YVES COLIN DE VERDIÈRE

Distribution de points sur une sphère

Séminaire N. Bourbaki, 1988-1989, exp. n° 703, p. 83-93.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1988-1989__31__83_0>

Séminaire BOURBAKI
41ème année, 1988-89, n° 703

Novembre 1988

DISTRIBUTION DE POINTS SUR UNE SPHÈRE

(D'après Lubotzky, Phillips et Sarnak)

par *Yves COLIN DE VERDIÈRE*

Le comportement asymptotique des orbites de l'action d'un groupe discret Γ d'isométries sur un espace euclidien ou hyperbolique X a été beaucoup étudié et conduit à des estimations asymptotiques de la fonction de dénombrement

$$N_\Gamma(x_0, x_1; R) = \#\{\gamma \in \Gamma | d(x_0, \gamma x_1) \leqslant R\}$$

$(x_0, x_1$ points de X; d distance sur $X)$ lorsque R tend vers l'infini.

Il est intéressant de faire une étude analogue concernant l'action (non discrète) d'un groupe discret Γ sur un espace compact X comme la sphère et de mesurer la régularité de la distribution des orbites, on peut par exemple s'intéresser à la fonction :

$$N_\Gamma(D, x_0; R) = \frac{1}{n}\#\{\gamma \in \Gamma | \|\gamma\| \leqslant R \text{ et } \gamma x_0 \in D\} ,$$

où $\|\gamma\|$ mesure la grandeur d'un élément de Γ (par exemple la longueur minimale des mots représentant γ par rapport à un système de générateurs de Γ), D est un domaine de X et $n = \#\{\gamma \in \Gamma | \|\gamma\| \leqslant R\}$.

Lubotzky, Phillips et Sarnak ont étudié le cas $X = S^2$ et montrent que pour certains Γ "arithmétiques" bien choisis, $N_\Gamma(D, x_0; R)$ converge vers $\frac{1}{4\pi}$ aire (D) avec une estimation précise du reste lorsque D est régulière.

Les majorations décisives, dans le cas arithmétique, proviennent des conjectures de Weil, prouvées par Deligne.

Les "opérateurs de Hecke" introduits dans ce contexte de l'analyse harmonique sur S^2 pourraient avoir des retombées intéressantes par l'utilisation de nouvelles bases d'harmoniques sphériques, moins sensibles au choix d'un axe de rotation que ne le sont les $Y_{l,m}$ usuelles.

Précisons un peu les notations, si $S = \langle a_1, b_1 = a_1^{-1}, \dots, a_l, b_l = a_l^{-1} \rangle$ est une partie finie symétrique du groupe des isométries X, on mesure l'uniformité de la distribution des orbites $S.x_0$ $(x_0 \in X)$ à l'aide de l'opérateur T_S défini sur $L^2(X)$ par :

$$(T_S f)(x) = \sum_{\gamma \in S} f(\gamma x) .$$

L'opérateur T_S est symétrique, de norme $2l$ et $T_S(1) = 2l.1$, on en déduit que T_S laisse invariant l'espace $L_0^2(X) \subset L^2(X)$, formé des fonctions de moyenne nulle. On pose

$$\delta_S = \frac{1}{2l} \| T_{S|L_0^2(X)} \| .$$

On a aussi

$$\delta_S = \frac{1}{2l} \sup\{|\lambda| | \lambda \quad \text{valeur propre de} \quad T_{S|L_0^2}\},$$

en effet, T_S commute avec le laplacien et admet donc une base orthonormée de fonctions propres communes avec lui. La bonne répartition moyenne des orbites est mesurée par la petitesse de δ_S.

On introduit un autre invariant de la façon suivante : soit G_S le sous-groupe de $\mathrm{Isom}(X)$ engendré par S, soit

$$S^N = \{\gamma \in G_S | \gamma \text{ est un mot de longueur } \leqslant N \text{ en } S\} ,$$

on s'intéresse à la décroissance par rapport à N de δ_{S^N}.

Il n'est pas clair qu'on puisse trouver des S tels que $\delta_S < 1$, et en fait dans le cas des tores plats, c'est impossible.

1. Cas des tores

Soit $X = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ muni d'une métrique plate et S un sous-ensemble fini, symétrique de X, opérant par translation sur lui-même:

$$S = \{\pm a_i | 1 \leqslant i \leqslant l\} , \text{ avec } a_i \in \mathbf{R}^n .$$

Les valeurs propres de $T_{S|L_0^2(X)}$ sont les nombres

$$\lambda_\nu = 2 \sum_{i=1}^{l} \cos(2\pi \langle \nu | a_i \rangle) ,$$

où $\nu \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$, la fonction propre e_ν étant l'exponentielle $e^{2\pi i \langle \nu | x \rangle}$. Alors ε étant donné, il existe $\nu \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$, tel que $\forall i$, $d(\langle \nu | a_i \rangle, \mathbf{Z}) \leqslant \varepsilon$.

On en déduit qu'il existe des ν non nuls, tels que λ_ν soit arbitrairement proche de $2l$, et donc $\delta_S = 1$.

2. Résultats de Lubotzky, Phillips et Sarnak

Dans les articles [LPS 1] et [LPS 2], les auteurs montrent que le cas de S^2 est très différent de celui des tores; ils prouvent en particulier les théorèmes suivants :

THÉORÈME A . — *$\forall S \subset SO(3)$ avec $\# S = 2l$, on a*

$$\delta_S \geqslant \sqrt{2l-1}/l .$$

Pour tout nombre premier $p \equiv 1 \bmod 4$, les auteurs exhibent un sous-ensemble S_p de $SO(3)$ à $p + 1 = 2l$ éléments, optimal par rapport au théorème A :

THÉORÈME B . — *On a :*

$$\delta_{S_p} = 2\sqrt{p}/(p+1) .$$

De plus, si on pose $\#S_p^N = n$, on a :

THÉORÈME C. — $\delta_{S_p^N} = 0(\mathrm{Log}\, n/\sqrt{n})$.

Le théorème C s'écrit donc

$$\forall f \in L^2(S^2)\ ,\ \|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\gamma_j x) - \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} f\|_{L^2} = 0(\mathrm{Log}\, n/\sqrt{n})\ ,$$

où $\{\gamma_j | 1 \leqslant j \leqslant n\}$ est la liste des éléments de S_p^N .

Si on prend des f d'un type particulier, on peut obtenir des estimations ponctuelles. Par exemple le cas où D est un domaine à bord C^1 donne lieu au :

THÉORÈME D. — *Si $x_0 \in S^2$, on a :*

$$|\frac{1}{n}\#\{j | \gamma_j x_0 \in D\} - \frac{1}{4\pi}\ \textit{aire}\ (D)| = 0(\mathrm{Log}\, n/n^{1/3})\ .$$

Le théorème A est comparativement facile et dépend de résultats de Kesten ([K]) sur le support de la mesure spectrale associée à un groupe de type fini. Le théorème B dépend des conjectures de Weil, démontrées par Deligne, via une majoration asymptotique des coefficients de Fourier de formes modulaires convenables. Le théorème C est une conséquence assez simple du théorème B.

Le théorème D résulte d'estimations précises sur les harmoniques sphériques zonales, plus précisément des multiplicateurs associés à la convolution par la fonction caractéristique d'un petit disque de S^2 .

3. Mesure spectrale d'un graphe homogène

Soit Γ un graphe homogène sous l'action d'un groupe G. On suppose Γ de degré (valence) $q+1$ et muni de la mesure qui donne la masse 1 à chaque sommet. Sur $l^2(\Gamma)$, on définit un opérateur T par la formule :

$$(Tf)(x) = \sum_{x' \sim x} f(x')\ .$$

T est relié au laplacien combinatoire standard par $T = (q+1)\mathrm{Id} - \Delta$.

L'exemple fondamental est le *graphe de Cayley* Γ_G , d'un groupe G associé à un système S *symétrique* de $2l = q+1$ générateurs : les sommets de Γ_G sont les points de G, il y a une arête entre g et g' chaque fois qu'il existe $\gamma \in S$ tel que $\gamma g = g'$. Γ est homogène sous l'action de G par translation à droite sur lui-même. Si G est libre, Γ est un arbre homogène.

On a une notion de *mesure spectrale* associée au graphe homogène Γ, qui est un cas particulier de la notion bien connue des physiciens de *densité d'états* (voir à ce sujet, par exemple [CV 1]).

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue; par le calcul fonctionnel, est associé à f un opérateur $f(T)$ sur $l^2(\Gamma)$, qui admet une matrice $[f(T)]_{x,x'}$. A cause de l'homogénéité de Γ, on a évidemment :

$$\forall x, x'\quad [f(T)]_{x,x} = [f(T)]_{x',x'}\ .$$

On considère alors, pour $x_0 \in \Gamma$ fixé, la forme linéaire sur $C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ définie par :

$$L(f) = [f(T)]_{x_0,x_0} \, .$$

L est une forme linéaire positive ($f \geqslant 0 \;\Rightarrow f(T) \geqslant 0 \;\Rightarrow [f(T)]_{x_0,x_0} \geqslant 0$); $L(1) = 1$ et donc L définit une mesure de probabilité μ sur $\mathbf{R}$, c'est la mesure spectrale de Γ.

Dégageons quelques propriétés de μ :

i) Si Γ a $N < \infty$ sommets, on a : $\mu = 1/N \sum_{i=1}^{N} \delta(\lambda_i)$, où $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_N$ sont les valeurs propres de T; en effet, on a :

$$\mathrm{Tr} f(T) = \sum_{x \in \Gamma} [f(T)]_{x,x} = N \int f d\mu \, .$$

ii) Support (μ) = spectre (T) .

En effet :

a) si $]a,b[\cap \mathrm{Spectre}(T) = \emptyset$ et $f \in C_0(]a,b[),\mathbf{R})$, on a $f(T) = 0$ et donc $]a,b[\cap \mathrm{Supp}(\mu) = \emptyset$.

b) Réciproquement, si $]a,b[\cap \mathrm{Supp}(\mu) = \emptyset$, on a, pour toute f à support dans $]a,b[$,

$$[f^2(T)]_{x,x} = 0$$

et comme

$$[f^2(T)]_{x,x} = \sum_{x' \in \Gamma} ([f(T)]_{x,x'})^2 \, ,$$

$f(T) = 0$. En particulier $\mathrm{Supp}\mu \subset [-2l, 2l]$.

iii) $\int t^s d\mu = m_s$ est le nombre de lacets d'origine x et de longueur s, où la longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes parcourues. En particulier, on a : $m_s(\Gamma) \geqslant m_s(A_q)$, où A_q est l'arbre homogène de degré $q+1$.

iv) $\|T\| = \limsup (m_s)^{1/s}$. En effet, soit $F(\lambda) = \int (\lambda - t)^{-1} d\mu(t)$, c'est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ − Spectre(T), la relation précédente découle du calcul du rayon de convergence de la série de Laurent de F.

v) Calcul de μ à partir de la résolvante; on a :

$$\mu = \frac{1}{2i\pi}[(t + i0 - T)^{-1} - (t - i0 - T)^{-1}]_{x,x} \, .$$

vi) Soit G_n une suite décroissante de sous-groupes de G, d'indices finis et dont l'intersection est $\{e\}$, on a :

$$\mu_G = \lim \mu_{G_n \backslash G}$$

La preuve consiste à regarder la limite des $m_s(G_n)$. Cette égalité permet de retrouver une définition usuelle de la densité d'état : densité limite des valeurs propres dans de grands domaines dont le bord devient "négligeable".

Venons-en au théorème de Kesten, concernant le cas du graphe de Cayley d'un groupe G de générateurs S :

THÉORÈME (KESTEN 1959) . — *Soit (G,S), avec $\#S = 2l$ et $d_{G,S}$ la norme de l'opérateur T associé, $\delta_{G,S} = \frac{1}{2l} d_{G,S}$, on a :*

$$\frac{\sqrt{2l-1}}{l} \leqslant \delta_{G,S} \leqslant 1$$

avec :

$$\delta_{G,S} = \frac{\sqrt{2l-1}}{l} \Longleftrightarrow (G,S) \text{ libre}$$
$$\delta_{G,S} = 1 \Longleftrightarrow G \text{ moyennable} \quad .$$

Preuve. — La majoration de $\delta_{G,S}$ est évidente par définition de T_S qui est somme de $2l$ opérateurs de norme 1; la minoration résulte de iii) et iv) : en effet ces relations prouvent que $\|T\|$ est minimale à l fixé, lorsque Γ est un arbre. Il reste à prouver que $\delta = \sqrt{2l-1}/l$ lorsque (G,S) est libre, ce qui sera fait au §4.

La caractérisation des groupes libres comme un minimum absolu de $\delta_{G,S}$ est faite dans [K]; elle est délicate , mais cette caractérisation n'est pas utile pour ce qui suit.

L'autre extrême, le cas moyennable, est plus accessible. Rappelons qu'un groupe est *moyennable* s'il existe une moyenne invariante définie sur toute fonction bornée de G dans **R**, positive sur les fonctions positives, telle que la fonction 1 soit de moyenne 1.

La propriété de moyennabilité admet une interprétation géométrique, c'est la condition de Fölner :

(F) G est dit de Fölner si $\forall \varepsilon > 0$, il existe une partie finie $A \subset G$ telle que $\# bA \leqslant \varepsilon \# A$, où $\# bA$ est le nombre d'arêtes joignant A au complémentaire de A dans le graphe de Cayley de G. Cette propriété est indépendante du système de générateurs, c'est une propriété isopérimétrique.

On a alors le :

THÉORÈME . — *G , de type fini, est moyennable si et seulement si G est de Fölner.*

La preuve se trouve dans [GL].

Il est alors facile de relier la condition (F) et la condition spectrale $\delta_{G,S} = 1$, en effet cette condition se traduit sur le laplacien par $\inf(\text{Spectre } \Delta) = 0$: l'équivalence résulte alors du minimax appliqué à la fonction caractéristique de A dans un sens et de l'inégalité de Cheeger dans l'autre ([DK]).

4. Cas des arbres

Ici Γ est un arbre homogène de degré $2l = q + 1$.

4a. Spectre et résolvante. — La matrice de la résolvante s'obtient par résolution de :

$$(\lambda - T)f = \delta(x_0) \ , \quad f \in L^2(\Gamma) \ .$$

Par symétrie, $f(x)$ est une fonction u_n de la distance n de x à x_0. Cette suite doit satisfaire

$$\lambda u_0 - (q+1)u_1 = 1 \tag{1}$$
$$\lambda u_n - (u_{n-1} + q u_{n+1}) = 0 \tag{2}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 (q+1) q^{n-1} < +\infty \tag{3}$$

On est amené à chercher u_n sous la forme $u_n = C\alpha^n$, où α est solution de

$$q\alpha^2 - \lambda\alpha + 1 = 0 \quad \text{et} \quad u_0 = \frac{1}{\lambda - (q+1)\alpha} \ .$$

L'équation caractéristique n'a de solution vérifiant (3) que si $\lambda \notin I_q = [-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}]$.

Dans ce cas, on obtient pour $\lambda \notin$ Spectre(T) :

$$[(\lambda - T)^{-1}]_{x,x} = \frac{2q}{(q-1)\lambda - (q+1)F(\lambda)} ,$$

où $F(\lambda)$ est la détermination de $\sqrt{\lambda^2 - 4q}$ dans $\mathbf{C} - I_q$ équivalente à λ lorsque λ est grand. Les propriétés 3.iii et3.v montrent alors que : spectre(T) $= I_q$ et donc $d_\Gamma = 2\sqrt{q}$. On a aussi par le calcul de μ dans 3.v :

$$d\mu = \frac{(q+1)\sqrt{4q - t^2}}{2\pi((q+1)^2 - t^2)} dt .$$

On vérifie en particulier que $\int d\mu = 1$.

4b. Calcul fonctionnel. — On définit des opérateurs T_n par $(T_n f)(x) = \sum_{d(x,x')=n} f(x')$. Il est clair que les T_n sont donnés par des polynômes $T_n = P_n(T_1)$.

Par exemple :

$$P_0 = 1,\ P_1 = t,\ P_2 = t^2 - (q+1), \dots .$$

On a le résultat suivant :

$$a_{n,m} = \int P_n(t) P_m(t) d\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ (q-1)q^{n-1} & \text{si } n = m \end{cases}$$

Preuve. — D'après la définition de μ, on a : $a_{n,m} = [P_n P_m(T)]_{x,x}$; comme $P_n P_m(T) = P_n(T) \circ P_m(T)$, on a :

$$a_{n,m} = \sum_{d(x,x')=n} \sum_{d(x',x)=m} 1 .$$

Les polynômes $P'_n = ((q-1)q^{n-1})^{-1/2} P_n$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbf{R}, \mu)$.

Calcul des P_n : ce calcul est fait par les auteurs, on trouve :

$$P_n = Q_n - Q_{n-2} \text{ où } Q_n(2\sqrt{q}\cos\theta) = q^{n/2} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} .$$

5. Preuve du théorème A

Comme T_S commute avec le laplacien, il préserve les espaces propres du laplacien canonique Δ de S^2, les espaces H_n d'harmoniques sphériques. Rappelons (cf [BGM]) que H_n est l'espace vectoriel des restrictions à S^2 des polynômes homogènes de degré n, harmoniques dans $\mathbf{R}^3$ et qu'on a $\dim(H_n) = 2n+1$. et

$H_n = \mathrm{Ker}(\Delta - n(n+1))$.

Définissons des mesures μ_n sur $\mathbf{R}$ à support dans $[-2l, 2l]$ par

$$\mu_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \delta(\lambda_{n,j}) ,$$

où $\lambda_{n,1} \leqslant \dots \leqslant \lambda_{n,2n+1}$ sont les valeurs propres de $T_{S|H_n}$.

Le théorème A est alors une conséquence immédiate du :

THÉORÈME . — *Lorsque $n \to \infty$, les mesures μ_n convergent vaguement vers une mesure μ qui est la mesure spectrale du groupe G_S relativement aux générateurs de S.*

(Le théorème A s'en déduit immédiatement puisque visiblement tout point du support de μ est un point du spectre essentiel de T_S, car point d'accumulation de valeurs propres de T_S).

Preuve. — Le théorème précédent est conséquence d'une mini-formule de traces qui s'écrit ainsi :

$$(\star) \qquad \mathrm{Tr}(T^s_{S|H_n}) = \sum\nolimits_\gamma^{(s)} \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})\theta_\gamma}}{\sin\frac{\theta_\gamma}{2}} \ ,$$

où $\sum^{(s)}$ est la somme sur les mots de longueur s par rapport à S et si γ est un tel mot considéré comme une rotation, $\theta_\gamma \in [0, \pi]$ est l'angle de cette rotation.

La formule $(\star)$ est élémentaire, on a :

$$(T^s_S f)(z) = \sum\nolimits_\gamma^{(s)} f(\gamma z)$$

et donc si T_γ est défini par :

$$T_\gamma f(z) = f(\gamma z) \ ,$$

on a $T^s_S = \sum^{(s)}_\gamma T_\gamma$, et :

$$\mathrm{Tr} T^s_{S|H_n} = \sum\nolimits_\gamma^{(s)} \mathrm{Tr}(T_{\gamma|H_n}) \ ,$$

puis la trace de $T_{\gamma|H_n}$ (valeur du caractère χ_n de la représentation naturelle de $SO(3)$ dans H_n sur γ) se calcule en diagonalisant T_γ par rapport à la base usuelle des harmoniques sphériques relative à l'axe de la rotation γ (les $Y_{l,n}$).

$$\mathrm{Tr} T_{\gamma|H_n} = \chi_n(\gamma) = \sum_{|l|\leqslant n} e^{il\theta_\gamma} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta_\gamma}{\sin\frac{\theta_\gamma}{2}}.$$

Cela conclut la preuve de $(\star)$. Il serait intéressant d'étendre cette formule à un contexte plus général (espaces symétriques compacts, espaces homogènes).

Considérons maintenant les μ_n, on a :

$$\int t^s d\mu_n = \frac{1}{2n+1} \mathrm{Tr}(T^s_{S|H_n}) \ ,$$

et donc, en appliquant $(\star)$:

$$\int t^s \mu_n \to \#\{\gamma | \theta_\gamma = 0\} = m_s \ ,$$

lorsque $n \to \infty$. On en déduit le résultat cherché. Il est remarquable que μ ne dépend pas la représentation de G_S dans $SO(3)$, mais seulement du groupe abstrait G_S et de son système de générateurs S.

6. Construction des S_p

Soit $H = \{x + yi + zj + tk | x, y, z, t \in \mathbf{R}\}$ le corps des quaternions, E le sous-espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbf{R}$ des quaternions purement imaginaires ($x = 0$) muni de la structure euclidienne induite par la norme des quaternions $N(q) = q\bar{q}$. A tout quaternion $q \in H\backslash\{0\}$, on associe la rotation $\rho_q \in SO(E)$ définie par :

$$\rho_q(\zeta) = \frac{1}{N(q)} q\zeta\bar{q} .$$

Cela définit un homomorphisme surjectif du groupe multiplicatif de H sur $SO(E)$.

L'idée est maintenant d'utiliser des quaternions à coordonnées entières, *i.e.* dans $H(\mathbf{Z}) = \{x + yi + zj + tk | x, y, z \in \mathbf{Z}\}$. Si p est premier, il y a $8(p+1)$ quaternions entiers de norme p . Lorsque $p \equiv 1$ (mod4), il est facile de voir par action du groupe des 8 unités de $H(\mathbf{Z})$ qu'il existe $p+1$ de ces quaternions tels que x est > 0, et impair, y, z, t sont pairs, qui se regroupent par paires conjuguées, on désigne par Σ_p l'ensemble de ceux-ci.

$$\Sigma_p = \{\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \ldots, \alpha_l, \bar{\alpha}_l\} \text{ avec } l = p + 1 .$$

Les rotations associées sont 2 à 2 distinctes, on note :

$$S_p = \{\rho_{\alpha_1}, \rho_{\bar{\alpha}_1}, \ldots, \rho_{\alpha_l}, \rho_{\bar{\alpha}_l}\} ,$$

et Γ_p le sous-groupe de $SO(3)$ engendré par S_p . Par exemple :

$$\Sigma_5 = \{1 \pm 2i, 1 \pm 2j, 1 \pm 2k\}$$

et S_5 est l'ensemble des rotations d'angle $\pm\alpha$ autour de Oy, Oz et Ot avec :

$$\cos\alpha = -\frac{3}{5} .$$

Par la suite, on notera encore, pour $n \in \mathbf{N}$:

$$\Sigma_n = \{q \in H(\mathbf{Z}) | q \equiv 1 \bmod 2, x(q) > 0 \ , \ N(q) = n\}$$

et on notera :

$$T_n f(\zeta) = \sum_{q \in \Sigma_n} f(\rho_q \zeta)$$

l'opérateur de Hecke associé. Si $p \equiv 1 \bmod 4$, $T_{S_p} = T_p$.

LEMME (arithmétique de $H(\mathbf{Z})$). — *Soient p, q deux nombres premiers $p, q \equiv 1 \bmod 4$, alors*

(i) L'application $(q_1, q_2) \mapsto \varepsilon q_1 q_2$ (ε unité telle que $\varepsilon q_1 q_2 \in \Sigma_{pq}$) de $\Sigma_p \times \Sigma_q$ dans Σ_{pq} est une bijection;

(ii) Tout élément $r \in \Sigma_{p^k}$ s'écrit de façon unique $r = \varepsilon p^l R_m(\alpha_1, \ldots, \bar{\alpha}_l)$, avec $\{\alpha_1, \ldots, \bar{\alpha}_l\} = \Sigma_p$, R_m est un mot réduit (sans succession de $\alpha_i\bar{\alpha}_i$ ou $\bar{\alpha}_i\alpha_i$) de longueur m , avec $2m + l = k$.

COROLLAIRE 1. — *Γ_p est un groupe libre, admettant S_p comme système libre de générateurs.*

COROLLAIRE 2. — *Soit A l'ensemble des entiers dont tous les diviseurs sont congrus à 1 modulo 4, alors les* T_n $(n \in A)$ *commutent entre eux et pour p premier, on a :*

$$T_{p^k} = l_k(T_p) \ , \ \textit{avec } l_k \textit{ le polynôme de degré } k$$

défini par $l_k(2\sqrt{p}\cos\theta) = 2p^{k/2}(\sin(k+1)\theta/\sin\theta)$.

Remarque. — Pour cette arithmétique, consulter par exemple [HW], pp. 303-310, mais prendre garde que les quaternions entiers de cette référence sont les éléments de $H'(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}\rho \oplus \mathbf{Z}i \oplus \mathbf{Z}j \oplus \mathbf{Z}_k$ avec $\rho = \frac{1}{2}(1+i+j+k)$. Cet anneau est facile à utiliser, car il est euclidien. On obtient les résultats précédents à partir de là, car tout élément de $H'(\mathbf{Z})$ est à une unité près équivalent à un élément de $H(\mathbf{Z})$.

7. Preuve du théorème B

Soit u un polynôme homogène harmonique de degré m sur E , espace des quaternions purement imaginaires, on introduit, pour chaque ζ de la sphère unité S^2 de E , la fonction de variable complexe :

$$\theta(z) = \sum_{\alpha \equiv 2 \bmod 4} u(\alpha\zeta\bar{\alpha}) \exp\left(2\pi i N(\alpha) z/16\right) \ ,$$

où la somme est prise sur les quaternions entiers $\alpha \equiv 2 \bmod 4$.

On a alors le :

LEMME. — *θ est une forme modulaire parabolique de poids $2+2m$ pour le groupe de congruence $\Gamma(4) \subset PSL(2;\mathbf{Z})$.*

Preuve. — —On utilise un résultat dû à Schoenberg (voir [OG]). Pour appliquer ce résultat, il suffit de savoir que $\alpha \mapsto u(\alpha\zeta\bar{\alpha})$ est un polynôme homogène harmonique de degré $2m$ sur H , ce qui n'est pas difficile à vérifier; par exemple pour un argument de représentation de groupe : le groupe $S^3 = SU(2)$ agit naturellement sur H_m (harmoniques sphérique de degré m) et la représentation est irréductible. La multiplication des quaternions induit une action de $S^3 \subset H$ sur les polynômes homogènes de degré $2m$ sur H et l'application

$$v(z) \mapsto v(\alpha\zeta\bar{\alpha})$$

est équivariante pour les actions; il suffit donc de vérifier le résultat pour une seule harmonique de H_m , par exemple $(y+iz)^m$, ce qui est facile.

Soit maintenant u une fonction propre de T_p , $u \in H_m$ $(m \neq 0)$, on peut écrire :

$$T_p u = 2\sqrt{p}\cos\theta \ u \ ,$$

avec $\theta \in \mathbf{C}$ bien choisi. Il nous suffit alors de montrer que θ est réel et donc que les valeurs propres de $T_p \restriction H_m$ $(m \neq 0)$ sont situées dans l'intervalle $[-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}]$.

On a, d'après le §6,

$$T_{p^k} u = p^{k/2}(\sin(k+1)\theta/\sin\theta) u \ .$$

Développons θ en série de Fourier, il vient :

$$\theta(z) = \sum_{\nu \in 4\mathbf{N}} a_\nu e^{2\pi i \nu z/16} \ ,$$

avec

$$a_\nu = 2\nu^m (T_{\nu/4} u)(\zeta) .$$

Soit

$$a_{4p^k} = 4^{m+1} \cdot p^{(m+\frac{1}{2})k} \big(\sin(k+1)\theta / \sin\theta) u(\zeta) .$$

D'après les résultats de Deligne (preuve des conjectures de Weil [D]), il vient

$$a_\nu = O_\varepsilon(\nu^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon}) ,$$

ce qui n'est possible pour $\nu = 4p^{k'}$ que si θ est réel, lorsque ζ est tel que $u(\zeta) \neq 0$.

8. Preuve du théorème C

Soit S_p^N l'ensemble des éléments de Γ_p qui s'écrivent comme mots de longueur $\leqslant N$ par rapport aux $p+1$ générateurs de $S_p = S_p^1 \backslash \mathrm{Id}$. Désignons par n le cardinal de S_p^N , *i.e.* :

$$n = (p^{N+1} + p^N - 2)/(p-1) ,$$

et par $T_{p,N}$ l'opérateur de Hecke sur $L^2(S^2)$ associé à S_p^N . Il est clair que $T_{p,N}$ est un polynôme de T_p :

$$T_{p,N} = R_N(T_p) ,$$

avec :

$$R_N(2\sqrt{p}\cos\theta) = p^{N/2}\big(\sin(N+1)\theta + (1/\sqrt{p}) \sin(N\theta)\big) / \sin\theta .$$

Le théorème B assure que les valeurs propres de T_p correspondent à des valeurs réelles de θ, et donc :

$$|||T_{p,N}||| \leqslant 2Np^{N/2} = 0(\sqrt{n}\,\mathrm{Log}\, n) ,$$

on en déduit :

$$\delta_{S_p^N} = 0(\mathrm{Log}\, n/\sqrt{n}) .$$

9. Problèmes

Dans [LPS3] et [LPS4], les mêmes auteurs appliquent des méthodes du même type pour construire des graphes explicites de degré $q+1$ ayant un λ_1 le plus grand possible relativement au nombre de sommets.

Je mentionne ici en conclusion quelques problèmes d'analyse harmonique sur S^2 reliés aux T_p .

Les T_p , ($p \equiv 1 \bmod 4$) commutent entre eux. On met ainsi en évidence une base orthonormée spéciale des harmoniques sphériques : les $W_{n,j}$ ($n = 0, 1, \ldots$; $1 \leqslant j \leqslant 2n+1$). Quelles sont leurs propriétés ?

a) Du point de vue du développement d'une fonction arbitraire en série de Fourier ?

b) A-t-on $\|W_{n,j}\|_{L^\infty} \leqslant$ constante ?

c) A-t-on des propriétés d'ergodicité analogue à celles de [CV2], c'est à dire, si $\mu_{j,n} = |W_{n,j}|^2 \sigma_0$, est-ce-que les $\mu_{j,n}$ convergent vers σ_0 lorsque $n \to \infty$?

Il est en effet vraisemblable que pour beaucoup de problèmes la base $(W_{n,j})$, ne privilégiant plus une des directions des axes de $\mathbf{R}^3$, a de meilleures propriétés que la base usuelle des $(Y_{l,n})$.

10. Bibliographie

[BGM] BERGER M., GAUDUCHON P., MAZET E. — *Le spectre d'une variété riemannienne compacte*, LNM 194, Springer, 1974.

[C] CARTIER P. — *Harmonic analysis on trees*, Proc. Symp. Pure Math., **26** (1973), 419-424.

[CV1] COLIN DE VERDIÈRE Y. — *Minoration des sommes de valeurs propres d'un domaine et conjecture de Polya*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Chambéry- Grenoble, **3** (1984-1985), VI1-VI11.

[CV2] COLIN DE VERDIÈRE Y.. — *Ergodicité et fonctions propres du laplacien*, Comm. Math. Phys., **102** (1985), 497-502.

[D] DELIGNE P. — *La conjecture de Weil I*, Publ. Math. IHES, **43** (1974), 273-307.

[DK] DODZIUK J. — *Difference equations, isoperimetric inequalities and transience of certain random walks*, Trans. AMS, **284** (1984), 787-794.

[GF] GREENLEAF. — *Invariant means on topological groups*, Van Nostrand, 1969.

[GV] GROMOV M. — *Structures métriques pour les variétés riemanniennes, rédigé par Lafontaine et Pansu*, Cedic-Nathan, 1980.

[HW] HARDY G., WRIGHT E. — *An introduction to number theory*, Oxford U.P., 1962.

[K] KESTEN A. — *Symmetric random walks on groups*, Trans. AMS, **92** (1959), 336-354.

[LPS1] LUBOTZKY A., PHILLIPS R., SARNAK P. — *Hecke operators and distributing points on the sphere I*, CPAM, **39** (1987), 149-186.

[LPS2] LUBOTZKY A., PHILLIPS R., SARNAK P. — *Hecke operators and distributing points on the sphere II*, CPAM, **40** (1987), 401-420.

[LPS3] LUBOTZKY A., PHILLIPS R., SARNAK P. — *Explicit expanders and the Ramanujan conjectures* , Proc. 18^{th} ACM, Symp. of theory of computing, (1986), 204-246.

[LPS4] LUBOTZKY A., PHILLIPS R., SARNAK P. — *Ramanujan graphs* , Combinatorica, 1986.

[OG] OGG A. — *Modular forms and Dirichlet series*, Benjamin Inc. NY, 1969.

[SÖ] SZEGÖ G. — *Orthogonal polynomials*, AMS Coll. Publ., vol.XXIII, 1939.

– ◇ –

Institut Fourier
B.P.74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex
(France)

(13 décembre 1988)