Proceedings of the International Congress of Mathematicians
Berkeley, California, USA, 1986

Spectres de variétés riemanniennes et spectres de graphes

YVES COLIN DE VERDIÈRE

L'article de M. Kac "*Can one hear the shape of a drum?*" [**KC**] a été l'origine de nombreuses contributions au problème spectral inverse: déterminer certains invariants géométriques ou topologiques d'une variété riemannienne compacte à partir du spectre du laplacien. Moins d'attention a été portée au problème de savoir quelles sont les suites de valeurs propres possibles pour le laplacien d'une métrique riemannienne arbitraire sur une variété compacte donnée. D'autres problèmes du même type se posent avec la recherche d'ouverts bornés de $\mathbf{R}^d$ tels que le laplacien euclidien avec conditions de Dirichlet ou de Neumann admette un spectre donné; ou encore avec l'opérateur de Schrödinger avec champ électrique et (ou magnétique) sur une variété riemannienne compacte donnée. Ces problèmes semblent d'accès très difficile comme le montrent les contraintes imposées par l'existence de différents développements asymptotiques (formules de Minakshisundaram-Pleijel, formule de Poisson). Nous nous restreindrons ici à l'étude du problème plus élémentaire de réaliser une suite finie

$$s_N = \{\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N\}$$

comme suite des N premières valeurs propres avec multiplicité d'un opérateur à choisir dans une famille donnée d'opérateurs.

Indiquons quelques résultats typiques:

• Si X est une variété compacte de dimension ≥ 3 et s_N une suite arbitraire comme précédemment, il existe sur X des métriques riemanniennes telles que le laplacien admette cette suite comme suite des N premières valuers propres avec multiplicité. En particulier, il n'y a aucune restriction sur les multiplicités des valeurs propres.

• Si X est une surface compacte, la situation est moins simple, car on sait [**CG, BN**] que la multiplicité de la première valuer propre non nulle du laplacien est majorée en fonction de la topologie de X. Les résultats obtenus montrent que cela semble être la seule contrainte; par exemple, toute suite $\{\lambda_1 = 0 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N\}$ est la suite des N premières valeurs propres du laplacien pour une métrique bien choisie sur n'importe quelle surface.

• Pour ce qui est des laplaciens euclidiens dans les ouverts de $\mathbf{R}^d$, la situation est différente suivant le type de conditions aux limites:

Pour le problème de Dirichlet, les inégalités de Payne, Polya, et Weinberger [**P-P-W**] (et aussi [**PR**]) imposent des restrictions d'un autre type que la multiplicité: par exemple, pour tout ouvert borné de $\mathbf{R}^d$, les valeurs propres du problème de Dirichlet vérifient, pour tout n, $\lambda_{n+1} \leq 3\lambda_n$.

Pour le problème de Neumann, les seules restrictions sont de multiplicités: par example, pour toute suite

$$\{\lambda_1 = 0 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N\},$$

il existe un ouvert lisse simplement connexe de $\mathbf{R}^2$ ayant cette suite comme suite des N premières valeurs propres du problème de Neumann.

Quelques indications sur les méthodes utilisées: comme les familles d'opérateurs étudiées ne sont pas normalisées (i.e. sont invariantes par homothétie), il suffit de trouver un opérateur ayant la suite

$$\varepsilon s_N = \{0 = \lambda_1 < \varepsilon\lambda_2 \leq \cdots \leq \varepsilon\lambda_N\}$$

comme suite des N premières valeurs propres. On cherche à évaluer les petites valeurs propres d'un laplacien par *effet tunnel purement géométrique* (i.e. sans barrière de potentiel); cette évaluation met en jeu une *matrice dite d'interaction* qui peut s'interpréter géométriquement comme un *laplacien combinatoire* (avec poids) sur un graphe qui est le graphe d'adjacence d'un découpage de la variété en régions séparées par des passages étroits (tunnels!!). La matrice d'interaction est utilisée depuis longtemps en chimie pour l'étude de l'opérateur de Schrödinger gouvernant les électrons dans une molécule (méthode L.C.A.O.) et une étude mathématique très complète a été proposée récemment par Helffer-Sjöstrand [**H-S**].

Cette évaluation par perturbation d'un laplacien combinatoire ne permettrait pas a priori de réaliser exactement le spectre voulu: en effet, dans le cas d'une valeur propre multiple, par exemple, la perturbation entraîne une dispersion du paquet de valeurs propres, c'est ici qu'intervient une idée fondamentale: utiliser la transversalité et travailler uniformément avec des hamiltoniens dépendant d'un paramètre variant dans une boule de $\mathbf{R}^\nu$: V. Arnold a montré [**AD**] que dans une famille de matrices symétriques à coefficients réels l'apparition de valeurs propres multiples peut être stable. Pour mettre en oeuvre cette idée, on introduit une notion de *stabilité* d'une famille finie de valeurs propres pour un hamiltonien d'une famille à paramètres. Tous les spectres construits auront cette propriété, en particulier les exemples trouvés pourront avoir un caractère générique (pas d'isométries, etc.) et on pourra lisser les exemples non lisses.

Dans cette présentation, nous nous restreindrons à quelques points essentiels: éconcés précis des résultats, définitions relatives à la stabilité et à la matrice d'interaction, laplaciens combinatoires et exemples, étude de l'effet tunnel géométrique en dimension 2, méthodes de perturbations singulières.

1. Énoncés des résultats. Pour énoncer les résultats, il sera pratique d'introduire quelques notations: soit $\mathcal{F}$ une famille (ensemble) d'opérateurs autoadjoints ≥ 0, à résolvante compacte et ayant 0 comme valeur propre simple. Nous introduisons les propriétés suivantes de $\mathcal{F}$:

DÉFINITIONS. (i) *On dira que $\mathcal{F}$ vérifie (A_N) si, pour toute suite $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$, il existe H dans $\mathcal{F}$ ayant cette suite comme suite des N premières valeurs propres.*

(ii) *On dira que $\mathcal{F}$ vérifie (B_N) si on a le même énoncé pour toute suite $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \cdots < \lambda_N$.*

(iii) *On dira que $\mathcal{F}$ vérifie (C_N) si pour toute suite $\mu_1 = 0 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_N$, il existe H dans $\mathcal{F}$ et $b \geq 0$ tels que $\mu_1 + b \leq \mu_2 + b \leq \cdots \leq \mu_N + b$ soit un intervalle du spectre de H.*

Il est clair que la propriété (A_N) implique (B_N) et (C_N). Si X est une variété compacte, nous noterons $\mathcal{F}_X$ la famille des laplaciens associés à une métrique riemannienne C^∞ sur X. Pour $d \geq 2$, nous noterons $\mathcal{G}_d$ la famille des laplaciens avec conditions de Neumann sur un ouvert borné, C^1 par morceaux de $\mathbf{R}^d$.

Nous avons alors les

THÉORÈME 1. *Si X est de dimension ≥ 3, $\mathcal{F}_X$ vérifie (A_N) pour tout N.*

En général posons $N(X) = \sup\{N | \mathcal{F}_X \text{ vérifie } (A_N)\}$.

THÉORÈME 2. *Si X est de dimension 2, $\mathcal{F}_X$ vérifie (B_N) et (C_N) pour tout N. On a $N(S^2) = 4$, $N(T^2) = 7$, $N(\mathbf{R}P^2) = 6$, $N(K^2) = 6$ et si X_g est la surface orientable de genre g, $g \geq 2$,*

$$\max\left(7, E\left(3/2 + \sqrt{2g + 1/4}\right)\right) \leq N(X_g) \leq 4g + 4.$$

THÉORÈME 3. *$\mathcal{G}_d$ vérifie (A_N) pour toute N si $d \geq 3$. $\mathcal{G}_2$ vérifie (A_N) si et seulement si $N \leq 4$. $\mathcal{G}_2$ vérifie (B_N) pour tout N.*

REMARQUE. Soit, pour une variété compacte X (avec ou sans bord), $C(X)$ le nombre chromatique de X défini comme le plus grand entier N tels qu'il existe un plongement du graphe complet à N sommets dans X; alors dans tous les cas où l'on connaît $N(X)$ on a $N(X) = C(X)$ et les inégalités connues sont compatible avec les

CONJECTURE 1. *Pour toute variété compacte X, on a $N(X) = C(X)$.*

CONJECTURE 2. *Pour toute variété compacte X, la multiplicité maximale de la première valeur propre non nulle du laplacien d'une métrique riemannienne sur X est $C(X) - 1$.*

On rappelle [**RL**] que $C(X_g) = E(7/2 + \sqrt{12g + 1/4})$.

REMARQUE. Dans le cas de la bouteille de Klein K^2 la multiplicité maximale de λ_2 pour une métrique plate est 3. La multiplicité 5 est obtenue pour une métrique qui fait de K^2 un espace métrique proche de $\mathbf{R}P^2$ avec sa métrique usuelle (pour la distance de Hausdorff).

2. Stabilité des valeurs propres; matrice d'interaction. Introduisons d'abord une *notation*: si q est une forme quadratique de domaine D dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et si E_0 et E sont 2 sous-espaces vectoriels de même dimension finie N de D, on notera q_E la restriction de q à E, et si E est assez proche de E_0 pour être le graphe d'une application B de E_0 dans $E_0^\perp$, on pose, pour $x \in E_0$, $\mathcal{B}x = x \oplus Bx$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(E_0, E)$ et q_{E/E_0} la forme quadratique sur E_0 transportée de q_E par l'isométrie U de E_0 sur E définie par $U = \mathcal{B} \circ (\mathcal{B}^* \mathcal{B})^{-1/2}$. L'important est que q_{E/E_0} a sur $(E_0, \langle\ ,\ \rangle)$ les mêmes valeurs propres que q_E sur $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.

Soit maintenant $(H_a)_{a \in A}$ (où A est une variété) une famille d'opérateurs autoadjoints sur un même espace de Hilbert réel $\mathcal{H}$, de même domaine D, tous ≥ 0, à résolvante compacte et dépendant continûment de a au sense que $a \mapsto (Id + H_a)^{-1}$ est continu de A dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, D)$ pour la norme. Si λ est une valeur propre de H_{a_0} de multiplicité N et E_λ^0 l'espace propre, H_a admet pour a voisin de a_0 des valeurs propres proches de λ dont la somme des multiplicités est N, on note E^a la somme des espaces propres associés et on pose $q_\lambda^a = q^a_{E^a/E_\lambda^0}$, où q^a est la forme quadratique sur $\mathcal{H}$ associée à H_a. On note $Q(E)$ l'espace vectoriel des formes quadratiques réelles sur un epsace E. On pose la

DÉFINITION. *Si $\{\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m\}$ est une partie finie du spectre de H, elle est dite **stable** dans la famille $(H_a)_{a \in A}$ si l'application $\Phi: a \mapsto q^a_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus q^a_{\lambda_m}$ définie sur un voisinage contractible V de a_0 à valeurs dans $Q(E^0_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus Q(E^0_{\lambda_m}) = \mathcal{E}$ (de dimensional l) est une submersion topologique au sens que*:

$$\Phi_*: H_{l-1}(V \setminus \Phi^{-1}(e_0); \mathbf{Z}) \to H_{l-1}(\mathcal{E} \setminus \{e_0\}; \mathbf{Z}) \approx \mathbf{Z}$$

est surjective, où $e_0 = \Phi(a_0)$.

Cette notion est essentielle pour notre problème, car la stabilité a la conséquence suivante: si $\Phi_\varepsilon: V \to \mathcal{E}$ converge uniformément vers Φ, alors pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, Φ_ε est stable et donc $e_0 \in \mathrm{Im}(\Phi_\varepsilon)$.

On a en particulier les.

EXEMPLE 1. Soit sur S^2 la famille des laplaciens associés à des métriques conformes à la métrique canonique g_0, alors pour tout $l \geq 1$ la valeur propre $l(l+1)$ associée à l'espace des harmoniques sphériques de dimension $2l+1$ est stable.

EXEMPLE 2. Sur un tore plat $\mathbf{R}^2/\Gamma$ toute valeur propre > 0 de multiplicité ≤ 6 est stable dans la famille de tous les laplaciens riemanniens.

Introduisons maintenant la *matrice d'interaction*: soit H un opérateur autoadjoint ≥ 0 sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_0$, associé à une forme quadratique fermée q. On note $\mathcal{H}_1 = D(q)$ et $\mathcal{H}_{-1}$ le dual de $\mathcal{H}_1$ avec les identifications usuelles $\mathcal{H}_1 \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{H}_0 \overset{j^*}{\hookrightarrow} \mathcal{H}_{-1}$ et $|x|_1^2 = |x|_0^2 + q(x)$, $|\cdot|_{-1}$ la norme duale. On fait les *hypothèses suivantes*:

$(\mathbf{H}_1)$ Les N premières valeurs propres de H vérifient $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N < 1$ et si E désigne la somme des espaces propres associés, $H\restriction_{E^\perp} \geq \mathrm{Id}$.

$(\mathbf{H}_2)$ Il existe $E_0 \subset \mathcal{H}_1$ de dimension N tel que: $\forall \varphi \in E_0$, $|H\varphi|_{-1} \leq \varepsilon |\varphi|_1$.

On a alors le

LEMME (DES PETITES VALEURS PROPRES). *Sous les hypothèses* ($\mathbf{H}_1$) *et* ($\mathbf{H}_2$), *lorsque* ε *est petit,* E *et* E_0 *sont proches et* q_E *et* q_{E_0} *sont proches au sens précis suivant: il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *et* $C > 0$ *ne dépendant que de* N *tels que si* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, *on a*:

(a) *si* $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_N$ *sont les valeurs propres de* q_{E_0},

$$\mu_i - C\varepsilon^2 \leq \lambda_i \leq \mu_i \qquad (\forall i,\ 1 \leq i \leq N).$$

(b) $\|q_{E/E_0} - q_{E_0}\| \leq C\varepsilon^{1+1/N}$.

Sous les hypothèses $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$, l'espace E_0 muni de la forme quadratique q_{E_0} est donc une excellente approximation de (E, q_E): on désigne alors la matrice de q_{E_0} dans $(E_0, \langle\ \rangle)$ sous le nom de *matrice d'interaction*; cette matrice permet grâce au lemme précédent de déterminer le comportement asymptotique précis des petites valeurs propres de H.

3. Spectre de graphes. Soit Γ un graphe (fini pour simplifier l'exposé), non orienté. On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des sommets et part $\mathcal{A}$ l'ensemble des arêtes. Soit $(V_i)_{i\in\mathcal{S}}$ une suite de nombres > 0 et μ la mesure sur S définie par $\mu = \sum_{i\in\mathcal{S}} V_i\delta(i)$. Sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathcal{S}, \mu)$, on introduit une forme quadratique q de la forme $q((x_i)) = \sum_{a\in\mathcal{A}} c_a|d_a x|^2$ où les c_a sont des coefficients > 0 et $d_{\{i,j\}}x = x_i - x_j$. A ces données est associé un *laplacien combinatoire* qui s'écrit

$$(\Delta x)_i = \frac{1}{V_i}\sum\nolimits^i c_a d_a x,$$

où $\sum^i$ est la somme sur les arêtes $a = \{i,j\}$ de sommet i.

EXEMPLE 1 (GRAPHES EN ÉTOILES). $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, N\}$ et $\mathcal{A} = \{\{0,i\} | i \geq 1\}$. Désignons par E_N ce graphe, on a la

PROPOSITION. *Soit* $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_{N+1}$ *donnés, il existe des* $c_i > 0$ $(i \geq 1)$ *et des* $v_i > 0$ $(i \geq 1)$ *tels que le laplacien associé à* $\mu = \delta(0) + \sum_{i=1}^N v_i\delta(i)$ *et à la forme quadratique* $\sum_{i=1}^N c_i(x_0 - x_i)^2$ *admette ces valeurs propres. De plus la partie* $\{\lambda_2, \ldots, \lambda_{N+1}\}$ *de ce spectre est stable relativement aux variations des* v_i *et* c_i.

EXEMPLE 2 (GRAPHES COMPLETS). On désigne ainsi par C_N le graphe à N sommets tel qu'il existe une arête joignant chaque couple de sommets disjoints.

On a la

PROPOSITION. *Soit* $v_i > 0$ $(1 \leq i \leq N)$ *donnés, pour tout spectre* $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$ *il existe des* $c_{ij} > 0$ $(i \neq j)$ *tels que ce spectre soit celui associé à mesure* $\sum_{i=1}^N v_i\delta(i)$ *et à la forme quadratique* $\sum_{1\leq i<j\leq N} c_{ij}(x_i - x_j)^2$. *De plus, la partie non nulle de ce spectre est stable relativement aux variations des* c_{ij}.

La preuve utilise une récurrence sur N et la notion de graphe suspendu $S\Gamma$ d'un graphe Γ: le graphe suspendu est obtenu en ajoutant un sommet que l'on joint par une arête à tous les sommets de Γ. On peut aussi définir une forme

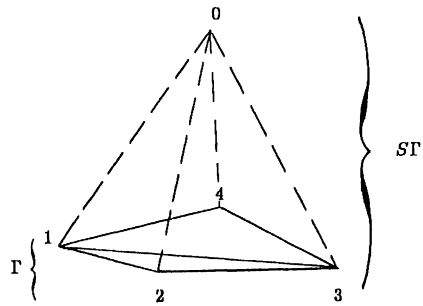

FIGURE 1

quadratique suspendue Sq convenable dont on peut calculer le spectre à partir de celui de q (Figure 1).

4. Effet tunnel géométrique. L'*effet tunnel* s'introduit naturellemment dans létude de la limite semiclassique ($\hbar \to 0^+$) de l'opérateur de Schrödinger $-\hbar^2\Delta + V$ avec des puits de potentiel. La particule quantique a une probabilité très faible, de l'ordre de $\exp(-c/\hbar)$ de traverser les régions classiquement interdites où $V(x) >$ Energie. On peut cependant déterminer avec précision cet effet et appliquer les résultats au splitting des valeurs propres pour les puits symétriques, c'est ce qui est fait dans le travail remarquable [**H-S**].

Dans un contexte purement géométrique, les barrières de potentiel sont remplacées par des parties étroites de la variété que l'on peut voir comme de *véritables tunnels*! L'espace E_0 sur lequel est calculé la matrice d'interaction est constitué de fonctions de l'espace de Sobolev H^1, constantes sur les parties larges et harmoniques dans les tunnels.

Décrivons par exemple le cas des *surfaces sans bord*, également déjà entrevu dans [**CS**]. On considère une surface riemannienne X partagée en domaines $(X_i)_{1\leq i\leq N}$ dont les bords communs sont des géodésiques périodiques de petites longueurs. On associe à ce découpage le graphe Γ d'adjacence de la famille des X_i (Figure 2).

Les arêtes sont donc en bijection avec les géodésiques périodiques précédentes: $\gamma_a = X_i \cap X_j$ pour $a = \{i,j\}$. Soit l_a la longueuer de γ_a. On suppose en outre, ce qui est une hypothèse naturelle lorsque la courbure est constante $\equiv -1$, qu'il existe des voisinages tubulaires Z_a de γ_a de grande largeur $\alpha(a)$ tel que $l_a \cdot ch\alpha(a) = L > 0$ (L fixée) et la métrique g de X induit sur Z_a la métrique à courbure -1: $l_a^2 ch^2 x \cdot d\theta^2 + dx^2$ avec $(x,\theta) \in [-\alpha(a), \alpha(a)] \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Soit $\hat{X}_i = X_i \setminus \bigcup_a Z_a$ et E_0 l'espace des fonctions $f \in H^1(X)$ telles que $f\restriction_{\hat{X}_i} = x_i$ et f est harmonique sur les Z_a. Alors, lorsque les $l_a \to 0^+$, sous l'hypothèse que la première valeur propre > 0 du problème de Neumann des X_i reste minorée par $c > 0$, on peut appliquer le lemme des petites valeurs propres à E_0. Pour

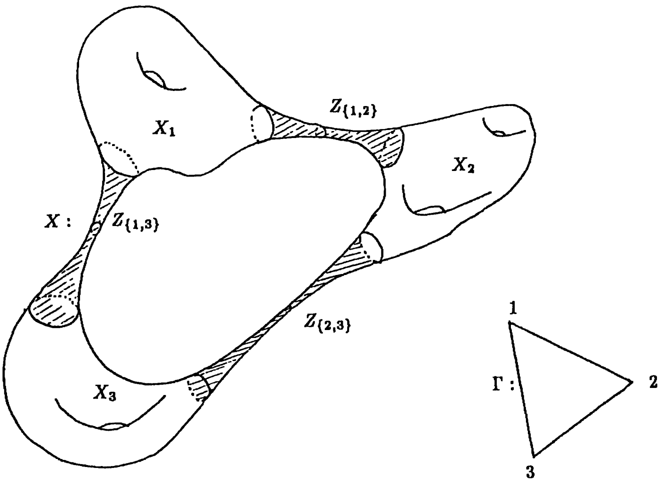

FIGURE 2

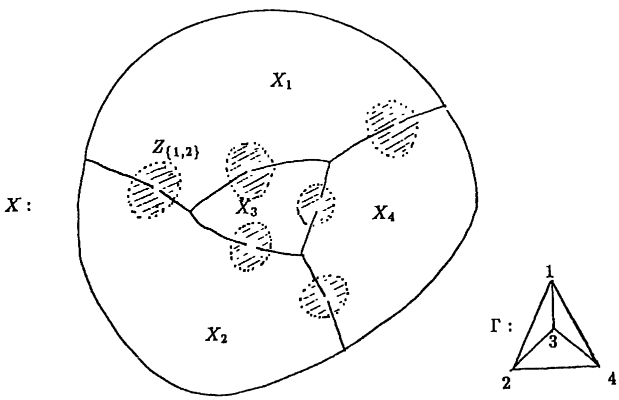

FIGURE 3

$f \in E_0$, on a:

$$\int_X |f|^2 \sim \sum_{i=1}^{N} V_i x_i^2, \quad \text{avec } V_i = \mathrm{vol}(X_i),$$

et

$$\int_X |df|^2 \sim \frac{1}{\pi} \sum_{a \in \mathcal{A}} l_a |d_a x|^2.$$

On reconnaît bien sûr un laplacien combinatoire associé au graphe Γ. Mentionnons en passant que la méthode s'applique aussi à l'évaluation des petites valeurs propres d'une surface d'aire infinie à courbure -1 ([**GL**] et aussi [**P-S**]).

On peut faire une construction voisine pour un ouvert euclidien X de $\mathbf{R}^2$, $X = \bigcup_{i=1}^{N} X_i$, où $X_i \cap X_j$ est lorsque $\{i,j\} \in \mathcal{A}$ un petit intervalle rectiligne de longueur $2\varepsilon_a$ (Figure 3).

Les Z_a sont alors des disques centrés au milieu de ces intervalles et de rayon $\rho > 0$ fixé lorsque les $\varepsilon_a \to 0^+$. La construction de E_0 est la même que pour les surfaces sans bord et l'évaluation donne:

$$\int_X |df|^2 \sim \frac{\pi}{2} \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{1}{|\mathrm{Log}(\varepsilon_a)|} |d_a x|^2.$$

5. Perturbations singulières. Pour prouver les autres énoncés (variétés de dimension ≥ 3, propriété (C_N) pour les surfaces), on procède par perturbations singulières. Il faut bien entendu dans chaque cas prouver des résultats plus forts que la seule convergence des valeurs propres afin de pouvoir utiliser les propriétés de stabilité: on doit avoir convergence uniforme de certaines formes quadratiques.

Cas des variétés de dimension ≥ 3. Pour munir une telle variété X d'une métrique telle que les N premières valeurs propres du laplacien soient la suite $s_N = \{\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N\}$ donnée, on commence par choisir une surface S de genre assez grand pour que $N(S) \geq N$. On choisit alors une métrique g_0 sur S ayant s_N comme suite des N premières valeurs propres du laplacien et de façon stable relativement à une famille de métriques $g \in K$ voisines de g_0. On plonge alors S dans X et on choisit pour chaque $g \in K$ (continûment pars rapport à g) une métrique G_g sur X telle que S admette un voisinage isométrique à $[-2a, +2a] \times S$ muni de la métrique $dt^2 + g$. Lorsque a est assez petit le domaine $D_a = [-a, +a] \times S$ admet pour la métrique G_{g_0} et le problème de Neumann, la suite s_N comme début du spectre et de façon stable dans K.

Il reste à construire une suite de métriques sur X dont le spectre converge vers celui de D_a. Une possibilité est la suivante (et $d \geq 3$ intervient aussi ici): soit $G_g^{n,\varepsilon}$ la métrique conforme à G_g donnée par $G_g^{n,\varepsilon} = \varphi_{n,\varepsilon} G_g$ où $\varphi_{n,\varepsilon} \in C^\infty(X; \mathbf{R})$,

$$\varphi_{n,\varepsilon} \equiv \varepsilon \,\mathrm{sur}\, X \setminus D_{a+(1/2n)}, \qquad \varphi_{n,\varepsilon} \equiv 1 \,\mathrm{sur}\, D_{a+(1/n)}$$

et $\varepsilon \leq \varphi_{\varepsilon,n} \leq 1$ partout. On peut construire une suite $G_g^{n(\varepsilon),\varepsilon}$ dont les valeurs propres convergent vers celle de (D_a, G_g).

Case des surfaces. Pour la sphère S^2 la propriétés (C_N) est conséquence immédiate de la stabilité des harmoniques sphériques: on choisit l tel que $2l+1 \geq N$ et on considère sur l'espace propre $\mathcal{H}_l$ une forme quadratique q_ε de valeurs propres

$$l(l+1) + \varepsilon\mu_1 \leq \cdots \leq l(l+1) + \varepsilon\mu_M < \cdots, \quad \text{pour } \varepsilon \text{ assezpetit},$$

il existe g proche de la métrique usuelle de S^2 dont les valeurs propres proches de $l(l+1)$ sont celles de q_ε. La métrique $\sqrt{\varepsilon} g$ permet de vérifier la propriété (C_N).

Pour obtenir la même propriété sur d'autres surfaces, on utilise l'adjonction de petites anses (orientables ou non) et les résultats de [**C-F**] et [**AE**]: soit S une surface riemannienne et $(x_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ une suite de points de S deux à deux distincts. On se donne des $l_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$ et on construit la surface S_ε en recollant à $S \setminus \bigcup_{i=1}^{2n} B(x_i, \varepsilon)$ des anses euclidiennes de longueur l_i et de rayon ε.

Lorsque $\varepsilon \to 0$, le spectre du laplacien sur S_ε (métrique C^1 par morceaux) converge vers la réunion du spectre de S et des spectres de Dirichlet des intervalles $[0, l_i]$.

RÉFÉRENCES

[**AD**] V. Arnold, *Modes and quasi-modes*, J. Funct. Anal. **6** (1972), 94–101.

[**AE**] C. Anné, *Spectre du laplacien et limites de variétés avec perte de dimension* I, (à paraître, 1985).

[**BN**] G. Besson, *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **30** (1980), 109–128.

[**BR**] M. Burger, *Estmations des petites valeurs propres du laplacien d'un revêtement de variétés riemanniennes compactes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **302** (1986), 191–194.

[**BS1**] R. Brooks, *The first eigenvalue in a tower of coverings*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **13** (1985), 137–140.

[**BS2**] ———, *The spectral geometry of a tower of coverings*, Preprint, 1985.

[**C-F**] I. Chavel et A. Feldmann, *Isoperimetric constants of manifolds with small handles*, Math. Z. **184** (1983), 435–448.

[**CS**] B. Colbois, *Petites valeurs propres du laplacien sur une surface de Riemann compacte et graphes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **301** (1985), 927–930.

[**CV**] Y. Colin de Verdière, *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien*, Comment. Math. Helv. **61** (1986), 254–270.

[**CG**] S. Cheng, *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv. **51** (1979), 43–45.

[**DK**] J. Dodziuk, *Difference equations, isoperimetric inequalities and transience of certain random walks*, Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), 787–794.

[**GL**] P. Gall, *Sur la première valeur propre des groupes de Hecke de covolume presque fini*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **302** (1986), 299–302.

[**H-S**] B. Helffer et J. Sjöstrand, *Puits multiples en semi-classique*. I, Comm. Partial Differential Equations **9** (1984), 337–408; II, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **42** (1985), 127–212; III, Math. Nachr. **127** (1985), 263–313; IV, Comm. Partial Differential Equations **10** (1985), 245–340; V, VI (à paraître).

[**KC**] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly **73** (1966), 1–23.

[**P-P-W**] L. Payne, G. Polya, et H. Weinberger, *On the ratio of consecutive eigenvalues*, J. Math. Phys. **35** (1956), 289–298.

[**PR**] M. Protter, *Can one hear the shape of a drum?*, Revisited, Preprint, Berkeley, 1985.

[**P-S**] T. Pignatoro et D. Sullivan, *Ground state and lowest eigenvalue of the Laplacian for non-compact hyperbolic surfaces*, Comm. Math. Phys. **104** (1986), 529–535.

[**RA**] R. Rammal, *Spectrum of harmonic excitations on fractals*, J. Physique **45** (1984), 191–206.

[**RL**] G. Ringel, *Map color theorem*, Springer, 1974.

INSTITUT FOURIER, 38402 SAINT MARTIN D'HÈRES CEDEX, FRANCE