peut choisir des cartes centrées. Ces cartes sont ramifiées; mais, comme elles sont définies à rotation d'angle  $\pi/3$  près, elles permettent de définir de manière univoque au voisinage de chaque singularité des triangulations équilatérales.

Choisissons une singularité  $z_0$  de  $X$  et fixons au voisinage de  $z_0$  une telle triangulation par triangles équilatéraux de côtés  $L$ . Nous pouvons prolonger cette triangulation le long de tout chemin issu de  $z_0$ . Ces *éléments de triangulation* ne se recollent en une triangulation globale de  $X$  que si toutes les intégrales de  $\omega$  sur les lacets basés en  $z_0$  et les chemins joignant  $z_0$  aux autres zéros de  $\Phi$  sont dans  $L\Lambda$ , où  $\Lambda$  est le réseau équilatéral  $\mathbb{Z}(\xi)$ , avec  $\xi$  le générateur  $\exp(2\pi i/6)$  du groupe  $\mu_6$  des racines sixièmes de l'unité. Si c'est le cas pour un  $L$ , on dira indifféremment que la triangulation obtenue est  *$\Phi$ -équilatérale*, que la surface de Riemann  $X$  est *équilatérale* (pour la forme  $\Phi$ ) ou que la métrique  $g$  est *conformément équilatérale* (relativement à  $\Phi$ ). Remarquons que, quitte à faire une homothétie sur  $\Phi$ , on peut se limiter à  $L = 1$ .

On peut étendre ces définitions au cas où  $\Phi$  est méromorphe: on a ainsi une notion de surfaces de Riemann *conformément équilatérale généralisée*. Dans [8], les auteurs montrent en utilisant un résultat de Belyi [2] que ces surfaces sont exactement celles qui sont algébriques sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Ce résultat était connu de A. Grothendieck (voir *Esquisse d'un programme*).

Un problème intéressant serait de trouver une caractérisation purement algébrique des surfaces *conformément équilatérales* comme sous-ensemble des courbes définies sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

Le théorème sera conséquence des deux propositions suivantes:

**Proposition 1.** *Les métriques conformément équilatérales sont denses dans l'espace des métriques.*

**Proposition 2.** *Une métrique  $g$  sur  $X$  conformément équilatérale est  $\{2\pi/7, 5\pi/14\}$  triangulable. Plus précisément, pour tout intervalle  $I$  contenant strictement l'intervalle  $[2\pi/7, 5\pi/14]$ , il y a un  $L > 0$  tel que l'approximation sécante géodésique pour la métrique  $g$  d'une triangulation équilatérale globale de côté inférieur à  $L$  a tous ses angles dans  $I$ .*

## 5. Démonstration de la Proposition 1

Soit  $\Phi$  une forme sextique holomorphe à zéros simples sur une surface de Riemann  $X$ . Considérons le revêtement  $\tilde{X}$  de  $X$  galoisien de groupe

$\mu_6$  et ramifié sur l'ensemble  $Z$  des zéros de  $\Phi$ , sur lequel la forme  $\omega = \sqrt[6]{\Phi}$  a une détermination univoque  $\tilde{\omega}$ . Notons  $\sigma: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  le générateur correspondant à  $\xi$ , on a alors  $\sigma^*(\tilde{\omega}) = \xi\tilde{\omega}$ . On va suivant un argument de Tischler [7], modifier  $\tilde{\omega}$  pour obtenir une forme proche dont toutes les périodes sont dans un réseau équilatéral.

D'après le théorème de de Rham  $H^1(\tilde{X}, Z; \mathbf{C})$  s'identifie par intégration sur les chemins à  $\text{Hom}(H_1(\tilde{X}, Z; \mathbf{Z}); \mathbf{C})$ . Soient  $\eta_1, \dots, \eta_N$  des formes fermées nulles au voisinage de  $Z$  et dont les classes de cohomologie forment une base duale de  $H_1(\tilde{X}, Z; \mathbf{Z})$ . Le  $\xi$ -espace propre  $V_\xi$  de  $\sigma^*$  agissant sur  $H^1(\tilde{X}, Z; \mathbf{C})$  est défini dans la base  $([\eta_i])$  par des équations linéaires à coefficients dans l'anneau  $\mathbf{Z}(\xi)$  et donc, cet espace contient comme sous-espace dense les classes de cohomologie dont les coordonnées dans la base  $([\eta_i])$  sont dans le corps  $\mathbf{Q}(\xi)$ , c'est-à-dire les classes de cohomologie qui ont toutes leurs périodes dans un réseau équilatéral  $\frac{1}{N}\mathbf{Z}(\xi)$ .

Ainsi, on peut approcher la forme  $\tilde{\omega}$  par des formes  $\tilde{\omega}_\varepsilon = \tilde{\omega} + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \eta_i$  dont les classes de cohomologie sont dans  $V_\xi$  et dont toutes les périodes sont dans un réseau équilatéral. Comme la forme  $\tilde{\omega}_\varepsilon$  est égale à  $\tilde{\omega}$  au voisinage des singularités, elle est non singulière hors de  $Z$ , si les  $\varepsilon_i$  sont suffisamment petits. Il y a donc une structure conforme sur  $\tilde{X}$  pour laquelle la forme  $\tilde{\omega}_\varepsilon$  est holomorphe. Quitte à faire une moyenne sur le groupe du revêtement, on peut supposer que la forme  $\tilde{\omega}_\varepsilon$  est invariante ( $\sigma^*(\tilde{\omega}_\varepsilon) = \xi\tilde{\omega}_\varepsilon$ ) ainsi la puissance sixième de  $\tilde{\omega}_\varepsilon$  descend sur  $X$  pour donner une forme sextique  $\Phi_\varepsilon$  holomorphe pour la structure conforme d'une métrique  $g_\varepsilon$  proche de  $g$  et conformément équilatérale relativement à  $\Phi_\varepsilon$ .

### 6. Démonstration de la Proposition 2

Grâce à l'invariance conforme, il suffit de contrôler au voisinage des zéros de  $\Phi$  les angles des approximations sécantes géodésiques pour une métrique particulière des triangulations équilatérales de  $X$ . Le lemme suivant le fait pour les cartes canoniques au voisinage des singularités.

**Lemme.** *Les angles de l'approximation sécante pour la métrique euclidienne d'une image d'un triangle du réseau équilatéral  $\Lambda$  par l'application  $f(z) = z^{6/v}$  a ses 3 angles dans l'intervalle  $[\frac{2\pi}{v}, \frac{(v-2)\pi}{2v}]$  si  $v > 6$  (resp.  $[\frac{(v-2)\pi}{2v}, \frac{2\pi}{v}]$  si  $v < 6$ ).*

*Preuve.* Nous ferons la démonstration dans le cas  $v = 7$ ; le cas général se traite par les mêmes arguments.

Notons par des *primes* les images par  $f$  des points du réseau  $\Lambda$  (Figure 1). Remarquons d'abord que, si  $[A, B]$  est un segment de  $\Lambda$ , alors, d'après le théorème de Rolle, l'argument de  $B' - A'$  est l'argument de la tangente à la courbe  $f([A - B])$  en l'un de ses points  $f(M)$  (cf. Figure 2), et donc:

$$\text{Arg}(B' - A') - \text{Arg}(f'(A)(B - A)) = -\frac{1}{7}(\text{Arg}(M) - \text{Arg}(A)).$$

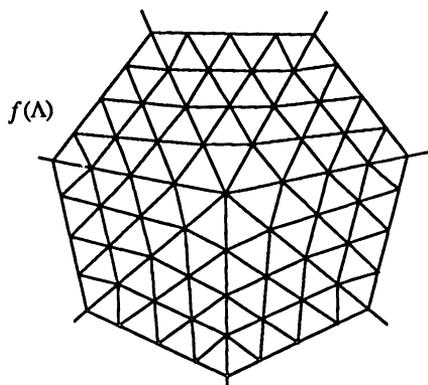


FIGURE 1

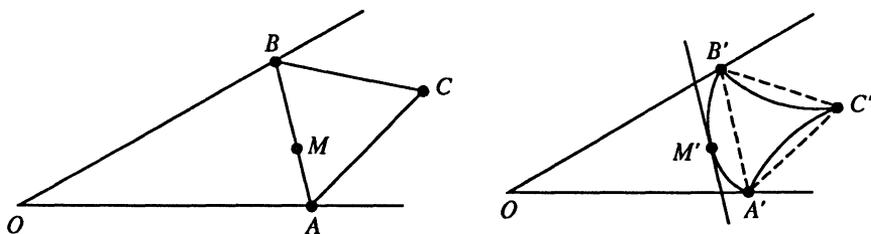


FIGURE 2

Tout segment de  $\Lambda$  non inclus dans la boule unité est vu de l'origine sous un angle inférieur ou égal à  $\pi/6$ , et:

(a) Les angles d'un triangle  $T'$  image d'un triangle non inclus dans la boule  $\{\|z\| \leq \sqrt{3}\}$  sont dans l'intervalle  $[\pi/3 - \pi/21, \pi/3 + \pi/42]$ , d'où le résultat pour ces triangles.

(b) Le résultat est évident pour un triangle dont un sommet est à l'origine.

(c) Le cas des triangles restants est expliqué sur la Figure 3:

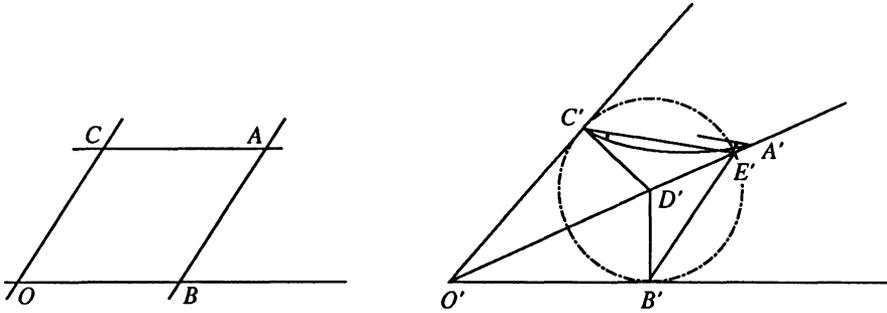


FIGURE 3

Soit  $ABC$  un triangle de  $\Lambda$  avec  $\|B\| = \|C\| = 1$  et  $\|A\| = \sqrt{3}$ . La méthode de (a) donne l'encadrement cherché pour les angles en  $B'$  et  $C'$ , ainsi que la minoration de l'angle en  $A'$ . Soit  $D'$  sur  $OA'$  tel que  $D'C'$  est orthogonal à  $OC'$  et  $E'$  le point du rayon  $OA'$  défini par  $\|D'E'\| = \|D'C'\|$  et  $D'$  est entre  $E'$  et  $O$ . L'angle  $B'E'C'$  vaut  $5\pi/14$ . L'angle  $B'A'C'$  est donc inférieur à  $5\pi/14$ , car  $A'$  est au-delà de  $E'$  sur le rayon  $OE'$ ; cela résulte des deux faits suivants:

(i) Lorsque l'on parcourt de  $A'$  à  $C'$  la courbe  $f([A, C])$  la courbure croît en valeur absolue et donc les angles  $\alpha$  et  $\gamma$  que cette courbe fait en  $A'$  et  $C'$  avec la sécante  $[A'C']$  vérifie  $|\alpha| < |\gamma|$ .

(ii) La courbe  $f([A, C])$  fait avec la direction  $C'E'$  des angles égaux en  $C'$  et  $A'$  (ces angles valent  $\pi/84$ ).

### 7. Cas de la sphère

Il n'y a pas de différentielles sextiques holomorphes sur la sphère, mais on peut faire le même jeu avec des différentielles sextiques méromorphes ayant 12 pôles simples, par exemple  $\Phi(z) = dz^6/f(z)$  où  $f$  est le polynôme dont les racines sont les sommets de l'icosaèdre. En effet une telle forme définit encore une métrique singulière plate, mais les singularités sont des cônes d'angle  $5\pi/3$ .

### 8. Cas à bord et non orientable

Soit  $(X, g)$  une surface riemannienne réelle, c'est-à-dire munie d'une involution  $\tau$  antiholomorphe, elle possède donc une forme sextique  $\Phi = \varphi(z) dz^6$  holomorphe réelle (i.e., vérifiant  $\tau^*(\Phi) = \overline{\varphi}(z) d\overline{z}^6$ ), dont tous

les zéros sont simples. On peut faire toutes les constructions précédentes invariantes par  $\tau$ .

Les cas à bord et non orientables s'obtiennent en appliquant cette remarque aux surfaces riemanniennes réelles doubles d'une surface riemannienne à bord et revêtement d'orientation d'une surface non orientable.

## 9. Une réciproque

Il est facile de voir que les triangulations construites vérifient une condition beaucoup plus forte que celle annoncée: les diamètres des triangles tendent vers 0 et les angles sont presque partout proches de  $\pi/3$ .

Réciproquement, à toute triangulation  $\mathcal{T}$  d'une surface compacte  $X$ , on associe la structure conforme  $c_{\mathcal{T}}$  de la métrique riemannienne à singularités coniques,  $g_{\mathcal{T}}$  obtenue en rendant chaque triangle euclidien équilatéral de côté 1 et on a:

**Théorème.** *Soit  $\mathcal{T}$  une triangulation géodésique d'une variété riemannienne  $(X, g)$ , on pose  $|\mathcal{T}| = \sup(\text{diamètres des triangles de } \mathcal{T})$  et, pour  $x \in X$ ,  $\alpha(x) = \sup|\alpha_i - \pi/3|$ , où le sup porte sur les 3 angles du triangle de  $\mathcal{T}$  où est  $x$ . Alors, si  $\mathcal{T}_n$  est une suite de telles triangulations de  $X$  telles que  $|\mathcal{T}_n| \rightarrow 0$ ,  $\alpha_n(x) \rightarrow 0$  presque partout et les  $|\alpha_n|$  sont uniformément majorées par  $\theta < \pi/6$ , les structures conformes  $c_{\mathcal{T}_n}$  convergent vers la structure conforme de  $X$ .*

**PREUVE.** Cette preuve utilise les applications quasi-conformes (voir [1, 6] par exemple).

**Lemme 1.** *Soit  $g$  une métrique riemannienne définie au voisinage de  $O$  dans  $\mathbf{R}^2$ ,  $T$  un triangle géodésique, contenant  $O$ , de diamètre  $\leq \varepsilon$  et dont les trois angles diffèrent de  $\pi/3$  de moins de  $\varepsilon$ . Il existe alors une métrique  $g_0$  euclidienne au voisinage de  $T$  telle que  $T$  est équilatéral de côté 1,  $g_0/g$  est constante sur les bords de  $T$ , et  $g_0$  est  $(1 + o(1))$ -quasi-conforme à  $g$ .*

**Lemme 2.** *Si  $(X, g)$  est une surface riemannienne orientable, on peut définir le coefficient de conformité  $\mu$  de toute autre métrique  $g_1$  par rapport à  $g$  en utilisant des cartes locales holomorphes. Si  $g_n$  est telle que  $\|\mu_n\|_{L^\infty} \leq k < 1$  et que  $\mu_n \rightarrow 0$  presque partout, alors les structures conformes associées à  $g_n$  convergent vers celle associée à  $g$ .*

Il est clair que les deux lemmes impliquent le théorème. Le Lemme 1 est facile, mais purement technique; le Lemme 2 résulte de [6, p. 29]. En effet, en passant au revêtement universel, on se ramène au cas du disque unité, on peut alors prolonger les  $\mu_n$  par réflexion en dehors de ce dernier.

### Bibliography

- [1] L. Ahlfors, *Lectures on quasi-conformal mappings*, Van Nostrand, Florence, KY, 1966.
- [2] G. V. Belyi, *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Math. USSR Izv. **14** (1980) 247–256.
- [3] Y. Colin de Verdière, *Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **20** (1987) 599–615.
- [4] R. Gunning, *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton, NJ, 1966.
- [5] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer, Berlin, 1977.
- [6] O. Lehto, *Univalent functions and Teichmüller spaces*, Springer, Berlin, 1987.
- [7] D. Tischler, *On fibering certain foliated manifolds over  $S^1$* , Topology **9** (1970) 153–154.
- [8] B. A. Voievodsky & C. Chabat, *Triangulations équilatérales de surfaces de Riemann et courbes définies sur des corps de nombres algébriques*, Dokl. Akad. Nauk USSR **304** (1989) 265–268.

INSTITUT FOURIER

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

