C. R. Acad. Sc. Paris, t. 293 (26 octobre 1981) Série I — 361

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Une nouvelle démonstration du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein*. Note (*) de **Yves Colin de Verdière,** transmise par Bernard Malgrange.

Nous donnons une nouvelle démonstration du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein-Maass basée sur la méromorphie de la résolvante d'un opérateur autoadjoint auxiliaire Δ_a.

We give a new proof of the analytic continuation of the Eisenstein-Maass series based on the meromorphic behaviour of the resolvant of an auxiliary self adjoint operator Δ_a.

Dans son article ([5], p. 119 et suivantes), Venkov mentionne l'existence de plusieurs démonstration (dues à Selberg, Faddeev, Lax-Phillips) du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein-Maass. Nous donnons ici une nouvelle démonstration qui nous semble plus conceptuelle et moins difficile de ce prolongement : elle est basée sur la méromorphie de la résolvante d'un opérateur autoadjoint auxiliaire Δ_a, qui est à résolvante compacte. L'opérateur Δ_a a été introduit dans un but différent par Lax-Phillips ([2], p. 206 et suivantes).

Nous nous plaçons pour simplifier dans le cas d'une surface de Riemann X (non compacte, mais lisse) avec une seule pointe (l'extension à des dimensions plus grandes ou au cas de plusieurs pointes ne présente pas de difficultés). Nous supposons donc que $X = X_0 \cup X_1$ où X_0 est compacte et $X_1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [b, +\infty[$ est équipée des coordonnées locales (x mod 1, y) et de la métrique hyperbolique $(dx^2+dy^2)/y^2$.

1. « Définition » des séries d'Eisenstein. — On note Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur X; dans la suite Δ signifiera toujours l'opérateur différentiel au sens des distributions sur X.

On sait que l'opérateur non borné (Δ, $C_0^\infty(X)$) admet une unique extension autoadjointe notée Δ_∞ dans l'espace de Hilbert $L^2(X)$ dont le domaine est :

$$H^2(X) = \{ f \in L^2(X) \mid \Delta f \in L^2(X) \}.$$

Soit :

$$\Omega = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad s(1-s) \notin \operatorname{Sp}(\Delta_\infty) \right\};$$

la positivité de Δ_∞ implique que $\Omega \supset \{ s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1/2 \text{ et } s \notin [1/2, 1] \}$. Soit $h \in C^\infty([b, +\infty[)$ une fonction nulle au voisinage de b est égale à 1 sur $[b', +\infty[$ $(b' > b)$, on pose :

$$H(z, s) = (\Delta - s(1-s))(h(y) y^s),$$

où la fonction $h(y) y^s$ est prolongée par 0 sur X_0; on note que $H(., s) \in C_0^\infty(X)$ et dépend holomorphiquement de s. Soit alors :

$$E(z, s) = h(y) y^s + (s(1-s) - \Delta_\infty)^{-1} (H(z, s)).$$

Proposition. — *Pour* $s \in \Omega$, $E(., s)$ *est l'unique solution de* $(\Delta - s(1-s)) E(., s) = 0$ *telle que* $E(z, s) - h(y) y^s \in L^2(X)$.

L'unicité résulte de ce que si $s \in \Omega$, $s(1-s) \notin \operatorname{Sp}(\Delta_\infty)$. En fait, si $X = \Gamma \backslash H$ où H est le 1/2 plan de Poincaré et Γ un sous-groupe de type fini dont les seuls éléments paraboliques forment le groupe $\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$, on définit habituellement E par la série d'Eisenstein, convergente pour $\mathrm{Re}(s)>1$: $E(z, s)=\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}[\mathrm{Im}(\gamma z)]^s$. Dans la situation où nous nous sommes placés, nous dirons aussi que $E(., s)$ $(s\in\Omega)$ est la série d'Eisenstein (de paramètre s).

2. Les opérateurs Δ_a. — Soit maintenant $b<b'<a<+\infty$ et $\pi : X_1 \to [b, +\infty[$ la projection canonique. Pour $f\in\mathcal{D}'(X)$, posons $f_0=\pi_*(f)\in\mathcal{D}'(]b, +\infty[)$, c'est le 0-ième coefficient de Fourier de f. Soit alors :

$$\mathcal{H}_a=\{ f\in L^2(X) \mid f_0 \mid_{]a, +\infty[}=0\}$$

et :

$$D_a=\mathcal{H}_a\cap H^1(X)\left(H^1(X)=\left\{ f\in L^2 \,\middle|\, \int_X |df|^2<+\infty\right\}\right).$$

On définit Δ_a comme étant l'opérateur autoadjoint associé par le procédé de Friedrichs à la forme quadratique fermée q_a de domaine D_a, définie par $q_a(f)=\int |df|^2$; Δ_a est un opérateur autoadjoint positif sur $\mathcal{H}_a$ qu'on peut caractériser ainsi : le domaine de Δ_a est l'ensemble des f de D_a telles que :

$$\Delta f=g+CT_a \qquad \text{où} \quad g\in L^2(X) \quad \text{et} \quad T_a\in\mathcal{D}'(X)$$

est définie par $T_a(\psi)=\psi_0(a)$; pour une telle f, on a $\Delta_a f=g$.

Il est élémentaire ([2], p. 206-207) que Δ_a est à résolvante compacte : cela résulte de la compacité de l'injection de D_a dans $L^2(X)$; donc la résolvante $(s(1-s)-\Delta_a)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_a)$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

3. Le prolongement méromorphe. — On pose

$$K(z, s)=h(y)y^s+(s(1-s)-\Delta_a)^{-1}(H(z,s)).$$

Comme $H(., s)\in\mathcal{H}_a'$, on voit que $K(z, s)$ est méromorphe en s et vérifie $(\Delta-s(1-s))K(., s)|_{y\neq a}=0$. Le 0-ième coefficient de Fourier K_0 de K est une fonction continue de y, car $K-h(y)\,y^s$ est dans le domaine de Δ_a.

De plus, pour $y<a$, $K_0(z, s)=A(s)\,y^s+B(s)\,y^{1-s}$ où A, B sont méromorphes sur $\mathbb{C}$; pour $y>a$, $K_0(z, s)=y^s$. Soit :

$$G(z, s)=K(z, s)+\chi_{]a, \infty[}(y)(A(s)\,y^s+B(s)\,y^{1-s}-y^s).$$

Il est clair que $(\Delta-s(1-s))(G(., s))=0$, que $G_0(z, s)=A(s)\,y^s+B(s)\,y^{1-s}$, que $G-G_0\in L^2(X)$ et que $G(., s)\not\equiv 0$ (sinon K_0 ne serait pas continue).

On en déduit par la proposition établie au paragraphe 1 que pour $s\in\Omega$, $G(z, s)=A(s)\,E(z, s)$ et donc le prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ de $E(z, s)$. De plus, si $1-s\in\Omega$, on a $G(z, s)=B(s)\,E(z, 1-s)$, d'où l'on tire l'équation fonctionnelle $E(z, 1-s)=\varphi(s)\,E(z, s)$ avec $\varphi=A/B$ méromorphe et l'identité $\varphi(s)\,\varphi(1-s)=1$. De la relation $E_0(z, s)=y^s+\varphi(s)\,y^{1-s}$, on tire immédiatement $\varphi(\bar{s})=\overline{\varphi(s)}$ et donc si $\mathrm{Re}(s)=1/2\,(1-s=\bar{s})$, $|\varphi(s)|=1$: φ n'a pas de pôle sur $\mathrm{Re}(s)=1/2$. On utilise la relation de Maass-Selberg ([1], p. 20-21) qui permet de calculer $\| E(z, s)-\chi_{]a, \infty[}(y)\,E_0(z, s)\|_{L^2}$ en fonction de φ pour prouver que E n'admet pas non plus de pôles sur $\mathrm{Re}(s)=1/2$. Finalement, on obtient le :

THÉORÈME. — $E(z, s)$ *admet un prolongement méromorphe à* $\mathbb{C}$ *tout entier sans pôles sur* $\operatorname{Re}(s)=1/2$. *De plus, on a les équations fonctionnelles* $E(z, 1-s)=\varphi(s)E(z, s)$ *et* $\varphi(s)\varphi(1-s)=1$.

(Rappelons que dans le cas $X=SL_2(\mathbb{Z})\diagdown H$, un calcul de $E_0(z, s)$ montre que cette dernière relation n'est autre que l'équation fonctionnelle de la fonction ζ de Riemann.)

4. REMARQUE. — On peut à partir de la construction précédente obtenir de plusieurs façons les résultats sur la décomposition spectrale de Δ_α, menant à la célèbre formule des traces de Selberg.

Une première méthode est adaptée de Kubota [1] ou de Lax-Phillips [2].

Une seconde méthode est de considérer Δ_∞ comme limite des Δ_a lorsque $a \to +\infty$ et de s'inspirer de la méthode classique pour les opérateurs du second ordre sur un intervalle non borné de $\mathbb{R}$ [4].

(*) Remise le 12 octobre 1981.

[1] T. KUBOTA, *Elementary Theory of Eisenstein Series*, Kodansha, Tokyo, 1973.

[2] P. LAX-R. PHILLIPS, *Scattering Theory for Automorphic Functions* (*Annals of Math. Studies*, Princeton 1976).

[3] W. MÜLLER, *Spectral Theory of non Compact Riemannian Manifolds with Cusps and a Related Trace Formula*, Preprint, I.H.E.S., 1980.

[4] E. TITCHMARSCH, *Eigenfunctions Expansions Associated with Second Order Differential Equations I.*, Oxford, 1962.

[5] A. VENKOV, *Russian Math. Surveys*, 34, 1979, p. 79-153.

Laboratoire de Mathématiques pures, associé au C.N.R.S.,
Institut Fourier, B.P. n° 116, 38402 *Saint-Martin-d'Hères, Cedex.*