

Article

Empilements de cercles: Convergence d'une
méthode de point fixe.

Colin de Verdière, Yves de

in: Forum Mathematicum - 1 | Periodical

8 page(s) (395 - 402)

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: info@digizeitschriften.de

Empilements de cercles: Convergence d'une méthode de point fixe

Yves Colin de Verdière

(Présenté par Volker Enss)

Résumé. Dans cet article, nous prouvons la convergence d'un algorithme proposé par Thurston pour construire des empilements périodiques de cercles dans le plan dont la combinatoire est donnée.

1980 Mathematics Subject Classification (1985 Revision): 52,53C.

Soit (X, g) une surface riemannienne sans bord à courbure constante: un *cercle* de (X, g) est le bord d'un disque géodésique plongé, *i.e.* de rayon strictement inférieur au rayon d'injectivité de (X, g) en son centre. Un *empilement \mathcal{E} de cercles* est un ensemble de cercles de (X, g) (fini ou non) d'intérieurs 2 à 2 disjoints. Le *graphe Γ* de cet empilement est le graphe tracé sur (X, g) dont les sommets sont les centres des cercles de \mathcal{E} et ayant une arête (géodésique) entre deux sommets i et j si les 2 cercles correspondants sont tangents (extérieurement).

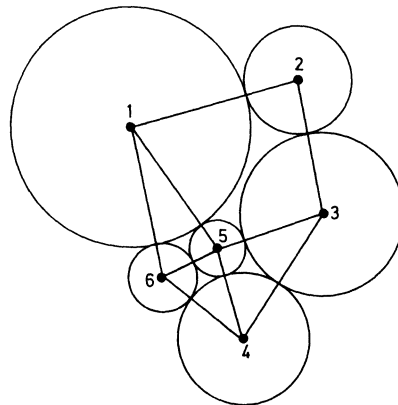


Fig. 1: Un empilement \mathcal{E} et le graphe Γ associé

La surface compacte X est donnée (sans métrique) ainsi qu'un graphe Γ tracé sur X . On cherche une métrique riemannienne g à courbure 0 , $+1$ ou -1 sur X telle que Γ est le graphe d'un empilement de cercles, en particulier les arêtes de Γ sont géodésiques pour g . On peut toujours compléter Γ de façon qu'il soit le 1-squelette d'une triangulation de X .

On a le:

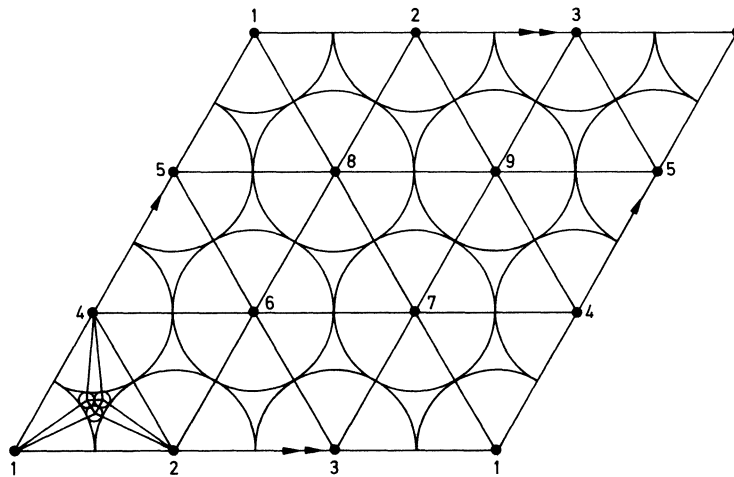
Théorème (Andreev-Thurston). – *Soit X une surface compacte et Γ un graphe plongé dans X qui est le 1-squelette d'une triangulation \mathcal{T} de X . Alors il existe sur X une métrique g à courbure constante 0 , $+1$ ou -1 et un empilement de cercles \mathcal{C} sur (X, g) dont le graphe est Γ . Cette métrique est unique (à homothétie près si $K \equiv 0$ et à transformation de Möbius près si $K \equiv 1$).*

Dans le cas de la sphère, ce théorème est conséquence de résultats d'Andreev sur l'existence de polyèdres convexes dans l'espace hyperbolique de dimension 3 dont les angles dièdres sont donnés et sont $\leq \pi/2$. L'empilement de cercles s'obtient comme traces sur la sphère à l'infini des faces de ce polyèdre.

Le cas général est étudié par Thurston dans le chapitre 13 des notes de Princeton, »*Geometry and topology of 3-manifolds*«.

Dans la suite, je me restreindrai au cas où X est un tore. Un empilement de cercles sur un tore plat est évidemment associé à un empilement périodique du plan euclidien, et réciproquement.

Le cas de la sphère peut facilement se réduire au cas du tore: par projection stéréographique, un graphe Γ (1-squelette d'une triangulation) tracé sur S^2 se transforme en un graphe de \mathbb{R}^2 intérieur à un triangle formé de 3 sommets et 3 arêtes de celui-ci.



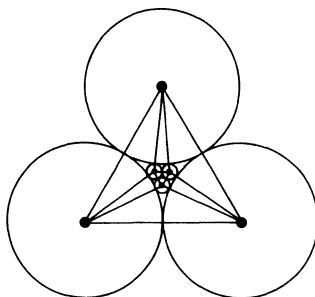


Fig. 2: Un empilement périodique et la projection stéréographique d'un empilement sphérique associé (octaèdre régulier)

Un tel graphe se complète aisément en un graphe Γ_0 périodique du plan (*i.e.* tracé sur un tore). Il est facile par projection stéréographique de reconstituer un empilement de cercles sur S^2 de graphe Γ à partir d'une partie de l'empilement plan périodique de graphe Γ_0 .

Réciproquement, tout empilement de cercles sur S^2 provient d'un empilement périodique de \mathbb{R}^2 par ce procédé: étant donnés 3 cercles sur S^2 tangents 2 à 2 extérieurement, il y a une projection stéréographique qui les transforme en 3 cercles égaux du plan.

Après avoir présenté la preuve donnée par Thurston de l'existence de ces empilements sur le tore, je prouverai la convergence d'un algorithme proposé par Thurston (voir appendice de [RS]) pour calculer ces empilements.

1. Existence d'empilements de combinatoire donnée

Soit \mathcal{T} une triangulation finie du tore X , on note $\{1, 2, \dots, N\}$ l'ensemble des sommets de \mathcal{T} et $i \sim j$ désignera la relation de voisinage: i et j sont reliés par une arête.

Soit

$$\Delta = \left\{ \varrho = (r_i) \in (\mathbb{R}^+ \setminus 0)^N \mid \sum_{i=1}^N r_i = 1 \right\};$$

à tout $\varrho \in \Delta$, on associe une métrique riemannienne singulière g_ϱ sur X qui est plate en dehors des sommets de \mathcal{T} et à singularité (éventuelle) conique aux sommets: cette métrique s'obtient en munissant chaque triangle $\{i, j, k\}$ de \mathcal{T} de la métrique euclidienne donnant aux côtés les longueurs $r_i + r_j$, $r_j + r_k$, $r_k + r_i$. Ces triangles se recollent bien le long des côtés. Aux sommets, le recollement est lisse si la somme des angles vaut 2π , on introduit ainsi la courbure K_i de g_ϱ au sommet i par: $K_i = 2\pi - \Sigma^i \alpha$ où $\Sigma^i \alpha$ désigne la somme des angles en i des triangles ayant i comme sommet. La formule de Gauss-Bonnet donne alors: $\sum_{i=1}^N K_i = 0$.

On note

$$Z = \left\{ k = (K_i) \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N K_i = 0 \right\}$$

et on désigne par $\varphi : \Delta \rightarrow Z$ l'application qui à ϱ associe la courbure de g_ϱ . Thurston montre que φ est un difféomorphisme de Δ sur un polyèdre convexe P de Z , qu'il caractérise, et que P contient l'origine.

Donnons quelques détails:

Lemme 1. – *L'application $\varphi : \Delta \rightarrow Z$ est un difféomorphisme local, en particulier φ est ouverte et l'image de Δ est un ouvert de Z .*

Preuve du lemme 1. – Le calcul des dérivées partielles des K_i montre que $\frac{\partial K_i}{\partial r_i} > 0$,

$$\frac{\partial K_i}{\partial r_j} < 0 \text{ si } i \sim j \text{ et bien sûr } \frac{\partial K_i}{\partial r_j} = 0 \text{ si } i \text{ et } j \text{ ne sont pas voisins.}$$

L'invariance par homothétie de la courbure, *i.e.* $\varphi(\lambda r) = \varphi(r)$, donne:

$$\forall i = 1, \dots, N, \sum_{j=1}^N r_j \frac{\partial K_i}{\partial r_j} = 0.$$

Si $(x_j) \in \text{Ker}(\varphi'(r_0))$, on a donc:

$$\forall i = 1, \dots, N, \sum_{j=1}^N \frac{\partial K_i}{\partial r_j} x_j = 0,$$

soit, avec $y_j = x_j/r_j$, $\sum_{j=1}^N \frac{\partial K_i}{\partial r_j} r_j y_j = 0$. Si on pose, pour $j \neq i$,

$$b_{ij} = - \left(r_j \frac{\partial K_i}{\partial r_j} \right) / \left(r_i \frac{\partial K_i}{\partial r_i} \right), \text{ on a:}$$

$$\sum_{j=1}^N b_{ij} = 1, b_{ij} > 0 \text{ si } i \sim j \text{ et } y_j = \sum_{j \sim i} b_{ij} y_j.$$

Le vecteur (y_j) vérifie donc une propriété de la moyenne avec les poids (b_{ij}) ; la connexité de Γ montre, avec un raisonnement sur le maximum des y_i , que y_i est constant, donc le noyau de $\varphi'(r_0)$ est constitué des vecteurs colinéaires à $\sum_j r_j \frac{\partial}{\partial r_j}$ qui sont dans Δ : $\varphi'(r_0)$ est donc bijective.

A tout sous-complexe connexe complet (*) W de \mathcal{T} , on associe l'inéquation (E_W) dans Z définie par:

$$(E_W) \sum_{i \in W_0} K_i > 2\pi\chi(W) - \pi \left(\sum_{i \in W_0} n_W(i) \right),$$

(*) *complet* signifie que W_1 est l'ensemble des arêtes de \mathcal{T} dont les extrémités sont dans W_0 et W_2 l'ensemble des triangles de \mathcal{T} dont les côtés sont dans W_1 .

où W_0, W_1, W_2 sont les simplexes de dimension 0, 1, 2 de W ; $\chi(W) = \# W_2 - \# W_1 + \# W_0$ et $n_W(i)$ le nombre de triangles de sommet i de \mathcal{T} n'ayant pas d'autre sommet dans W_0 .

Lemme 2. – Soit P le polyèdre convexe borné de Z défini par l'ensemble des inéquations (E_W) , alors

- a) $\varphi(\Delta) \subset P$;
- b) φ est propre de Δ dans P .

Corollaire. – $\varphi(\Delta) = P$ et φ est un difféomorphisme de Δ sur P .

Preuve du lemme 2. –

a) – C'est une conséquence de la formule de Gauss-Bonnet appliquée à un petit voisinage tubulaire $N_\varepsilon(W)$ de W :

$$\sum_{i \in W_0} K_i = 2\pi\chi(W) - \int_{bN_\varepsilon(W)} \tau,$$

où τ est la courbure algébrique du bord de $N_\varepsilon(W)$: il est clair que τ est concentrée près des sommets i de W_0 qui sont sur la frontière de W .

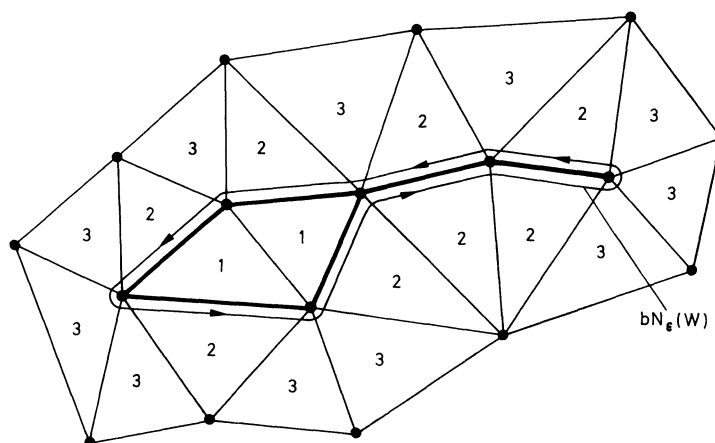


Fig. 3: Sous-complexe W et classification des triangles voisins

L'intégrale dans la partie proche de i de τ vaut alors $\Sigma\beta - \pi$ où β sont les angles en i des triangles de \mathcal{T} non dans W_2 . On peut regrouper les triangles de \mathcal{T} de sommet i en 3 types

- type 1 = triangles de W_2
- type 2 = triangles ayant 1 côté dans W_1
- type 3 = triangles n'ayant aucun côté dans W_1 .

Il y a en chaque sommet i du bord de W , 2 triangles de type 1 et $n_W(i)$ triangles de type 3.

La somme de 2 angles consécutifs d'un triangle de type 2 est $< \pi$; les angles des triangles de type 3 sont $< \pi$; on en déduit (E_W):

$$\int_{bN_\varepsilon(W)} \tau = \sum_{i \in bW} \left(\sum_{(2)} \beta - \pi \right) + \sum_{i \in bW} \sum_{(3)} \beta$$

($\Sigma_{(2)}$ (resp. $\Sigma_{(3)}$) sont les sommes sur les triangles de type 2 (resp. 3)).

Les remarques précédentes montrent que $\int_{bN_\varepsilon(W)} \tau < \pi \sum_{i \in W_0} n_W(i)$.

b) – Soit ϱ_n une suite de Δ tendant vers l'infini de Δ et $k_n = \varphi(\varrho_n)$. Quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que $\varrho_n \rightarrow \varrho_\infty \in b\Delta$ et $k_n \rightarrow k_\infty$; il faut montrer que $k_\infty \notin P$.

Soit \tilde{W} le sous-complexe complet de \mathcal{T} tel que $\tilde{W}_0 = \{i \mid \varrho_\infty(i) = 0\}$ et W une composante connexe de \tilde{W} . Montrons que, pour k_∞ , on a *égalité* dans (E_W).

Lorsque $\varrho_n \rightarrow \varrho_\infty$, les triangles de type 2 ont leur angle non dans W qui tend vers 0, donc la somme des 2 angles restant tend vers π . Pour ceux de type 3, l'angle intéressant tend vers π . Pour montrer le théorème de Thurston, il reste à vérifier que $0 \in P$, c'est-à-dire que, pour tout sous-complexe W connexe complet de \mathcal{T} , on a

$$\sum_{i \in W_0} n_W(i) > 2\chi(W).$$

Or $\chi(W) \leq 1$, il suffit donc de regarder les cas $\chi(W) = 0$ et $\chi(W) = 1$.

(i) $\chi(W) = 0$: s'il n'y avait aucun triangle de type 3, il est facile de voir qu'on aurait $\chi(\mathcal{T} \setminus W) =$ nombre de composantes connexes de $X \setminus \overline{W}$ et donc est strictement > 0 : on a donc contradiction avec $0 = \chi(X) = \chi(W) + \chi(\mathcal{T} \setminus W)$.

(ii) $\chi(W) = 1$: s'il n'y avait que 2 triangles de type 3, il est facile de voir que leur côté sans sommets dans W serait commun et donc $\chi(\mathcal{T} \setminus W) = n_2 + n_3 - (n_2 + n_3 + 1) + 2 = 1$; on termine comme en a): $0 = \chi(X) = 1 + 1$; d'où contradiction.

2. Convergence de l'algorithme de Thurston

Description de l'algorithme. – Il s'agit d'une méthode de point fixe, utilisant une transformation $G: \Delta \rightarrow \Delta$. Il est préférable de remplacer l'invariance par homothétie par une invariance par translation en prenant comme inconnues les $t_i = \log(r_i)$ et d'introduire alors une application $F: \mathbb{R}^n/D \rightarrow \mathbb{R}^n/D$, où $D = \{(t, \dots, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est la diagonale de \mathbb{R}^n . Pour définir F , on a besoin du:

Lemme. – Soit $V \geq 3$ donné, $(r_1, \dots, r_V) \in (\mathbb{R}^+ \setminus 0)^V$ donnés, il existe $r_0 > 0$, unique tel que la somme des angles en 0 des N triangles $(0, i, i+1)$, $(1 \leq i \leq V; V+1=1)$ de côtés $(r_0 + r_i, r_i + r_{i+1}, r_{i+1} + r_0)$ vaille 2π ; si on recolle ces triangles euclidiens, on obtient une métrique lisse en 0.

Remarque. – Cela correspond à une famille de cercles $(C_i)_{0 \leq i \leq V}$, où chaque C_i , $(i \geq 1)$ est tangent extérieurement à C_0 , C_{i+1} à C_i et C_1 à C_V , les rayons étant les r_i . Il se peut que C_i et C_j , $(|i-j| \geq 2)$ se recourent.

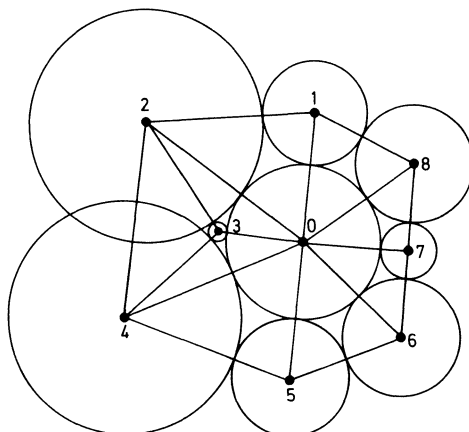


Fig. 4: Choix de r_0 ; les cercles C_2 et C_4 recourent!

Preuve du lemme. – Soit $K(r) = 3\pi - \sum_{i=1}^V \alpha_i$, où α_i est l'angle en 0 du triangle $(0, i, i+1)$ euclidien de côtés $(r + r_i, r_i + r_{i+1}, r_{i+1} + r)$. Le calcul des dérivées montre que $K(r)$ est une fonction strictement croissante de r et $K(0^+) = (2 - V)\pi, K(+\infty) = 2\pi$. On conclut aisément par le théorème des valeurs intermédiaires.

On a alors la description de $\tilde{F}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ qui donne F par passage au quotient. Pour chaque $i, F_i(t_1, \dots, t_N)$ est $\log(r_0)$ où r_0 est déterminé par le lemme précédent appliqué à l'étoile du sommet i dans \mathcal{T} ($V =$ valence de i) et les rayons $r_j, (j \sim i)$ donnés par $r_j = e^{t_j}$. Autrement dit $\log(r_i^*) = F_i(\log r_1, \dots, \log r_N)$ est donné implicitement par:

$$K_i(r_1, \dots, r_{i-1}, r_i^*, r_{i+1}, \dots, r_N) = 0,$$

où K_i est la courbure en i de la métrique g_ϱ avec $\varrho = (r_1, \dots, r_{i-1}, r_i^*, \dots, r_N)$.

Preuve de la convergence. – Soit $E = \mathbb{R}^n/D$, on note $[t], t \in \mathbb{R}^n$, la classe de t et on munit E de la distance associée à la norme quotient de la norme ℓ^∞ , on a:

$$\|[t]\| = \frac{1}{2}(\sup_i t_i - \inf_i t_i),$$

on a alors le

Lemme. – Soit $A \in L(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ de matrice (a_{ij}) telle que $\forall i, \sum_j a_{ij} = 1$ et $\forall i, j, a_{ij} \geq \alpha > 0$, alors $A(D) \subset D$ et si $\hat{A}: E \rightarrow E$ est obtenu par passage au quotient de A , on a:

$$\|\hat{A}\| \leq 1 - 2\alpha < 1.$$

Preuve du lemme. – $\sum_j a_{ij} x_j = x_i'$ est barycentre des (x_j) avec des poids $a_{ij} \geq \alpha > 0$. Il est clair que:

$$(1 - \alpha) \inf x_j + \alpha \sup x_j \leq x'_i \leq (1 - \alpha) \sup x_j + \alpha \inf x_j.$$

On en déduit le résultat.

Le calcul des dérivées de $K_i(t_1, \dots, t_N)$, montre que $\frac{\partial K_i}{\partial t_i} > 0$ et $\frac{\partial K_i}{\partial t_j} < 0$ (si $j \sim i, i \neq j$);

le théorème des fonctions implicites montre alors que les dérivées $\frac{\partial F_i}{\partial t_j} = -\frac{\partial K_i}{\partial t_j} / \frac{\partial K_i}{\partial t_i}$ sont > 0 si $i \sim j$ et nulles sinon. De plus, on a évidemment:

$$\sum_j \frac{\partial F_i}{\partial t_j} = 1, \text{ car } K_i(t_1 + c, t_2 + c, \dots, t_N + c) = K_1(t_1, \dots, t_N).$$

On en déduit que la matrice jacobienne de F^k pour $k \geq \text{diam}(\Gamma)$ vérifie les hypothèses du lemme précédent avec un α uniforme sur tout compact de E .

Donc, par application du théorème des accroissements finis, si $a_i = \log b_i, a = (a_i)$ est l'empilement cherché, on a:

$$\forall k \geq \text{diam}(\Gamma), \forall t \in \mathbb{R}^N, d([a], F^k[t]) < d([a], [t]) = D.$$

Donc, il existe $K, 0 < K < 1$ tel que:

$$d([a], F^n[t]) \leq C \cdot K^n.$$

Cela prouve la convergence de l'algorithme.

Références

- [A1] Andreev, E. M.: On convex polyhedra in Lobachevskii spaces. *Mat. USSR Sbornik* **10** (1970), 413–440
- [A2] Andreev, E. M.: On convex polyhedra of finite volume in Lobachevskii spaces. *Mat. USSR Sbornik* **12** (1970), 255–259
- [BFP] Barany, I., Füredi, Z., Pach, J.: Discrete convex functions and proof of the six circle conjecture of Fejes Toth. *Can. J. Math.* **36** (1984), 569–576
- [R] Rodin, B.: Schwarz's lemma for circle packings. *Inventiones Math.* **89** (1987), 271–289
- [RS] Rodin, B., Sullivan, D.: The convergence of circle packings to the Riemann mapping. *J. Diff. Geom.* **26** (1987), 349–360
- [T] Thurston, W.: The geometry and topology of three manifolds. Princeton Notes, Chap. 13

Reçu le 6 Janvier 1989

Yves Colin de Verdière, Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques, BP 74,
38402 St Martin d'Hères Cedex, France