Math. Z. 171, 51–73 (1980)

Mathematische Zeitschrift

Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent

II. Le cas intégrable

Yves Colin de Verdiere

Laboratoire de Mathématiques Pures, Institut Fourier dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, B.P. 116, F-38402 St. Martin d'Heres, France

Dans cet article, nous poursuivons l'étude entreprise dans [8] du spectre conjoint de plusieurs opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. Soit X une *variété* C^∞ compacte de dimension d, on se donne sur X, *d opérateurs pseudo-différentiels* $P_1, \ldots, P_d$ d'ordre 1, autoadjoints par rapport à une densité dx, qui commutent, dont les symboles sous-principaux sont nuls et tels que $\sum_{j=1}^{d} P_j^2$ est elliptique. On veut étudier le *spectre conjoint* de ces opérateurs, non plus à l'aide de formules de traces comme dans [8], mais en utilisant les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld-Maslov [18, 9, 16] et [5]: en effet, si p_j désigne le symbole principal de P_j, les fonctions p_j forment un système maximal de fonctions en involution et la fibre générique de l'application $p=(p_1, \ldots, p_d)$: $T^*X\backslash 0 \to \mathbb{R}^d\backslash 0$ est un tore lagrangien. Malheureusement, l'application p est rarement une fibration localement triviale et on doit essayer de faire des hypothèses pas trop restrictives sur la nature des singularités du feuilletage lagrangien ainsi obtenu: l'hypothèse la plus simple que l'on semble amené à faire est que l'algèbre $\mathscr{A}$ des fonctions C^∞ homogènes des p_j admet des générateurs $(q_j)_{1 \leqq j \leqq d}$ dont les flots hamiltoniens sont 2π-périodiques: les fibres de p sont alors essentiellement les orbites de l'action symplectique d'un tore: une telle action est relativement facile à étudier, car il s'agit de l'action d'un groupe de Lie compact sur une variété et qu'on sait qu'une telle action se «linéarise». Une fois étudiée les hypothèses géométriques sur $\mathscr{A}$, ce qui est l'objet des deux premiers paragraphes, on s'attaque à l'étude du spectre. De façon parallèle à l'algèbre $\mathscr{A}$, on introduit l'algèbre $\hat{\mathscr{A}}$ des opérateurs de la forme $f(P_1, \ldots, P_d)$ où f est un symbole classique et on cherche les «bons» générateurs de $\hat{\mathscr{A}}$: s'inspirant des techniques de [27] et [7], on construit parmi les opérateurs de $\hat{\mathscr{A}}$ admettant q_j comme symboles principaux, des opérateurs de Q_j de $\hat{\mathscr{A}}$ tel que $\exp(2\pi i Q_j) = c_j \operatorname{Id}$ et donc $\operatorname{Spectre}(Q_1, \ldots, Q_d) \subset \mathbb{Z}^d + \{\mu\}$ où $\mu \in \mathbb{Z}^d/4$ est un certain indice de Maslov. On étudie alors le spectre joint des Q_j, on prouve que si $\Gamma = q(T^*X\backslash 0)$, Γ est un polyèdre conique «adapté» au réseau $\mathbb{Z}^d + \{\mu\}$: cela veut dire en particulier que les points du réseau ne sont pas sur le bord de Γ mais répartis également de part et d'autre de celui-ci. On prouve alors, qu'à un

0025-5874/80/0171/0051/$04.60

ensemble fini près spectre$(Q_1, \ldots, Q_d) = (\mathbb{Z}^d + \{\mu\}) \cap \Gamma$, tous les points du spectre (sauf peut être un nombre fini) ayant la multiplicité 1, cela permet d'introduire comme dans [7], un indice absolu associé à $\hat{\mathscr{A}}$,

$$i(\hat{\mathscr{A}}) = \text{«Cardinal}\,\{\mathbb{Z}^d + \{\mu\} \cap \Gamma\} - \text{Cardinal}\,\{\text{spectre}(Q_1, \ldots, Q_d)\}\text{»}.$$

La relation avec les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld-Maslov est alors très simple: si λ est un point de $\mathbb{Z}^d + \{\mu\} \cap \Gamma$, $q^{-1}(\lambda)$ est un tore lagrangien vérifiant les dites conditions de quantification: à un nombre fini près de points, on obtient ainsi une bijection entre le spectre joint des Q_i et l'ensemble des tores lagrangiens H_{q_j}-invariants satisfaisant les conditions de quantification. Cette étude du spectre se fait à l'aide de la forme normale du paragraphe 1, on utilise alors comme modèles des algèbres d'opérateurs construites à partir d'oscillateurs harmoniques: l'oscillateur harmonique standard sur $\mathbb{R}$, $H = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dt^2} + t^2\right)$ ayant le spectre remarquable $\frac{1}{2} + \mathbb{N}$.

Enfin, dans les deux derniers paragraphes, on étudie des applications des résultats ou des techniques étudiées au cas du spectre du laplacien sur une surface de révolution: on obtient alors une information très précise sur le spectre et sur la répartition asymptotique des valeurs propres. On applique enfin tout ceci à l'étude du spectre de l'équation de Schrödinger sur S^2 ce qui permet de préciser certains résultats de [12, 27, 7 et 8].

N.B.: Tous les opérateurs pseudo-différentiels et intégraux de Fourier seront supposés classiques, c'est-à-dire que leur symbole adment un développement asymptotique en composantes homogènes d'ordres entiers. Si X est muni d'une densité dx, le symbole sous-principal d'un opérateur pseudo-différentiel P est bien défini: c'est celui de l'opérateur $\tilde{P}$: $f(dx)^{\frac{1}{2}} \to P(f)(dx)^{\frac{1}{2}}$ qui opère sur les $\frac{1}{2}$ densités. On le note sub(P), le symbole principal d'un opérateur P étant noté p, etc.... On note H_q le gradient symplectique d'une fonction q sur une variété symplectique.

1. Forme normale pour des actions symplectiques de tores

Soit (Z, ω) une *variété symplectique* de dimension $2d$, $G = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^k$ un *tore;* on suppose qu'on s'est donné une *action symplectique* β de G sur Z. On veut étudier une forme normale pour cette action au voisinage de l'orbite d'un point z_0 de Z. Soit $Y = G \cdot z_0$ cette orbite qui est difféomorphe à un tore de dimension ℓ. Soit $Z_0 = T^*((\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^\ell \times \mathbb{R}^{d-\ell})$, $G_0 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$, on définit une action symplectique β_0 de G_0 sur Z_0 muni de la structure symplectique canonique de la façon suivante; identifiant $T^*(\mathbb{R}^{d-\ell})$ avec $\mathbb{C}^{d-\ell}$ de la façon usuelle, on note $(x_1, \ldots, x_\ell; \xi_1, \ldots, \xi_\ell; z_{\ell+1}, \ldots, z_d)$ un point de Z_0, $(\theta_1, \ldots, \theta_d)$ un point de G_0 et on définit β_0 par:

$$\beta_0((\theta_1, \ldots, \theta_d), (x_1, \ldots, z_d)) = (x_1 + \theta_1, \ldots, x_\ell + \theta_\ell; \xi_1, \ldots, \xi_\ell; z_{\ell+1} e^{i\theta_{\ell+1}}, \ldots, z_d e^{i\theta_d}).$$

Théorème 1.1. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un homomorphisme différentiable ρ: $G \to G_0$ et un difféomorphisme canonique χ d'un voisinage U, G-invariant de Y dans Z, sur un voisinage U_0, G_0-invariant de $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^\ell \times \{0\}$ dans*

Z_0, tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} G\times U & \xrightarrow{\beta} & U \\ {\scriptstyle \rho\times\chi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi} \\ G_0\times U_0 & \xrightarrow{\beta_0} & U_0 \end{array}$$

(on peut choisir U_0 de la forme $\xi\in W$, W voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^\ell$, $|z_i|<\varepsilon_i$ ($\varepsilon_i>0$ donnés)).

Soit $\mathbb{R}^k$ l'algèbre de Lie de G et e_i la base canonique de $\mathbb{R}^k$: à chaque e_i est associé un champ de vecteurs hamiltonien X_i sur Z, on suppose que ces champs admettent des fonctions génératrices q_i (on note q_i^0 les objets analogues pour l'action de G_0 sur Z_0: $q_i^0=\xi_i$ pour $i\leqq\ell$, $q_i^0=\frac{1}{2}|z_i|^2$ pour $i>\ell$).

Corollaire 1.2. *Il existe des entiers $n_{i,j}(1\leqq i\leqq k,\ 1\leqq j\leqq\ell)$ et des réels c_i tels que:* $q_i\circ\chi^{-1}=\sum_{j=1}^{\ell} n_{i,j}q_j^0+c_i$.

Corollaire 1.3. *Si $G=G_0(k=d)$ et que l'action β est génériquement principale la matrice $(n_{i,j})$ précédente est dans $GL(d;\mathbb{Z})$.*

Corollaire 1.4. *Dans le cas homogène, on peut construire un modèle homogène et les résultats précédents restent vrais dans cette catégorie.*

Le modèle homogène est obtenu en prenant dans Z_0 l'ouvert $\xi\neq 0$ et les q_j^0 définis par:

$$\begin{aligned} &q_j^0=\xi_j, && 1\leqq j\leqq\ell,\\ &q_j^0=\tfrac{1}{2}(\eta_j^2+y_j^2\,\|\xi\|^2)\,\|\xi\|^{-1}, && \ell+1\leqq j\leqq d. \end{aligned}$$

où $(y_{\ell+1},\dots,y_d,\eta_{\ell+1},\dots,n_d)$ sont les coordonnées canoniques dans $T^*(\mathbb{R}^{d-\ell})$.

Remarque 1.5. Le cas $k=d=\ell$ est le résultat classique sur les coordonnées actions angles.

Preuve de théorème 1.1 Soit G_{z_0} le groupe d'isotropie de z_0; par différentiation ce groupe agit sur $T_{z_0}Z$, cette action étant évidemment symplectique. D'après le théorème de conjugaison d'E. Cartan ([15], p. 218), il existe sur $T_{z_0}Z$ une structure complexe J et un produit scalaire hermitien $h=g+i\omega_{z_0}$ où ω_{z_0} est la structure symplectique induite par ω sur $T_{z_0}Z$, tels que l'action de G_{z_0} soit unitaire. Il existe donc une décomposition G_{z_0}-stable de $T_{z_0}Z$ de la forme:

$$T_{z_0}Z=T_{z_0}Y\oplus J(T_{z_0}Y)\bigoplus_{i=1}^{d-\ell}E_i$$

où les E_i sont des sous-espaces complexes de dimension 1 sur lesquels G_{z_0} agit par rotation d'angle $\mu_i(g)\in U(1)$. Soit $\tilde{\mu}_i$: $G\to U(1)$ des caractères prolongeant les μ_i (l'existence de tels caractères est prouvée par exemple dans [28], p. 102 et suivantes), on définit un homomorphisme ρ: $G\to G_0=G/G_{z_0}\times[U(1)]^{d-\ell}$ par $\rho(g)=(\bar{g},\tilde{\mu}_i(g))$. On considère maintenant l'action γ de G sur Z_0 définie grâce à

cet homomorphisme γ: $G\times Z_0 \xrightarrow{\rho\times \mathrm{Id}} G_0\times Z_0 \xrightarrow{\beta_0} Z_0$. Le groupe d'isotropie pour γ de $O\in T^*((\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^\ell\times\mathbb{R}^{d-\ell})$ est évidemment G_{z_0} par construction et la représentation de ce groupe d'isotropie sur T_0Z_0 est par construction unitairement équivalente à la représentation de G_{z_0} sur $T_{z_0}Z$ (la structure complexe et le produit hermitien sur Z_0 étant les canoniques). Cette représentation d'isotropie caractérisant localement l'action de G [1], on obtient l'existence d'un difféomorphisme φ de U sur U_0 (voisinage invariant des orbites) tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} G\times U \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\rho\times\varphi"'] & U \arrow[d, "\varphi"] \\ G_0\times U_0 \arrow[r, "\beta_0"] & U_0 \end{tikzcd}.$$

De plus, il est clair que φ est symplectique le long de Y: en effet, φ est même unitaire. On utilise alors une version équivariante du théorème de Darboux due à Weinstein [25]:

Théorème 1.5. *Soit γ une action C^∞ d'un groupe de Lie G compact sur une variété Z, $Y=G_{z_0}$ l'orbite d'un point z_0 et ω_0, ω_1 deux formes symplectiques G-invariantes sur Z, coincidant en tout point de Y, il existe un germe de difféomorphisme ψ: $(Z, Y)\to(Z, Y)$ tangent à l'identité le long de Y, commutant à l'action de G et tel que $\psi^*(\omega_1)=\omega_0$.*

On applique ici le théorème précédent à $\omega_0=\omega$ et $\omega_1=\varphi^*(\omega_{Z_0})$; on pose alors $\chi=\varphi\circ\psi$, ce qui achève la preuve du théorème 1.1. Les corollaires se prouvent sans difficultés.

2. L'algebre $\mathscr{A}$

Dans ce paragraphe, nous allons expliciter les hypothèses géométriques faites sur l'algèbre $\mathscr{A}$ des fonctions $f(p_1,\dots,p_d)$ où f est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^d\backslash 0$ positivement homogène. On fait l'hypothèse que $\mathscr{A}$ adment des générateurs $q_1,\dots,q_d$ tels que:

(2.1) *les flots hamiltoniens des q_j sont 2π périodiques;*

(2.2) *les fibres de l'application $p=(p_1,\dots,p_d)$ (ou $q=(q_1,\dots,q_d)$): $T^*X\backslash 0\to\mathbb{R}^d\backslash 0$ sont connexes;* de plus l'action de $G=(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$ sur $T^*X\backslash 0$ définie par les flots hamiltoniens des q_j est *génériquement principale :* il existe un ouvert dense Ω de $T^*X\backslash 0$ tel que l'application $g\to g\cdot z_0$ soit injective pour tout z_0 de Ω.

On peut donc appliquer à cette situation les résultats du paragraphe 1. Il existe pour tout (x,ξ) de $T^*X\backslash 0$ un voisinage conique ouvert C de $q(x,\xi)$ dans $\mathbb{R}^d\backslash 0$, un ouvert conique

$$U_0=\{(x,\xi,z)\in T^*((\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^\ell\times\mathbb{R}^{d-\ell})\,|\,\xi\in C_1$$
$$\text{et pour tout } j\geqq\ell+1, q_j^0(x,\xi,z)\leqq\varepsilon_j\|\xi\|\},$$

une transformation canonique homogène χ: $q^{-1}(C) \to U_0$ et une matrice $u = (n_{ij}) \in GL(d; \mathbb{Z})$ tels que, pour tout $j = 1, \ldots, d$, $q_j \circ \chi = \sum_{i=1}^{d} n_{ij} q_i^0$.

Précisons tout de suite une conséquence utile de ces hypothèses, qui permet de comprendre en quoi $\mathscr{A}$ est maximale:

Proposition 2.3. *Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des fonctions C^∞ positivement homogènes sur $T^*X \setminus 0$ qui sont constantes sur les fibres de l'application p (ou, ce qui revient au même les f telles que, pour tout $j = 1, \ldots, d$, $\{f, p_j\} = 0$), alors $\mathscr{B} = \mathscr{A}$.*

En effet, il suffit de prouver ce résultat localement et donc pour l'algèbre $\mathscr{A}_{U_0}$: soit $f(x, \xi, y, \eta)$ *une fonction* C^∞, homogène sur U_0, telle que, pour tout $j = 1, \ldots, d$, $\{f, q_j^0\} = 0$: f est visiblement indépendante de x, donc $f(x, \xi, y, \eta) = F(\xi, y, \eta)$. En se restreignant alors à $\|\xi\| = 1$, on voit que F ne dépend que de y, η par l'intermédiaire de $y_j^2 + \eta_j^2$ et l'on sait qu'une telle fonction est une fonction C^∞ des $y_j^2 + \eta_j^2$. Cela prouve 2.3, on verra plus bas une extension de ce résultat à l'algèbre d'opérateurs $\hat{\mathscr{A}}$: quels sont les opérateurs pseudo-différentiels qui commutent à tous les P_j? Cette question est alors reliée au problème de la dimension des espaces propres joints.

Avant de poursuivre, *nous allons discuter les hypothèses* (2.1) et (2.2). On donnera aux parahraphes 6 et 7 des exemples d'application, mais nous pouvons déjà faire quelques remarques d'ordre général: les obstructions aux hypothèses proviennent essentiellement de la nature locale des fibres de l'application p:

– ces fibres doivent être compactes et doivent être des orbites de l'action de $\mathbb{R}^d$ obtenue à partir des flots des H_{p_j}: ce qui élimine les singularités du type variété stable ou instable d'une orbite périodique de type «hyperbolique»;

– localement, il y a des conditions de non dégénérescence du type Morse: pour prendre un exemple non homogène, soit p: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $p(x, \xi) = \xi^2 + x^4$, les orbites de H_p sont les lignes de niveau compactes de p, mais il n'y a visiblement pas d'action différentiable de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$ ayant ces orbites;

– dans le cas analytique, Vey [22] a donné des conditions du type Morse pour une algèbre de fonctions $f(p_1, \ldots, p_d)$ où les p_j sont simultanément critiques en 0;

– dans le cas C^∞ homogène, avec $d = 2$, nous pouvons expliciter une condition locale précise:

Théorème 2.4. *Soit X une variété de dimension 2; p_1 et p_2 deux fonctions réelles, C^∞, positivement homogènes de degré 1, en involution sur $T^*X \setminus 0$. Soit $\lambda_0 \in T^*X \setminus 0$ tel que $p_1(\lambda_0) = 1$ et que la trajectoire de H_{p_1} soit périodique. Supposons en outre que $p_2 \restriction_{p_1 = 1}$ admette en λ_0 un point critique non dégénéré transversalement à H_{p_1} et de hessienne définie (par exemple $p_2(\lambda_0) = 0$, $p_2 \geqq 0$ au voisinage de λ_0). Alors, il existe un voisinage conique U de λ_0, qui soit invariant par les flots hamiltoniens de p_1 et p_2, tel que l'algèbre $\mathscr{A}_U$ des fonctions C^∞ positivement homogènes de $p_1 \restriction_U$ et $p_2 \restriction_U$ admette de générateurs q_1 et q_2 à flots hamiltoniens 2π-périodiques.*

Soit γ l'orbite périodique de H_{p_1} issue de λ_0, $T > 0$ sa période et Σ un germe d'hypersurface de $p_1 = 1$ transverse en λ_0 à γ; soit P: $(\Sigma, \lambda_0) \to (\Sigma, \lambda_0)$ l'application de Poincaré associée au flot de H_{p_1}, qui admet $p_2 \restriction_\Sigma$ comme intégrale première; utilisant la proposition A3 de l'appendice, on peut construire dans Σ

des coordonnées locales (u, v) telles que $\omega\restriction_\Sigma = du \wedge dv$, $\lambda_0 = (0, 0)$ et $P(u, v) = (u \cos\theta - v \sin\theta,\ u \sin\theta + v \cos\theta)$ avec $\theta = \alpha(u^2 + v^2)$ où α est une fonction C^∞. En outre, on a $p_2(u, v) = F(u^2 + v^2)$ où F: $(\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ est C^∞ et $F'(0) \neq 0$. Les fibres $\mathscr{T}_\varepsilon = \{\lambda \in T^*X \setminus 0 \mid p_1 = 1,\ p_2 = \varepsilon\}$ sont des tores entourant γ, on va définir sur chacun d'eux deux lacets de base γ_1 et γ_2 dépendant continûment de ε.

– γ_2 est défini par $\gamma_2 = \Sigma \cap \mathscr{T}_\varepsilon$ orienté comme bord de $\mathscr{D}_\varepsilon = \Sigma \cap \{p_2 \leqq \varepsilon\}$.

– Soit $\mu_\varepsilon \in \mathscr{T}_\varepsilon \cap \Sigma$ de coordonnées $(u_\varepsilon, 0)$ avec $u_\varepsilon > 0$, $T(\varepsilon)$ tel que $P(\mu_\varepsilon) = \varphi_{T(\varepsilon)}(\mu_\varepsilon)$ où φ_t est flot hamiltonien de p_1. On définit γ_1 par $\gamma_1\restriction_{[0, T(\varepsilon)]}(t) = \varphi_t(\mu_\varepsilon)$ et $\gamma_1\restriction_{[T(\varepsilon), T(\varepsilon) + \alpha(u_\varepsilon^2)]} = m(T(\varepsilon) + \alpha(u_\varepsilon^2) - t)$, $m(\theta)$ étant le point de γ_2 d'angle polaire θ. Donc $\gamma_1(T(\varepsilon)) = P(\mu_\varepsilon)$ et $\gamma_1(T(\varepsilon) + \alpha(u_\varepsilon^2)) = \mu_\varepsilon = \gamma_1(0)$. On définit ensuite γ_1, $i = 1, 2$, sur toutes les fibres de l'application p par homogénéité. On pose alors $q_i = \dfrac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \xi\, dx$, l'intégrale étant prise sur les lacets de base de la fibre du point où l'on calcule q_i. Le fait que H_{q_1} et H_{q_2} aient des flots 2π-périodiques se prouve en introduisant hors de γ (i.e. là où la fibration est localement triviale) les coordonnées actions angles. Ce qui est plus délicat est de montrer que les q_j sont différentiables et que ce sont des générateurs de $\mathscr{A}_U$.

Il suffit de prouver que dans $p_1 = 1$, on a $q_1 = F_1(p_2)$ et $q_2 = F_2(p_2)$ où F_1 et F_2 sont C^∞ avec $F_1(0) \neq 0$, $F_2(0) = 0$, $F_2'(0) \neq 0$. En effet, on aura alors $q_j = p_1 F_j(p_2/p_1)$ dont on voit alors facilement que la matrice jacobienne au point $(1, 0)$ est inversible.

$$\text{Par Stokes, on a: } q_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} \xi\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathscr{D}_\varepsilon} du \wedge dv = \tfrac{1}{2} F^{-1}(p_2).$$

Pour évaluer q_1, on utilise une remarque due à Voros [23] et déjà utilisée dans un contexte voisin [5]: on applique la formule de Stokes au domaine limité par γ_1 et γ et contenu dans $\Lambda \cup \Sigma$ où Λ est la variété lagrangienne engendrée par $\varphi_t(\{(u, 0) \mid u > 0\})$. On obtient ainsi en désignant par Δ le domaine défini par

$$\Delta = \mathscr{D}_\varepsilon \cap \{0 \leqq \theta \leqq \alpha(u^2 + v^2)\} : \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} \xi\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \xi\, dx - \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} du \wedge dv.$$

Or,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \xi\, dx = T \quad \text{et} \quad \int_{\Delta} du \wedge dv = \tfrac{1}{2} A(u^2 + v^2) \qquad \text{où } A(t) = \int_0^t \alpha(v)\, dv.$$

Finalement $q_1 = \dfrac{T}{2\pi} - \dfrac{1}{4\pi} A(u^2 + v^2) = F_1(p_2)$ avec F_1, C^∞ et $F_1(0) = \dfrac{T}{2\pi} > 0$. D'où le théorème 2.4.

3. L'algebre $\mathscr{A}$

Revenons maintenant à l'étude du spectre et supposons donnés sur la variété compacte X de dimension d munie de la densité dx, d opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints d'ordre 1, $P_1, \ldots, P_d$, de symboles principaux $p_1, \ldots, p_d$,

de symboles sous-principaux nuls et tels que $\sum_1^d P_j^2$ soit elliptique. Nous supposons en outre, bien sûr, que les P_j commutent. Faisons maintenant l'hypothèse que l'algèbre $\mathscr{A}$ des fonctions positivement homogènes des p_j vérifie les propriétés (2.1) et (2.2). On définit alors une algèbre commutative $\hat{\mathscr{A}}$ d'opérateurs pseudodifférentiels par $\hat{\mathscr{A}}=\{f(P_1,\ldots,P_d)\,|\,f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})\}$ où $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$ désigne l'ensemble des applications C^∞ de $\mathbb{R}^d\backslash 0\to\mathbb{R}\backslash 0$ ayant un développement asymptotique en composantes homogènes de degré $m-j\,(m\in\mathbb{Z})$

$$f\sim f_m+f_{m-1}+\ldots+f_{m-j}+\ldots \qquad \text{au sens que } f-\sum_{j=0}^{+N-1} f_{m-j}=0(\|\xi\|^{m-N}).$$

Le fait que les éléments de $\hat{\mathscr{A}}$ soient des opérateurs pseudo-différentiels résulte aisément des travaux de Strichartz [20] car il suffit évidemment de prouver que $f_j(P_1,\ldots,P_d)$ est un pseudo-différentiel. Le symbole principal d'un tel opérateur est $f_1(p_1,\ldots,p_d)\in\mathscr{A}$, son symbole sous-principal est nul si $f_{m-1}=0$.

Thèorème 3.1. *Il existe des générateurs $Q_1,\ldots,Q_d$ de $\hat{\mathscr{A}}$ de degré 1, tel que, si Λ est le spectre joint des Q_j au sens de* [8], *on ait: $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d+\mu$ où $\mu\in(\mathbb{Z}/4)^d$ est un indice de Maslov.*

Remarque. Ce théorème admet une réciproque qui justifie l'essentiel des hypothèses (2.1), (2.2): si $\hat{\mathscr{A}}$ admet des générateurs Q_j, $1\leqq j\leqq d$ avec $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d+\mu$, $\mu\in\mathbb{R}^d$; les symboles q_j sont des générateurs de $\mathscr{A}$ à flots hamiltoniens 2π-périodiques: en effet $\exp(-2\pi i Q_j)$ est un opérateur intégral de Fourier elliptique associé à la transformation canonique χ_j qui est le flot de H_{q_j} à l'instant 2π, si $exp(-2\pi i Q_j)=c_j\,\mathrm{Id}$, cela prouve que $\chi_j=\mathrm{Id}$ et donc que le flot de H_{q_j} est 2π-périodique.

Il est intéressant de préciser quelle partie du réseau $\mathbb{Z}^d+\mu$ est ainsi obtenue comme spectre. Auparavant, précisons une définition: un polyèdre conique $\Gamma\subset\mathbb{R}^d\backslash 0$ sera dit «*μ-adapté*» si, pour tout λ_0 du bord de Γ situé dans une face de dimension ℓ, il existe un voisinage conique U de λ_0, une matrice $u\in GL(d,\mathbb{Z})$ tels que

$$u(U\cap\Gamma)=\{x_{\ell+1}\geqq 0,\ldots,x_d\geqq 0\}\cap u(U) \qquad \text{et}$$
$$u(U\cap(\mathbb{Z}^d+\mu))\subset(\mathbb{Z}^\ell+\mu')\times(\mathbb{Z}^{d-\ell}+\{\tfrac{1}{2},\ldots,\tfrac{1}{2}\}) \qquad \text{avec } \mu'\in(\mathbb{Z}/4)^\ell.$$

Théorème 3.2. *Soit $\Gamma=q(T^*X\backslash 0)$, Γ est un polyèdre conique «μ-adapté» et il existe $R>0$ tel que*

$$\Lambda\cap\{\|\lambda\|\geqq R\}=\Gamma\cap(\mathbb{Z}^d+\mu)\cap\{\|\lambda\|\geqq R\}.$$

De plus, quelle que soit $\lambda\in\Lambda\cap\{\|\lambda\|\geqq R\}$, λ est une valeur propre de multiplicité 1.

On peut alors définir de manière analogue à [7] un indice absolu $i(\hat{\mathscr{A}})$ $=\mathrm{Cardinal}\,\{\Lambda\cap\{\|\lambda\|<R\}\}-\mathrm{Cardinal}\,\{\Gamma\cap(\mathbb{Z}^d+\mu)\cap\{\|\lambda\|<R\}\}$ qui ne dépend pas de R choisi assez grand, cet indice est nul dans les quelques exemples explicites que je connais; en outre si $i(\hat{\mathscr{A}})=0$ et que le spectre de $\hat{\mathscr{A}}$ est formé uniquement de valeurs propres de multiplicité 1 (voir par exemple le cas étudié en 6), on peut choisir les Q_j de façon que $\Lambda=\Gamma\cap(\mathbb{Z}^d+\mu)$, chaque valeur propre ayant multiplicité 1.

Remarque 3.3. Si Γ est un cône saillant (situé dans un demi-espace ouvert), on peut choisir Q_1 de façon que ce soit un opérateur elliptique: cela revient à choisir un élément premier de $(\mathbb{Z}^d)^*$ positif sur Γ. Si d_k est la multiplicité de la valeur propre $k+\mu_1$ de Q_1, on a vu dans [7] que d_k est un polynôme de $k+\mu_1$ pour $k \geqq k_0$ si le flot hamiltonien de H_{q_1} est simplement 2π-périodique. Si on interprète d_k comme le nombre de points entiers de $\Gamma \cap \{x_1 = k+\mu_1\}$, on peut rapprocher ce dernier résultat de ceux de Bernstein [2] et de McMullen [19].

Nous nous contentons dans ce paragraphe de prouver le théorème 3.1, la preuve de 3.2 étant faite au paragraphe 5.

L'algèbre $\mathscr{A}$ admet des générateurs $q_j = f_j(p_1, \ldots, p_d)$ à flots hamiltoniens 2π-périodiques, soit $T_j = f_j(P_1, \ldots, P_d) \in \hat{\mathscr{A}}$.

Lemme 3.4. $\exp[2\pi i(T_j - \mu_j)] = \mathrm{Id} + C_j$ *où* $\mu_j \in \mathbb{Z}/4$ *et* C_j *est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre* -1.

Ce lemme est prouvé dans [10] lorsque T_j est elliptique; il s'étend sans difficultés ici.

Soit Λ_1 le spectre joint des P_j, $\{\varphi_\lambda | \lambda \in \Lambda_1\}$ une base orthonormée de fonctions propres, les valeurs propres de C_j sont $\exp[2\pi i(f_j(\lambda) - \mu_j)] - 1 = c_j(\lambda)$. Comme l'opérateur C_j est compact, $c_j(\lambda)$ tend vers 0 quand λ tend vers l'infini. Et on peut définir un opérateur D_j par $D_j \varphi_\lambda = d_j(\lambda)\varphi_\lambda$ où $d_j(\lambda) = -\dfrac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}(1 + c_j(\lambda))$ où l'on prend une détermination quelconque de Log pour $|c_j(\lambda)| \geqq 1$ et la détermination principale pour $|c_j(\lambda)| < 1$. On montre comme dans [7] ou [27] que D_j est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre -1 et si $Q_j = T_j + D_j$, on a évidemment $\exp(2\pi i(Q_j - \mu_j)) = \mathrm{Id}$, ce qui prouve que $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d + \mu$ avec $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)$. Il reste à prouver que $Q_j \in \hat{\mathscr{A}}$ et que les Q_j sont des générateurs de $\hat{\mathscr{A}}$.

Pour cela, on utilise deux lemmes:

Lemme 3.5. *Soit Q un opérateur pseudo-différentiel qui commute avec tous les P_j (resp. avec tous les Q_j), alors $Q = f(P_1, \ldots, P_d)$ (mod. régularisant) (resp. $Q = f(Q_1, \ldots, Q_d)$ (mod. régularisant)) avec $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d \setminus 0)$.*

Lemme 3.6. *Soit R un opérateur régularisant qui opère diagonalement sur chaque espace propre joint de $P_1, \ldots, P_d$ (resp. $Q_1, \ldots, Q_d$), alors $R = f(P_1, \ldots, P_d)$ (resp. $f(Q_1, \ldots, Q_d)$) avec $f \in \mathscr{S}^{-\infty}(\mathbb{R}^d \setminus 0)$.*

Preuve du lemme 3.5. Soit q le premier symbole homogène non nul de Q, on *a* $\{q, p_j\} = 0$ et donc, d'après 2.3, $q \in \mathscr{A}$ et $q = f(p_1, \ldots, p_d)$ avec f homogène, soit $Q_1 = Q - f(P_1, \ldots, P_d)$, on recommence l'opération avec Q_1; à l'aide d'une somme asymptotique des f ainsi obtenus, on obtient le lemme 3.5.

Preuve du lemme 3.6. On a évidemment $Q\varphi_\lambda = f(\lambda)\varphi_\lambda$ où f: $\Lambda_1 \to \mathbb{R}$ est à décroissance rapide, il suffit d'étendre f en une fonction C^∞ à décroissance rapide de $\mathbb{R}^d \setminus 0$ dans $\mathbb{R}$, ce qui est aisé.

Preuve que $Q_j \in \hat{\mathscr{A}}$: Par définition de Q_j, Q_j opère diagonalement sur chaque espace propre joint des P_j, donc à l'aide des deux lemmes précédents, on prouve que $Q_j \in \hat{\mathscr{A}}$.

Preuve que les Q_j engendrent $\hat{\mathscr{A}}$: Soit $Q \in \hat{\mathscr{A}}$, Q opère diagonalement sur chaque espace propre joint des P_j, donc Q commute avec les Q_j; d'après le lemme 3.5, $Q = \tilde{Q} + R$ où $\tilde{Q} = f(Q_1, \ldots, Q_d)$ avec $f \in \mathscr{S}^1(\mathbb{R}^d \setminus 0)$ et R est régularisant. Maintenant, on va montrer *qu'on peut choisir* les Q_j de façon que R opère diagonalement sur les espaces propres joints de Q_j. D'après le théorème 3.3 dont la preuve est indépendante de ceci, les espaces joints des Q_j sont de dimension 1 pour $\|\lambda\|$ assez grand. Pour $\|\lambda\|$ petit, on peut s'arranger pour que la correspondance entre A et A_1 soit bijective et conserve la multiplicité: les espaces propres joints des P_j ou des Q_j seront alors les mêmes; pour ceci on associe à chaque point de $\Lambda_1 \cap \{\|\lambda\| < R\}$ un point de $\mathbb{Z}^d + \mu \cap (\mathbb{R}^d \setminus \Gamma \cap \{\|\lambda\| > R\})$, ce qui est toujours possible, sauf peut-être si $\Gamma = \mathbb{R}^d \setminus 0$ auquel cas les Q_j engendrent seulement une algèbre de codimension finie de $\hat{\mathscr{A}}$, admettant un supplémentaire formé d'opérateurs de rang fini.

4. Oscillateurs harmoniques

Soit $X_0 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^\ell \times \mathbb{R}^{d-\ell}$, on s'intéresse au spectre joint et aux fonctions propres communes des d opérateurs Q_j^0 définis de la façon suivante, pour $(x_1, \ldots, x_\ell, y_{\ell+1}, \ldots, y_d) \in X_0$,

$$Q_j^0 = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} (1 \leqq j \leqq \ell) \quad \text{et} \quad Q_j^0 = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial y_j^2} + y_j^2(\Delta_x)\right) \circ (\Delta_x)^{-\frac{1}{2}}$$

où $\Delta_x = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ (pour $\ell + 1 \leqq j \leqq d$).

Soit $h_n(t) = H_n(t) e^{-t^2/2}$ la n-ième fonction propre de l'oscillateur harmonique à une variable $\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dt^2} + t^2\right) h_n = (n + \frac{1}{2}) h_n\right)$, H_n étant le n-ième polynôme d'Hermite *unitaire* ($H_n(t) = t^n + \ldots$). Les fonctions propres communes aux Q_j^0 sont les $\varphi_{n,n'}$ avec

$$(n, n') = (n_1, \ldots, n_\ell, n'_{\ell+1}, \ldots, n'_d), \qquad n_i \in \mathbb{Z},\ n'_j \in \mathbb{N} \quad \text{et}$$

$$\varphi_{n,n'}(x, y) = \exp(i(n_1 x_1 + \ldots + n_\ell x_\ell)) \cdot h_{n'_{\ell+1}}(\sqrt{\|n\|} \cdot y_{\ell+1}) \ldots h_{n'_d}(\sqrt{\|n\|}\, y_d)$$

où $\|n\|^2 = n_1^2 + \ldots + n_\ell^2$. On a, pour $1 \leqq j \leqq \ell$, $Q_j^0 \varphi_{n,n'} = n_j \varphi_{n,n'}$, et pour $\ell + 1 \leqq j \leqq d$, $Q_j^0 \varphi_{n,n'} = (n_j + \frac{1}{2}) \varphi_{n,n'}$.

Le spectre joint Λ_0 des Q_j^0, $1 \leqq j \leqq d$ est donc $\mathbb{Z}^\ell \times (\mathbb{N} + \{\frac{1}{2}\})^{d-\ell}$; X_0 n'étant pas une variété compacte (sauf si $\ell = d$), il y a quelques difficultés pour appliquer les résultats de [8], nous aurons besoin du:

Théorème 4.1. *Soit C un cône fermé de $\mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}$ et*

$$C_\alpha = \{(\lambda', \lambda'') \in (\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{d-\ell}) \setminus \{0\} \mid \sup_{\ell+1 \leqq j \leqq d} |\lambda''_j| \leqq \alpha^2 |\lambda'|\} \qquad (\alpha > 0 \textit{ donné});$$

soit E_α le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(X_0, dx\,dy)$ engendré par les φ_λ avec $\lambda \in C_\alpha$, alors:

(i) *pour toute* $f \in E_\alpha$, $WF(f) \subset q_0^{-1}(C_\alpha) = \{(x, \xi, y, \eta) \in T^* X_0 \setminus 0 \mid \xi \in C_1, \ \eta_j^2 + \|\xi\|^2 y_j^2 \leqq 2\alpha^2 \|\xi\|^2\}$.

(ii) *Soit* $K_\alpha = \{(x, y) \in X_0 \mid y_j \leqq \alpha\sqrt{2}\} = \pi_{X_0}(\{q_0^{-1}(C_\alpha)\})$, *alors si* F *est un fermé de* X_0 *disjoint de* K_α, *on a pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *et tout* $\lambda \in C_\alpha$,

$$\int_F |\varphi_\lambda(x, y)|^2 \, dx\, dy = O(|\lambda|^{-N}) \times \int_{X_0} |\varphi_\lambda(x, y)|^2 \, dx\, dy.$$

(i) est une conséquence du calcul fonctionnel pour les opérateurs pseudo-différentiels [20] qui n'est pas seulement valable pour X_0 compacte (le caractère opérateur pseudo-différentiel est local: P est un pseudo-différentiel si il existe un recouvrement ouvert de X_0 pour des U_α tels que $P \restriction_{C_0^\infty(U_\alpha)}$ est un pseudo-différentiel: les démonstrations sont donc les mêmes que dans le cas compact).

(ii) demande une estimation précise sur le comportement à l'infini des $h_n(t)$. Il suffit en fait de prouver le:

Lemme 4.2. *Il existe* $R > 0$ *tel que*

$$\int_R^{+\infty} |h_{n'}(\sqrt{n}\, t)|^2 \, dt = O(n^{-N}) \cdot \int_0^{+\infty} |h_{n'}(\sqrt{n}\, t)|^2 \, dt \qquad \textit{avec } n' \leqq \alpha^2 n.$$

En effet, une fois le lemme prouvé, on sépare:

$$\int_F |\varphi_\lambda(x, y)|^2 \, dx\, dy = \int_{F \cap \{\sup |y_i| \leqq R\}} + \int_{F \cap \{\exists y_i, |y_i| \geqq R\}}.$$

La première somme se majore aisément, car du fait que, toute somme L^2 de la forme $\sum_{\lambda \in C_\alpha} a_\lambda \varphi_\lambda$ est C^∞ sur $F[(i)]$, on déduit aisément que, sur tout compact K disjoint de K_α,

$$|\varphi_\lambda(x, y)|^2 = O(|\lambda|^{-N}) \cdot \int_{X_0} |\varphi_\lambda(x, y)|^2 \, dx\, dy.$$

La seconde somme se majore pour un choix convenable de R grâce au lemme 4.2.

Preuve du lemme 4.2. On utilise les résultats élémentaires suivants sur les polynômes d'Hermite:

(a) $\int_0^{+\infty} |h_n(t)|^2 \, dt = C \cdot n! \ \left(C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ ([3], p. 91).

(b) $H_n(t)$ a tous ses zéros réels, compris dans l'intervalle $[-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1}]$ et H_n est de la parité de n.

De (b), on déduit que $|H_{n'}(t)| \leqq |t|^{n'}$ pour $|t| \geqq \sqrt{2n'+1}$, et donc

$$\int_R^{+\infty} |h_{n'}(\sqrt{n}\, t)|^2 \, dt \leqq \sqrt{n} \int_{R\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n'} \, dt \leqq C\sqrt{n} \int_{R^2 n}^{+\infty} e^{-u} \cdot u^{n'} \, du$$

$(R^2 n \geqq 1$ et $R^2 > 2\alpha^2)$

$$\frac{1}{(n')!}\int_{R^2 n}^{+\infty} e^{-u} u^{n'} du$$
$$= e^{-R^2 n}\left(1 + R^2 n + \ldots + \frac{(R^2 n)^{n'}}{n'!}\right) \leqq e^{-R^2 n}(\alpha^2 n) \times \frac{(R^2 n)^{\alpha^2 n}}{[\alpha^2 n]!}.$$

Soit, en utilisant la formule de Stirling:

$$\int_R^{+\infty} |h_{n'}(\sqrt{n}\, t)|^2 dt \Big/ \int_0^{+\infty} |h_{n'}(\sqrt{n}\, t)|^2 dt \leqq C \cdot n \cdot \left[e^{-\frac{(R^2-\alpha^2)}{\alpha^2}} \times \frac{R^2}{\alpha^2}\right]^{\alpha^2 n}.$$

Il suffit alors de choisir R tel que: $R \geqq 1$, $R \geqq \alpha\sqrt{2}$ et $e^{-(R^2-\alpha^2)} \cdot \frac{R^2}{\alpha^2} < 1$.

5. Le spectre de $\hat{\mathscr{A}}$ preuve de 3.2

On prouve le théorème 3.2 en utilisant la forme normale du théorème 1.1. Soit C un cône de $\mathbb{R}^d \backslash 0$ suffisamment petit pour qu'une telle forme normale existe dans $q^{-1}(C)$, soit C_1 un cône à base relativement compacte par rapport à C et tel que $\mathring{C}_1 \cap \Gamma \neq \varnothing$, et donc Cardinal $\{C_1 \cap \Lambda\} = +\infty$ d'après [8]; il suffit visiblement de prouver qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\Lambda \cap C_1 \cap \{\|\lambda\| \geqq R\} = (\mathbb{Z}^d + \{\mu\}) \cap C_1 \cap \Gamma \cap \{\|\lambda\| \geqq R\},$$

chaque valeur propre y ayant la multiplicité 1. Pour cela, on commence par transformer les q_{j-} par une matrice $u \in GL(d, \mathbb{Z})$ de façon que dans la forme normale, on ait $q_j \circ \chi = q_j^0$ où q_j^0 sont les symboles principaux des opérateurs introduits au paragraphe 4; il existe alors un operateur intégral de Fourier A d'ordre 0 opérant de $L^2(X)$ dans $L^2(X_0)$, associé à χ, elliptique sur $q^{-1}(C_1)$ et un élément $\mu' = (\mu'_1, \ldots, \mu'_\ell, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^d/4$ tel que, si $E = \{\sum a_\lambda \varphi_\lambda \in L^2(X) \mid \lambda \in C_1\}$ (resp. $E_0 = \{\sum a_\lambda \varphi_\lambda^0 \in L^2(X_0) \mid \lambda \in C_1\}$), on ait:

(i) le noyau K_A de A est une distribution à support compact dans $X \times X_0$.

(ii) $A^* A - \mathrm{Id}$ (resp. $AA^* - \mathrm{Id}$) est d'ordre -1 sur E (resp. E_0).

(iii) $(Q_j^0 + \mu'_j) A - A Q_j$ sont pour $1 \leqq j \leqq d$ d'ordre -1 sur E.

(iv) $A^*(Q_j^0 + \mu'_j) - Q_j A^*$ sont pour $1 \leqq j \leqq d$ d'ordre -1 sur E_0.

Remarque. Un opérateur est dit d'ordre -1 sur E (resp. E_0) si son symbole principal est d'ordre -1 dans un voisinage conique de $q^{-1}(C_1)$ (resp. $q_0^{-1}(C_1)$).

Il est plus facile de commencer par construire A^*: son symbole principal a_1 s'indentifie par image réciproque sur $T^* X_0 \backslash 0$ à une section C^∞ homogène d'ordre 0 du fibré $\Omega_{\frac{1}{2}} \otimes L_\chi$ au-dessus de $q_0^{-1}(C_1)$ où $\Omega_{\frac{1}{2}}$ est le fibré des demi-densités et L_χ le fibré de Maslov de χ; utilisant la trivialisation canonique de $\Omega_{\frac{1}{2}}$ grâce à la demi-densité $|dx \wedge d\xi \wedge dy \wedge d\eta|^{\frac{1}{2}}$ sur $T^* X_0 \backslash 0$, on identifie a_1 à une section du fibré hermitien plat L_χ. On choisit a_1 à support dans $q_0^{-1}(C)$ de façon qu'au voisinage de $q_0^{-1}(C_1)$, on ait $a_1(x, \xi, y, \eta) = a_1(x) |dx \wedge d\xi \wedge dy \wedge d\eta|^{\frac{1}{2}}$ où

$a_1(x)$ est une section du fibré de Maslov vérifiant $|a_1|^2=1$ et $\frac{1}{i}\frac{\partial a_1}{\partial x_j}+\mu'_j a_1=0$, ce qui est possible en choisissant les μ'_j convenablement adaptés à l'holonomie de L_χ le long de $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^\ell$; on peut choisir A^* avec un noyau à support compact, car la projection de $q_0^{-1}(C_1)$ sur X_0 est compacte. Les autres propriétés résultant du calcul symbolique des opérateurs intégraux de Fourier [14] et [11] et du fait que $\operatorname{sub}(Q_j^0+\mu'_j)=\mu'_j$ $(1\leqq j\leqq d)$: on peut aussi voir [5], pp. 29–30 pour une construction très semblable.

Pour achever la démonstration, nous avons besoin de quelques lemmes:

Lemme 5.1. *Soit B: $L^2(X)\to L^2(X')$ un opérateur (pseudo-différentiel ou intégral de Fourier) (resp. B: $L^2(X_0)\to L^2(X')$) ayant un noyau à support compact tel que B soit d'ordre -1 sur E (resp. E_0), alors pour tout $\lambda\in C_1$,*

$$\|B\varphi_\lambda\|_{L^2(X')}=O(\|\lambda\|^{-1})\,\|\varphi_\lambda\|_{L^2(X)}$$

(resp. $\|B\varphi_\lambda^0\|_{L^2(X')}=O(\|\lambda\|^{-1})\,\|\varphi_\lambda^0\|_{L^2(X_0)}$).

Preuve. Soit Q tel que $Q^2=\sum_{j=1}^d Q_j^2$ $\left(\text{resp. } Q^2=\sum_{j=1}^d (Q_j^0)^2\right)$; BQ est d'ordre 0 au voisinage de $q^{-1}(C_1)$ (resp. $q_0^{-1}(C_1)$), donc BQ: $E\to L^2_{\mathrm{loc}}(X')$ (resp. BQ: $E_0\to L^2_{\mathrm{loc}}(X')$), comme de plus BQ: $L^2\to\mathscr{E}'$, on voit que BQ est un opérateur borné de E (resp. E_0) dans $L^2(X')$, donc $\|\,\|\lambda\|\,B\varphi_\lambda\|_{L^2(X')}=O(1)$ (resp. $\|\,\|\lambda\|\,B\varphi_\lambda^0\|_{L^2(X')}=O(1)$).

Lemme 5.2. *Les opérateurs Q_j^0, $1\leqq j\leqq d$ sont propres: ils opèrent de $\mathscr{E}'(X_0)$ dans $\mathscr{E}'(X_0)$.*

En effet, c'est évident pour $j\leqq\ell$ et pour $j>\ell$, on décompose $f\in\mathscr{E}'(X_0)$ en série de Fourier par rapport à x: $f(x,y)=\sum a_n(y)\,e^{i(n|x)}$ avec $\operatorname{supp}(a_n(y))\subset K$, K compact de $\mathbb{R}^{d-l}$ indépendant de n. On a alors

$$Q_j^0 f(x,y)=\tfrac{1}{2}\sum\left(-\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}+\|n\|^2\,y_j^2\right)a_n(y)\frac{e^{i(n|x)}}{\|n\|}$$

et donc

$$\operatorname{supp} Q_j^0 f\subset(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^l\times K.$$

Lemme 5.3. *Soit H un espace de Hilbert, $T_1,\dots,T_k$ k opérateurs autoadjoints qui commutent et ayant un spectre discret. Soit E un sous-espace vectoriel de H, $(\lambda_j)\in\mathbb{R}^k$ et $\varepsilon>0$ tels que: $|||T_j-\lambda_j\restriction_E|||\leqq\varepsilon$, alors il existe au moins* dimension(E) *points $\lambda'=(\lambda'_1,\dots,\lambda'_k)$ du spectre des T_j (avec multiplicité) tels que $\sup_j|\lambda_j-\lambda'_j|\leqq\varepsilon$.*

Il suffit d'appliquer la méthode du minimax à l'opérateur $T=\sup_j|T_j-\lambda_j|$ que l'on définit aisément à l'aide de la théorie spectrale.

(5.4) *Prouvons d'abord qu'il existe $R>0$ tel que, si $\|\lambda\|\geqq R$ et $\lambda\in\Lambda\cap C_1$, alors $\lambda\in\Lambda'_0$ où $\Lambda'_0=\{(n_j+\mu'_j,\ n'_j+\frac{1}{2})\,|\,n_j\in\mathbb{Z},\ n'_j\in\mathbb{N}\}$ et la multiplicité de λ est au plus* 1.

D'après le lemme 5.1, il existe $R>0$ tel que si $\lambda\in\Lambda\cap C_1$ et $\|\lambda\|\geqq R$, on ait $\|A^*A\varphi_\lambda-\varphi_\lambda\|_{L^2(X)}\leqq\frac{1}{1000}$ et, d'après le lemme 5.2, $\|(Q_j^0+\mu'_j)A\varphi_\lambda-\lambda_jA\varphi_\lambda\|_{L^2(X_0)}$

$\leqq \frac{1}{1000}$. De la première inégalité, on déduit $\|A\varphi_\lambda\|^2_{L^2(X_0)} = (A^* A\varphi_\lambda, \varphi_\lambda) \geqq (1-\frac{1}{1000})$ $\|\varphi_\lambda\|^2_{L^2(X)}$. Donc si F_λ est l'espace propre des Q_j associé à λ, A est injectif sur F_λ et on a: $|||(Q_j^0+\mu_j'-\lambda_j)\restriction_{A(F_\lambda)}||| \leqq \frac{1}{100}$. On en déduit grâce au lemme 5.3 qu'il existe $\lambda^0 = (n_1^0, \ldots, n_l^0, n_{l+1}^0 + \frac{1}{2}, \ldots, n_d^0 + \frac{1}{2}) \in \Lambda^0$ tel que $\sup|\lambda_j^0 + \mu_j' - \lambda_j| \leqq \frac{1}{100}$ et comme $\lambda_j = n_j + \mu_j$, $\mu_j \in \mathbb{Z}/4$, on en déduit que pour $1 \leqq j \leqq \ell$, $\mu_j' - \mu_j \in \mathbb{Z}$ et pour $\ell+1 \leqq j \leqq d$, $\mu_j - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve que Γ est μ-adapté; de plus, on peut évidemment alors prendre $\mu_j' = \mu_j$, $j \leqq \ell$, et $\mu_j = \frac{1}{2}$ pour $j > \ell$. Le résultat sur la multiplicité est aussi une conséquence du lemme 5.3, car la multiplicité de la valeur propre λ^0 qui est égale à 1 est minorée par la dimension de F_λ.

(5.5) *On va prouver que tout point de* $(\mathbb{Z}^d + \{\mu\}) \cap \Gamma \cap \{\|\lambda\| \geqq R\} \cap C_1$ *est dans le spectre* Λ.

Soient φ_λ^0 les fonctions propres normalisées avec $\|\varphi_\lambda^0\|_{L^2(X_0)} = 1$ des Q_j^0. Alors d'après le lemme 5.1, pour $\|\lambda\| \geqq R$, on a: $\|Q_j A^* \varphi_\lambda^0 - (\lambda_j^0 + \mu_j') A^* \varphi_\lambda^0\|_{L^2(X)} \leqq \frac{1}{1000}$, de plus $\|A^* \varphi_\lambda^0\|_{L^2(X)} \geqq 1 - \frac{1}{1000}$ pour $\|\lambda\|$ assez grand; en effet:

$$\|A^* \varphi_\lambda^0\|^2_{L^2(X)} = (AA^* \varphi_\lambda^0, \varphi_\lambda^0) = 1 + (K\varphi_\lambda^0, \varphi_\lambda^0)$$

où K est d'ordre -1 au voisinage de $q_0^{-1}(C_1)$ et comme le noyau de AA^* est à support compact, $K = -\mathrm{Id}$ hors d'un compact K_1 de X_0; donc $(K\varphi_\lambda^0, \varphi_\lambda^0)$ $= \int_{K_1} K\varphi_\lambda^0 \overline{\varphi_\lambda^0} - \int_{X_0 \setminus K_1} |\varphi_\lambda^0|^2$; d'après l'étude du paragraphe 4, la seconde intégrale est $O(\|\lambda\|^{-1})$, la première est d'ordre $\|\lambda\|^{-1}$ d'après le lemme 5.1. Soit $\psi_\lambda^0 = A^* \varphi_\lambda^{0\prime}$, pour $\|\lambda\|$ assez grand, $\lambda \in C_1 \cap \Lambda^0$, on a: $\|Q_j \psi_\lambda^0 - (\lambda_j^0 + \mu_j') \psi_\lambda^0\|_{L^2(X)} \leqq \frac{1}{100} \|\psi_\lambda^0\|_{L^2(X)}$, ce qui prouve l'assertion 5.5 grâce au lemme 5.3.

6. Surfaces de revolution

Soit g une *métrique de révolution* sur S^2, N et S (pôles Nord et Sud) les deux points fixes de l'action isométrique de $SO(2)$, $\sigma \in]0, L[$ l'abscisse curviligne le long d'une géodésique méridienne de longueur L joignant N à S et θ l'angle polaire comptée à partir d'une telle méridienne; en dehors des pôles, la métrique g s'écrit $g = a(\sigma) d\theta^2 + d\sigma^2$ avec a: $[0, L] \to \mathbb{R}^+$, $a(0) = a(L) = 0$, $a > 0$ sur $]0, L[$. On fait l'hypothèse que a n'admet sur $]0, L[$ qu'un seul point critique σ_0 non dégénéré ($a''(\sigma_0) < 0$): le cas de figure 6a vérifie cette hypothèse, le cas 6b ne la vérifie pas.

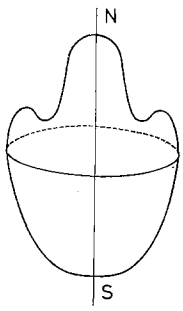

Fig. 6a

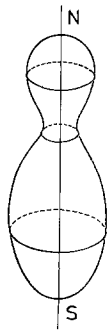

Fig. 6b

Soit Δ le laplacien associé à une telle métrique, $\frac{\partial}{\partial\theta}$ le champ des rotations infinitésimales, on étudie le spectre joint des opérateurs $P_1=\sqrt{\Delta}$ et $P_2=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$: un point (μ,n) sera dans le spectre joint Λ s'il existe une fonction propre φ du laplacien de la forme $\varphi(\sigma,\theta)=e^{in\theta}\psi(\sigma)$ avec $\Delta\varphi=\mu^2\varphi$. En particulier, pour n fixé, on a un problème de valeurs propres sur l'intervalle $[0,L]$: cela permet de prouver que toutes les valeurs propres de Λ sont de multiplicité 1. Il s'agit de préciser q_1,q_2,Γ,μ,i. On appliquera ensuite cette étude pour obtenir des résultats sur la répartition asymptotique des valeurs propres de Δ (dans le sens de [13, 10]).

Avant de commencer cette étude, il est nécessaire de rappeler le cas de la métrique canonique: nous notons $g_0,\Delta_0,\ldots$ les objets associés à cette métrique; les opérateur $Q_1^0=\sqrt{\Delta_0+1/4}$ et $Q_2^0=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$ sont alors visiblement des générateurs de $\hat{\mathscr{A}}_0$. Leur spectre Λ_0 est formé des $\{(k+\frac{1}{2},\ell)\,|\,|\ell|\leqq k;\ k,\ell\in\mathbb{Z}\}$; on a $\Gamma_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash 0\,|\,|y|\leqq x\}$, $\mu_0=(\frac{1}{2},0)$ et $i_0=0$.

On veut prouver le:

Théorème 6.1. *Sous les hypothèses précédentes, l'algèbre $\hat{\mathscr{A}}$ est isomorphe à $\hat{\mathscr{A}}_0$: $\hat{\mathscr{A}}$ admet des générateurs Q_1 et Q_2 tels que* Spectre$(Q_1,Q_2)=\Lambda_0$, *en particulier l'indice $i(\hat{\mathscr{A}})$ est nul. Pour le laplacien, cela signifie qu'il existe un symbole classique F d'ordre 2 admettant un développement asymptotique $F\sim F_2+F_0+F_{-1}+\ldots$ en composantes homogènes tel que* Spectre$(\Delta)=F(\Lambda_0)$.

Il est nécessaire de commencer par l'étude précise de l'application p: $T^*X\backslash 0\to\mathbb{R}^2\backslash 0$.

Lemme 6.2. *Le lieu singulier de l'application p est l'ensemble $Z=\{(\sigma_0,\theta,0,\Theta)\,|\,\theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},\ \Theta\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\}$; $(\sigma,\theta,\Sigma,\Theta)$ étant les coordonnées canoniques associées aux coordonnées locales (σ,θ).*

Il n'y a pas de singularité de p aux pôles Nord et Sud comme on s'en convainc en utilisant des coordonnées normales où $p_1=\sqrt{g_{ij}\xi_i\xi_j}$ avec $g_{ij}(0)=\delta_{ij}$, et $dg_{ij}(0)=0$, $p_2=x_1\xi_2-x_2\xi_1$. En dehors des pôles, on a $p_1^2=\frac{\Theta^2}{a(\sigma)}+\Sigma^2$ et $p_2=\Theta$ dont les différentielles sont indépendantes sauf si $\sigma=\sigma_0$ et $\Sigma=0$. De plus, il est facile de voir qu'au voisinage de Z, p_1 et p_2 vérifient les hypothèses du théorème 2.4. L'image $\Gamma=p(T^*X\backslash 0)$ est définie par $\Gamma=\{(\lambda,\mu)\,|\,|\mu|\leqq\sqrt{a(\sigma_0)}\,\lambda,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\backslash 0\}$ et p définit une fibration localement triviale, à fibre $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ au-dessus de $\mathring{\Gamma}$: en particulier comme $\mathring{\Gamma}$ est convexe, cette fibration est globalement triviale, il existe un difféomorphisme F de $T^*X\backslash Z$ sur $\mathring{\Gamma}\times\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} T^*X\backslash Z \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathring{\Gamma}\times\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & \mathring{\Gamma} & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Au voisinage du bord de $\mathring{\Gamma}$ cette fibration devient singulière, mais le théorème 2.4 permet de contrôler cette singularité.

Nous pouvons maintenant *construire les générateurs* q_1 et q_2 de $\hat{\mathscr{A}}$. Soit $\mathscr{T}_0 = p^{-1}(1,0)$, c'est un tore lagrangien invariant par la symétrie canonique σ du cotangent, $\sigma(x,\xi)=(x,-\xi)$; nous construisons dans $\mathscr{T}_0$ deux lacets de base γ_1 et γ_2 tels que $\sigma(\gamma_1)=-\gamma_1$ et $\sigma(\gamma_2)=\gamma_2$. Les orbites des hamiltoniens H_{p_1} et H_{p_2} sont périodiques sur $\mathscr{T}_0$ de période respective $2L$ et 2π: on définit γ_1 et γ_2 comme étant une des orbites périodiques de chacun de ces champs de vecteurs: γ_1 se projette suivant une géodésique méridienne, γ_2 admet un représentant se projetant entièrement sur N. La fibration p étant triviale au-dessus de $\mathring{\Gamma}$, γ_1 et γ_2 se définissent par continuité sur toutes les fibres non singulières de p. On définit alors q_j par: $q_j=\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_j}\xi\,dx$; q_j n'étant a priori définie que sur $T^*X\backslash Z$, mais la construction au théorème 2.4 prouve en fait que les q_j s'étendent en des fonctions C^∞ sur $T^*X\backslash 0$; de plus, il est clair que $q_j\circ\sigma=(-1)^j q_j$ et que $q_2=p_2$.

Proposition 6.3. *q_1 et q_2 ont des hamiltoniens 2π-périodiques et ce sont des générateurs de $\mathscr{A}$; $\mathscr{A}$ vérifie les hypothèses* 2.1 *et* 2.2. *On a $q(T^*X\backslash 0)=\Gamma_0$.*

Pour prouver que q_1 et q_2 sont 2π-périodiques, il suffit de le prouver sur l'ouvert dense $T^*X\backslash Z$, où c'est une conséquence facile de l'existence des coordonnées actions angles. L'application $G\colon (p_1,p_2)\mapsto(q_1,q_2)$ est un difféomorphisme local ainsi qu'il résulte du théorème 2.4 et des coordonnées actions angles loin de Z. Pour prouver que c'est un difféomorphisme, il suffit de prouver que $q(T^*X\backslash 0)=\Gamma_0$ qui est simplement connexe.

Or, cela résulte du:

Lemme 6.4. *Il existe une famille g_t, C^∞, de métriques sur S^2, vérifiant les hypothèses énoncés au début du paragraphe* 6 *et telles que $g_0=$la métrique canonique, $g_1=g$.*

Il est clair qu'alors $q_{1,t}$ et $q_{2,t}$ dépendent différentiablement de t et comme le bord de $q_t(T^*X\backslash 0)$ a une équation à coefficients entiers, on a toujours $q(T^*X\backslash 0)=\Gamma_0$.

La preuve du lemme est élémentaire et laissé au lecteur.

Pour préciser le spectre de $\hat{\mathscr{A}}$ il faut encore déterminer μ et i: ces deux indices prennent uniquement des valeurs discrètes, l'argument d'homotopie précédent montre que $\mu=(\frac{1}{2},0)$ et $i=0$. Ceci achève la preuve du théorème 6.1.

Il ne reste pour être complet à préciser le calcul de F_2: on va plutôt calculer $q_1=G_1(p_1,p_2)$. Il suffit à cause de la symétrie de le calculer pour $p_2>0$, on a alors:

$$G_1(p_1,p_2)=\frac{1}{\pi}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\sqrt{p_1^2-\frac{p_2^2}{a(\sigma)}}\,d\sigma+p_2$$

où σ_1 et σ_2 sont tels que $a(\sigma)=\frac{p_2^2}{p_1^2}$: cette formule résulte d'une écriture explicite du lacet γ_1.

6.5. *La répartition asymptotique des valeurs propres du laplacien.*

Soit $N(\lambda)=\text{Cardinal}\{\lambda_n \leqq \lambda\}$ où $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n \leqq \ldots$ est le spectre du laplacien sur la surface de révolution (S^2, g), on a $N(\lambda) \sim \frac{\text{vol}(S^2, g)}{4\pi}\lambda$, on pose $R(\lambda) = N(\lambda) - \frac{\text{vol}(S^2, g)}{4\pi}\lambda$. Hörmander a prouvé dans [13] que $R(\lambda)=O(\lambda^{\frac{1}{2}})$, cette estimation étant la meilleure possible dans le cas de la métrique canonique sur S^2. Duistermaat et Guillemin [10] ont précisé cette information en montrant que $R(\lambda)=o(\lambda^{\frac{1}{2}})$ sauf si la métrique est de Zoll, i.e. a toutes ses géodésiques périodiques, nous pouvons améliorer légèrement ces résultats dans le cas d'une métrique de révolution sur S^2 vérifiant les hypothèses formulées plus haut.

Théorème 6.6. *Si g est une telle métrique, alors:*

(i) *génériquement,* $R(\lambda)=O(\lambda^{\frac{1}{3}})$,

(ii) *si g est analytique réelle et non de Zoll,* $R(\lambda)=O(\lambda^{\frac{1}{2}-\delta})$ $(\delta>0)$.

Il résulte du théorème 6.1 que les valeurs propres sont de la forme $F(k+\frac{1}{2}, \ell) + O(1)$ où F est C^∞ homogène de degré 2 sur $\mathbb{R}^2 \backslash 0$ et $(k+\frac{1}{2}, \ell) \in \Lambda_0$. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par $D=\Gamma_0 \cap \{F \leqq 1\}$ et $N_0(\tau)=\text{Cardinal}[\tau D \cap \{\mathbb{Z}^2+\mu_0\}]$, alors si $N_0(\lambda)=C\lambda^2+O(\lambda^\alpha)$ $(\alpha>0)$, on a aussi $N(\lambda)=C\lambda+O(\lambda^{\alpha/2})$; en effet, il existe $M>0$ tel que: $N_0(\sqrt{\lambda-M}) \leqq N(\lambda) \leqq N_0(\sqrt{\lambda+M})$. On est donc ramener à évaluer le nombre de points entiers dans une famille homothétique de domaine de $\mathbb{R}^2$, ce que l'on va faire en adaptant la méthode de [6] pour tenir compte des parties linéaires du bord de D.

Soit χ la fonction caractéristique de D et ρ une fonction plateau, telle que $\text{supp}(\rho) \subset]-1, +1[\times]-1, +1[$, $\int \rho = 1$ et ρ est invariante par rotation. On pose $\chi_\tau = \chi\left(\frac{\cdot}{\tau}\right)$ et $\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}\rho\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$; soit $N_\varepsilon(\tau) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} \chi_\tau * \rho_\varepsilon(\nu+\mu_0)$. Il est facile de montrer que, pour ε assez petit on a: $N_\varepsilon(\tau - A\varepsilon) \leqq N_0(\tau) \leqq N_\varepsilon(\tau + A\varepsilon)$. En faisant $\varepsilon = \tau^{-\frac{1}{3}}$, on obtiendra le résultat voulu à condition d'obtenir un résultat analogue pour $N_\varepsilon(\tau)$. En transformant par la formule sommatoire de Poisson, il vient:

$$N_\varepsilon(\tau) = \text{vol}(D) \cdot \tau^2 + \tau^2 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2 \backslash 0} (-1)^{\nu_1} \hat{\chi}(2\pi\tau\nu)\hat{\rho}(2\pi\varepsilon\nu).$$

On évalue $\hat{\chi}$ grâce à la formule de Stokes:

$$\hat{\chi}(x) = \frac{i}{x_1^2+x_2^2} \int_{bD} e^{-i\langle x, \xi\rangle} \cdot (x_1\, d\xi_2 - x_2\, d\xi_1).$$

On peut décomposer le bord de D en trois parties: $bD = A_+ \cup A_- \cup B$ avec $A_\pm = \{y = \pm x \mid x \in [0, T]\}$ et $B = \{(x, y) \in \Gamma_0 \mid F(x, y) = 1\}$. La contribution de l'intégrale sur B à $\hat{\chi}$ s'évalue de la même manière que dans [6], il nous suffit maintenant d'examiner la contribution de A_+ par exemple; un calcul simple montre que cette contribution $\hat{\chi}_+$ est donnée par $\hat{\chi}_+(x) = T/x_1$ si $x_1+x_2=0$ et $\hat{\chi}(x) = \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2} \cdot O((x_1^2+x_2^2)^{-1})$ si $x_1+x_2 \neq 0$. Reportant dans l'expression de N_ε il

vient:

$$R_+(\tau)=\frac{\tau T}{2\pi}\sum_{\nu_1\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{(-1)^{\nu_1}}{\nu_1}\hat{\rho}(2\pi\varepsilon(\nu_{1'}-\nu_1))+\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^2\setminus 0}O(\|\nu\|^{-1})\hat{\rho}(2\pi\varepsilon\nu)$$

où dans la seconde somme, on utilise le fait que $\nu_1+\nu_2\neq 0$ implique $|\nu_1+\nu_2|\geqq 1$. Le première somme est nulle à cause de la parité de $\hat{\rho}$, la seconde se majore par $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^2\setminus 0}\frac{1}{\|\nu\|}\cdot\frac{1}{(1+\tau^{-\frac{1}{3}}\|\nu\|)^2}$ qui est $O(\tau^{\frac{1}{3}})$. Donc la contribution des parties A_+ et A_- est insignifiante pour le résultat cherché: tout dépend donc des points de courbure nulle de la courbe $F=1$. Dans la situation générique, la courbe $F=1$ n'a que des points d'inflexion ordinaires et on obtient le résultat i); si la métrique est analytique et de Zoll, on a $F=\left(\frac{Tx_1}{2\pi}\right)^2$ où T est la période commune des géodésiques, si la métrique n'est pas de Zoll, la courbure de $F=1$ ne s'annule qu'à l'ordre fini, ce qui conduit au résultat ii).

7. Application a l'equation de Schrödinger sur S^2

Soit V une fonction réelle C^∞ sur S^2 et $H=\Delta_0+V$ l'opérateur de Schrödinger associé au potentiel V. Soient $\varphi_{k,l}$, $k\in\mathbb{N}$, $1\leqq\ell\leqq 2k+1$ les fonctions propres de H réparties de sorte que $H\varphi_{k,l}=(k(k+1)+\mu_{k,l})\varphi_{k,l}$ avec $\inf(V)\leqq\mu_{k,1}\leqq\mu_{k,2}\leqq\dots\leqq\mu_{k,2k+1}\leqq\sup(V)$. Soit Δ_1 l'opérateur défini par $\Delta_1\varphi_{k,l}=k(k+1)\varphi_{k,l}$ et V_1 l'opérateur borné dans $L^2(S^2,dx_0)$ tel que $H=\Delta_1+V_1$, on a alors les propriétés suivantes [27, 7] et [8]:

(7.1) Δ_1 et V_1 sont deux opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 2 et 0 respectivement, audoadjoints, réels qui commutent (réel signifie, pour tout f, $\Delta_1\bar{f}=\overline{\Delta_1 f}$).

(7.2) $\Delta_1-\Delta_0$ est d'ordre 0, en particulier, $\operatorname{sub}(\Delta_1)=0$.

(7.3) V_1 a pour symbole principal la fonction $\hat{V}$ sur $T^*X\setminus 0$ défini par $\hat{V}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V(\varphi_t(\lambda))\,dt$ où φ_t est le flot géodésique pour la métrique g_0 sur S^2; de plus $\operatorname{sub}(V_1)=0$.

(7.4) Les mesures $\mu_k=\frac{1}{2k+1}\sum_{=1}^{2k+1}\delta(t-\mu_{k,l})$ ont une limite μ lorsque $k\to\infty$ qui est l'image par $\hat{V}$ de la mesure canonique ν sur $U_1^*S^2$ (fibré contangent unitaire) normalisée de sorte que $\int\nu=1$ $\left(\nu=\frac{1}{8\pi^2}\omega\wedge\omega/\mathrm{d}p_1\right.$ où ω est la forme symplectique canonique sur T^*S^2 et p_1 le symbole principal de $\left.\sqrt{\Delta_0}\right)$.

Ces propriétés sont prouvées dans les références indiquées précédemment, sauf la propriété relative au symbole sous-principal de V_1 qui est une conséquence de travaux de Hirschowitz et Piriou sur la propriété de transmission pour les distributions intégrales de Fourier [16] et [17]:

Lemme 7.5. *Les opérateurs Δ_1 et V_1 satisfont la propriété de transmission.*

Lemme 7.6. *Si P est un opérateur autoadjoint réel de transmission,* $\operatorname{sub}(P)=0$.

Le lemme 7.6 est une conséquence immédiate de la proposition 2 de [16]. Pour prouver le lemme 7.5, il suffit de prouver que Δ_1 est de transmission, car H l'est comme opérateur différentiel. Or $\Delta_1+\frac{1}{4}=P$ est caractérisé modulo régularisant par les propriétés:

$$\cos 2\pi\sqrt{P}=-Id\,(\operatorname{mod} C^\infty),\qquad \sin 2\pi\sqrt{P}=0\,(\operatorname{mod} C^\infty),\qquad [P,H]=0\,(\operatorname{mod} C^\infty)$$

et $P-H$ est borné; chacune de ces propriétés, si elle est vérifiée par P l'est aussi par τP [17], d'où l'on déduit que $P=\tau P$ modulo régularisant et donc que P est de transmission.

Notre but est maintenant d'utiliser les méthodes précédentes pour étudier le spectre de l'algèbre $\hat{\mathscr{A}}$ ayant $\sqrt{\Delta_1}$ et $V_1\sqrt{\Delta_1}$ comme générateurs; malheureusement, l'algèbre des symboles correspondante $\mathscr{A}$ ne vérifie pas les hypothèses (2.1) et (2.2):

(7.7) Si l'on considère l'application $\hat{V}$: $U_1^*S^2\to\mathbb{R}$, c'est une application invariante par le flot géodésique sur S^2 et l'on peut donc considérer $\hat{V}$ comme une fonction sur la variété Z des grands cercles orientés de S^2, cette variété Z étant difféomorphe à S^2 par l'application qui, à un grand cercle orienté, associe son pôle. De plus, $\hat{V}$ est visiblement invariante par l'antipodie de S^2 qui consiste à changer chaque grand cercle d'orientation: $\hat{V}$ s'interprète donc comme une fonction sur $P^2\mathbb{R}$; pour un V générique, $\hat{V}$ est de Morse sur $P^2\mathbb{R}$ et admet donc des points critiques où la hessienne est indéfinie, cela est visiblement contraire à l'hypothèse (2.1).

(7.8) Les applications p_1 et p_2 étant invariantes par la symétrie canonique σ de T^*S^2, leurs fibres le seront et ne seront généralement pas connexes, ce qui est contraire à (2.2).

Nous allons voir cependant comment adapter les méthodes précédentes pour étudier une partie du spectre de H. On fait l'hypothèse que, si $a=\inf(\hat{V})$, alors $\hat{V}^{-1}(a)\cap U_1^*S^2$ est formé de deux courbes γ_+ et $\gamma_-=\sigma(\gamma_+)$ se projetant sur le même grand cercle γ de S^2. On suppose en outre que $\hat{V}$ admet le long de ces courbes des points critiques non dégénérés transversalement à $\gamma_\pm$. Soit $c\in\mathbb{R}$ tel que la seule valeur critique de $\hat{V}$ dans $]\leftarrow,c]$ soit a, et E le sousespace fermé de $L^2(S^2)$ engendré par les $\varphi_{k,\ell}$ telles que $\mu_{k,\ell}\leqq c$; $P_1=\sqrt{\Delta_1+\frac{1}{4}}$ et $P_2=V_1\sqrt{\Delta_1+\frac{1}{4}}$ opèrent sur E, on va étudier l'algèbre $\hat{\mathscr{A}}$ qu'ils engendrent comme opérateurs sur E; on a le:

Théorème 7.9. *Soit F: $[0,A]\to[a,c]$ telle que $F^{-1}(\tau)=\mu(]\leftarrow,\tau])$, il existe un symbole classique $S(x,y)$ défini sur $\mathbb{R}^2\backslash 0$ au voisinage de $0\leqq y\leqq Ax$ et ayant un développement asymptotique $S(x,y)\sim F\left(\frac{y}{x}\right)+S_{-2}(x,y)+\ldots$ tel que pour $1\leqq 2\ell-1<2\ell\leqq A(2k+1)$, on ait:*

$$\mu_{k,2\ell-1}=S(\ell-\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2})\quad\text{et}\quad \mu_{k,2\ell}=\mu_{k,2\ell-1}+O(k^{-\infty}).$$

En particulier pour N fixé et $1 \leqq \ell \leqq N$, *on a:*

$$\mu_{k,2\ell-1} = a + \frac{2\ell-1}{2k+1} F'(0) + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Corollaire 7.10. *Pour k assez grand, on a, pour tout* $\ell = 1, 2, \ldots, 2k+1$, $\mu_{k,\ell} > a$ *et si* $b = \max \hat{V}$ *vérifie des hypothèses analogues, on a pour k assez grand* $\mu_{k,\ell} \in]a, b[$.

Remarque 7.11. Le corollaire précédent s'étend à $d > 2$, à condition que $\hat{V}$ vérifie transversalement à γ_+ et γ_- les conditions de généricité qui assurent l'existence de la forme normale de Birkhoff; ceci sera détaillé ailleurs.

Problème 7.12. Sous les hypothèses précédentes, existe-t-il des $\mu_{k,\ell}$ tels que $\mu_{k,\ell} \notin]\inf \hat{V}, \sup \hat{V}[$?

Remarque 7.13. Soit $I_{k,\ell} = [k(k+1) + \mu_{k,2\ell-1}, k(k+1) + \mu_{k,2\ell}]$ avec $2\ell \leqq A(2k+1)$, la longueur de ces intervalles est à décroissance rapide en k: ce sont des analogues de «intervalles d'instabilité» de l'équation de Hill.

Preuve du théorème 7.9. Soit $c_1 > c$ ayant les mêmes propriétés que c, on définit Ω_+ et $\Omega_- = \sigma(\Omega_+)$ (resp. $\Omega_{1,+}$ et $\Omega_{1,-} = \sigma(\Omega_{1,+})$) comme étant les deux composantes connexes de $\hat{V}^{-1}(]\leftarrow, c])$ (resp. $\hat{V}^{-1}(]\leftarrow, c_1])$). On définit aussi un sous-espace fermé $E_1 \supset E$ de $L^2(S^2)$ de manière analogue à E.

Lemme 7.14. *Il existe deux opérateurs* Q_1 *et* $Q_2 \in \hat{\mathscr{A}}$ *(algèbre d'opérateurs de la forme* $f(P_1, P_2)$ *avec* $f \in \mathscr{S}^1(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$ *opérant sur E) tels que* $\exp(2\pi i(Q_j - \mu_j)) = Id$ *et on a:* $Q_1 = P_1$, $\mu_1 = \frac{1}{2}$; *de plus si* q_2 *est le symbole principal de* Q_2, *on choisit* Q_2 *de sorte que* $q_2(\lambda) = p_1(\lambda) . \nu\{\hat{V} \leqq \hat{V}(\lambda/p_1(\lambda))\}$; Q_1 *et* Q_2 *sont «presque» des générateurs de* $\hat{\mathscr{A}}$, *au sens qu'il existe un symbole* $\tilde{S}$ *vérifiant les mêmes propriétés que le S du théorème 7.9 tel que* $V_1 = \tilde{S}(Q_1, Q_2)$ *(mod. régularisant); de plus* $\mu_2 = \frac{1}{2}$.

Ce lemme permet de ramener la preuve du théorème 7.9 à l'étude du spectre conjoint de Q_1 et Q_2 sur un espace $\tilde{E} \supset E$.

Lemme 7.15. *Soit* $\tilde{E}$ *le sous-espace vectoriel fermé de* $L^2(S^2)$ *engendré par les* $\varphi_{k,\ell}$ *tels que, si* $Q_2 \varphi_{k,\ell} = (k' + \frac{1}{2}) \varphi_{k,\ell}$, *on ait* $k' + \frac{1}{2} \leqq A_1(k + \frac{1}{2})$ *avec* $A < A_1$. *On peut choisir* A_1 *pour qu'à des sous-espaces vectoriels de dimension finie invariants par* P_j *près, on ait* $E \subset \tilde{E} \subset E_1$. *De plus, à un ensemble fini près,*

$$\text{spectre}(Q_1, Q_2 \restriction_{\tilde{E}}) = \{(k' + \tfrac{1}{2}, k + \tfrac{1}{2}), 0 < k' + \tfrac{1}{2} \leqq A_1(k + \tfrac{1}{2})\},$$

chaque valeur propre ayant, pour k assez grand, la multiplicité 2.

Il est clair que le théorème 7.9 résulte des deux lemmes précédents.

Preuve du lemme 7.14. Soit $\mathscr{A}_+$ l'algèbre des fonctions C^∞ *homogène de* p_1 et p_2 restreintes à Ω_+, soit $q_1 = p_1$ et q_2 défini par $q_2(\lambda) = p_1(\lambda) \nu\{\hat{V} \leqq \hat{V}(\lambda/p_1(\lambda))\}$, il résulte facilement de 2.4 que q_1 et q_2 sont des générateurs à flots hamiltoniens 2π-périodiques de $\mathscr{A}_+$: en effet, si $\Sigma \subset \{p_1 = 1\}$ est un germe d'hypersurface transverse à γ_+, on a $q_2(\lambda) = \dfrac{p_1(\lambda)}{2\pi} \displaystyle\int_{\{\hat{V} \leqq \hat{V}(\lambda)\} \cap \Sigma} \omega | \Sigma$ où ω est la forme symplectique; par Fubini relativement à la fibration $\Omega_+ \to \Sigma$ dont les fibres sont les orbites de

H_{p_1}, on obtient

$$q_2(\lambda)=p_1(\lambda)/4\pi^2\cdot \int_{\{\hat{V}\leqq\hat{V}(\lambda)\}\cap\Omega_+\cap\{p_1=1\}} \omega\wedge\omega/dp_1$$
$$=p_1(\lambda)/8\pi^2 \int_{\{\hat{V}\leqq\hat{V}(\lambda)\}\cap\{p_1=1\}} \omega\wedge\omega/dp_1$$

et il suffit de remarquer que $\frac{1}{8\pi^2}\omega\wedge\omega/dp_1=\nu$ pour conclure.

Il suffit maintenant de prolonger q_1 et q_2 sur $\Omega_+\cup\Omega_-$ par des fonctions paires pour obtenir deux générateurs de $\mathscr{A}$. Soit alors $T_1=P_1$ et $T_2=f_2(P_1,P_2)$ où $q_2=f_2(p_1,p_2)$. On a pour $\mu_{k,\ell}\leqq c_1$, $T_2\varphi_{k,\ell}=(k'+\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{k}\right))\varphi_{k,\ell}$ et on pose $Q_2\varphi_{k,\ell}=(k'+\frac{1}{2})\varphi_{k,\ell}$. En utilisant la méthode du paragraphe 3, il est facile de prouver que Q_2 agit sur E et sur E_1 comme un opérateur pseudo-différentiel et que $Q_2\in\hat{\mathscr{A}}$. La propriété que Q_1 et Q_2 engendrent presque $\hat{\mathscr{A}}$ se prouve en adaptant le lemme 3.5: comme $[P_j, Q_{j'}]=0$, on voit que P_j est une fonction de Q_1 et Q_2 modulo régularisant dans $\Omega_{1,+}$, utilisant la propriété de transmission, on voit que la même propriété est vraie sur $\Omega_{1,-}$ donc sur E_1 (ou E).

Preuve de lemme 7.15. Utilisant une transformation canonique $\chi\colon \Omega_+\to T^*X_0\backslash 0$ avec $X_0=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$, $q_1^0\circ\chi=q_1$; $q_2^0\circ\chi=q_2$ comme dans 5.5, on montre que

$$\text{spectre}(Q_1,Q_2)\restriction_{\tilde{E}}\supset\{(k'+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2})\,|\,k'+\tfrac{1}{2}\leqq A_1(k+\tfrac{1}{2})\}\qquad\text{pour } k\geqq k_0.$$

Le seul problème est de montrer que la multiplicité est 2, pour cela il suffit de prouver le lemme suivant qui permet d'adapter l'argumentation de 5.4:

Lemme 7.16. *Il existe une décomposition Q_j-invariante $\tilde{E}=E_0\oplus E_+\oplus E_-$ où E_0 est de dimension finie; l'application $f\mapsto\bar{f}$ est un isomorphisme antilinéaire de $E_\pm$ sur $E_\mp$ et pour tout $f\in E_\pm$, $WF(f)\subset\Omega_{1,\pm}$.*

Les méthodes de 5.4 permettent alors de montrer que les valeurs propres de $(Q_1,Q_2)\restriction_{E_+}$ sont simples pour k assez grand, et par la bijection $f\mapsto\bar{f}$ de prouver le résultat voulu.

Preuve de 7.16. On va construire un opérateur $B\colon\tilde{E}\to\tilde{E}$ qui commute avec les Q_j, qui est imaginaire au sens de $B\bar{f}=-\overline{Bf}$ et qui est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre O dont le symbole b vaut $+1$ au voisinage Ω_+, -1 au voisinage de Ω_- et tel que $b\circ\sigma=-b$. On a alors $B^2=\mathrm{Id}+K$ où K est compact, ce qui permet de montrer que la décomposition $E_0=\mathrm{Ker}\,B$,

$$E_\pm=\left\{\sum a_{k,\ell}\varphi_{k,\ell}\in E\,|\,B\varphi_{k,\ell}=b_{k,\ell}\varphi_{k,\ell}\text{ avec } b_{k,\ell}\begin{matrix}>0\\<0\end{matrix}\right\}$$

répond à la question.

On construit B en trois étapes successives: on choisit d'abord b, comme précédemment et un opérateur pseudo-différentiel $\pi\colon L^2(S^2)\to E_1$ de la forme $\pi\varphi_{k,\ell}=\pi(\mu_{k,\ell})\varphi_{k,\ell}$ où π est égale à 1 au voisinage de $]\leftarrow,c]$ et à 0 sur $[c_1,\rightarrow[$, on choisit alors $B_1=\pi B_0$ où B_0 a pour symbole b; on pose ensuite

$$B_2=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}U(-t,-t')B_1U(t,t')\,dt\,dt',$$

où $U(t,t')=\exp[i(tQ_1+t'Q_2)]$, ce qui fait que B_2 commute à Q_1 et Q_2 en conservant les propriétés précédentes de B_1. Comme le symbole principale de $\overline{B_2}$ est égal à l'opposé de celui de B_2, on peut poser $B=B_2-\overline{B_2}/2$ qui répond manifestement à la question.

Appendice: Forme normale de Birkhoff et lemme de Morse isochore

Le but est de prouver une version C^∞ du lemme de Morse isochore de Vey [21], pour une fonction $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ayant en 0 un point critique non dégénéré avec une hessienne définie positive. On applique ceci pour trouver la forme normale de Birkhoff d'une application $P\colon(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ symplectique admettant f comme intégrale première.

Lemme A.1. *Soit f une fonction C^∞ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$, dont l'intégrale sur tout cercle de centre 0 est nulle, alors il existe une fonction g, C^∞ telle que $\frac{\partial g}{\partial\theta}=f$ $\left(\text{ici } \frac{\partial}{\partial\theta}\right.$ désigne le champ de vecteurs des rotations infinitésimales: $\frac{\partial}{\partial\theta}=x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\Big)$.*

Preuve. Le problème ne présentant pas de difficultés si f est nulle dans un voisinage de 0, on multiplie f par une fonction $\varphi(x^2+y^2)$ où $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est égale à 1 au voisinage 0 et à 0 pour $|t|\geqq\frac{1}{2}$. Soit D le disque de centre 0 et de rayon 1 et $\varphi_{\lambda,n}$ les fonctions propres communes à Δ et $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$ pour le problème de Dirichlet: les $\varphi_{\lambda,n}$ forment une base orthonormée de $L^2(D)$ formée de fonctions C^∞ *et on a:* $\Delta\varphi_{\lambda,n}=\lambda\varphi_{\lambda,n}$, $\frac{\partial\varphi_{\lambda,n}}{\partial\theta}=\mathrm{in}\,\varphi_{\lambda,n}$. Soit $f_1=f\varphi(x^2+y^2)$, on a: $f_1=\sum_{(\lambda,n)\in\Lambda}a_{\lambda,n}\varphi_{\lambda,n}$ et comme l'intégrale de f_1 sur tout cercle de centre 0 est nulle, on : $a_{\lambda,0}=0$, pour tout λ.

Soit $g=\sum_{(\lambda,n)\in\Lambda}\frac{a_{\lambda,n}}{\mathrm{in}}\varphi_{\lambda,n}$; on a évidemment $\frac{\partial g}{\partial\theta}=f_1$; il reste à prouver que g est C^∞; $\Delta^k g=\sum\lambda^k\frac{a_{\lambda,n}}{\mathrm{in}}\varphi_{\lambda,n}$; on en déduit $\|\Delta^k g\|_{L^2(D)}\leqq\|\Delta^k f_1\|_{L^2(D)}$. Donc g est dans $H^{2k}(D)$ pour tout k, cela prouve que g est C^∞.

On peut évidemment construire des preuves plus élémentaires, celle-ci à l'avantage de fournir une méthode générale d'attaque de ce genre de problème dans le cadre d'action de groupes de Lie compact: cela peut permettre notamment de prouver une version plus générale que celle que nous allons donner maintenant du lemme de Morse isochore [21].

Lemme A.2 (lemme de Morse isochore). *Soit f une fonction C^∞ au voisinage de 0 ayant un point critique de Morse non dégénéré en 0, $f(0)=0$, $f''(0)$ définie positive et supposons que pour tout $\varepsilon>0$, $\int_{f\leqq\varepsilon}dx\wedge dy=2\pi\varepsilon$; alors il existe un germe de difféomorphisme χ au voisinage de 0 tel que:*

$$\chi^*(dx\wedge dy)=dx\wedge dy$$
$$f\circ\chi(x,y)=\tfrac{1}{2}(x^2+y^2).$$

Preuve. Par le lemme de Morse usuel, il existe un germe de difféomorphisme F au voisinage de 0 tel que $f \circ F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $F^*(dx \wedge dy) = \omega_1$. On a:

$$\int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leqq \varepsilon} \omega_1 = \int_{f \leqq \varepsilon} dx \wedge dy = 2\pi\varepsilon = \int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leqq \varepsilon} dx \wedge dy.$$

Donc, si α est une 1-forme C^∞ *telle que* $d\alpha = \omega_1 - (dx \wedge dy)$, on a: $\int_{x^2+y^2=\varepsilon} \alpha = 0$, pour tout ε. Utilisant le lemme A.1, on peut trouver une fonction g tel que $(\alpha - dg)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \equiv 0$, donc $\omega_1 - dx \wedge dy = d\beta$ avec $\beta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = 0$. On applique ensuite la méthode de Moser, on cherche une famille χ_t de difféomorphismes au voisinage de 0, obtenus par intégration d'un champ de vecteur ξ_t dépendant du temps tel que: $\chi_0 = \mathrm{Id}$, et si $\omega_t = \omega_1 + t(dx \wedge dy - \omega_1)$, on ait: $\chi_t^*(\omega_t) = dx \wedge dy$. Par dérivation, on obtient: $d(i(\xi_t)\omega_t) = -d\beta$, il suffit donc d'avoir $i(\xi_t)\omega_t = -\beta$. Cela permet de calculer ξ_t et comme $\beta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = 0$, ξ_t et $\frac{\partial}{\partial\theta}$ sont liés: le champ de vecteurs ξ_t est tangent aux cercles $x^2+y^2=\varepsilon$: par intégration, on aura $(x^2+y^2) \circ \chi_t = x^2+y^2$. On pose alors $\chi = F \circ \chi_1$. Ce difféomorphisme a les propriétés voulues.

Application à la forme normale de Birkhoff. Soit P: $(\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ une application symplectique telle que P admette une intégrale première f vérifiant les hypothèses du lemme A.2.

Proposition A.3. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un germe d'application* C^∞, $\alpha: (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}$ *et des coordonnées locales symplectiques* (x, y) *tels qu'en coordonnées polaires,* P *s'écrive:*

$$P(r, \theta) = (r, \theta + \alpha(r^2)).$$

(Les coefficients du développement de Taylor de α en 0 s'appelle les coefficients de Birkhoff de P.)

Soit g défini par $g(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{f(x,y) \leqq f(x_0, y_0)} dx \wedge dy$, il n'est pas difficile de voir que g est une fonction C^∞ de Morse, ayant mêmes lignes de niveau que f et donc invariante par P. De plus, $\int_{g \leqq \varepsilon} dx \wedge dy = 2\pi\varepsilon$. Par le lemme A.2, on peut donc trouver des coordonnées locales symplectiques telles que $g = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. L'application P s'écrit alors en coordonnées polaires: $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + A(r))$.

En particulier, $P(x, 0) = (x \cos A(x), x \sin A(x))$; P étant C^∞, on en déduit facilement que $A(x)$ est C^∞, de plus il est clair que A est une fonction paire et donc d'après un théorème classique de Whithney, il existe une fonction C^∞, α telle que $A(r) = \alpha(r^2)$, ce qui achève la preuve.

Remarque. Le lemme de Morse isochore dans le cas differentiable a été prouvé par J. Vey en collaboration avec l'auteur [4].

Bibliographie

1. Bredon, G.: Introduction to compact transformation groups. New York-London: Academic Press 1972
2. Bernstein, D.N.: The number of integral points in integral polyhedra. Functional Anal. Appl. **10**, 223–224 (1976)
3. Courant, R., Hilbert, D.: Methods of mathematical physics, vol. 1. New York: Interscience 1953
4. Colin de Verdière, Y., Vey, J.: Le lemme de Morse isochore. Topology **18**, 283–293 (1979)
5. Colin de Verdière, Y.: Quasi-modes sur les variétés riemanniennes compactes. Invent. Math. **43**, 15–52 (1977)
6. Colin de Verdiere, Y.: Nombre de points entiers dans une famille homothétique de domaines de $\mathbb{R}^n$. Ann. Sci. École Norm. Sup. 4e série, **10**, 559–576 (1977)
7. Colin de Verdiére, Y.: Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques. C.R. Acad. Paris Ser. A, **286**, 1195–1197, 1978 et Comment. Math. Hev. **54**, 508–522 (1979)
8. Colin de Verdière, Y.: Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent, I – Le cas non intégrable. Duke Math. J. **46**, 169–182 (1979)
9. Duistermaat, J.J.: Oscillatory integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities. Comm. Pure Appl. Math. **27**, 207–281 (1974)
10. Duistermaat, J.J., Guillemin, V.: Spectrum of elliptic operators and periodic geodesics. Invent. Math. **29**, 39–79 (1975)
11. Duistermaat, J.J., Hörmander, L.: Fourier integral operators II. Acta Math. **128**, 183–269 (1972)
12. Guillemin, V.: Some spectral results on rank one symmetric space. Advances in Math. **28**, 129–137 (1978)
13. Hörmander, L.: The spectral function of an elliptic operator. Acta Math. **121**, 193–218 (1968)
14. Hörmander, L.: Fourier integral operators I. Acta Math. **127**, 79–183 (1971)
15. Helgason, S.: Differential geometry and symmetric spaces. New York-London: Academic Press 1962
16. Hirschowitz, A.: Transmission et symbole sous-principal. C.R. Acad. Sci. Paris Sér A. **285**, 1069–1071 (1977)
17. Hirschowitz, A., Piriou, A.: Propriétés de transmission pour les distributions intégrales de Fourier, Preprint Université de Nice
18. Maslov, V.P.: Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques. Paris: Dunod 1972
19. Mac-Mullen, P.: Metrical and combinatorial properties of convex polytopes. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver 1974), pp. 491–494. Vancouver: Canadian Mathematical Congress 1975
20. Strichartz, A.: A functional calculus for pseudo-differential operators. Amer. J. Math. **94**, 711–712 (1972)
21. Vey, J.: Sur le lemme de Morse. Invent. Math. **40**, 1–10 (1977)
22. Vey, J.: Sur certains systèmes dynamiques séparables. Amer. J. Math. **100**, 591–614 (1978)
23. Voros, A.: The WKB method for non separable systems. In: Colloques internationaux du C.N.R.S. **237**. Géometrie Symplectique et Physique Mathématique (Aix 1974), pp. 277–287. Paris: Editions du C.N.R.S. 1975
24. Weinstein, A.: Fourier integral operators, quantization and the spectra of riemannian manifolds. In: Colloque internationaux du C.N.R.S. **237**. Géometrie Sympectique et Physique Mathématique (Aix 1974), pp. 289–298. Paris: Editions du C.N.R.S. 1975
25. Weinstein, A.: Symplectic manifolds and their lagrangien submanifolds. Advances in Math. **6**, 329–346 (1971)
26. Weinstein, A.: On Maslov's quantization conditions. In: Fourier Integral Operators Colloque International (Nice 1974), pp. 341–372. Lecture Notes in Mathematics **459**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975
27. Weinstein, A.: Asymptotics of the eigenvalues clusters for the laplacian plus a potential. Duke Math. J. **44**, 883–892 (1977)
28. Weil, A.: L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications (2e édition). Paris: Hermann 1965

Reçu le 9 Octobre 1978