Topology, Vol. 18, pp. 283–293

0040–9383/79/1201–0283/$02.00/0

LE LEMME DE MORSE ISOCHORE

Y. Colin de Verdiere et J. Vey

(*Received 18 January 1979*)

§1. ENONCE DES RESULTATS

Theoreme. *Soit donné, au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, une fonction f C^∞ et une forme volume ω. Supposons f nulle et critique en 0, et soit Q sa hessienne:*

$$Q = \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) x_i x_j$$

que nous supposons non dégénérée. On peut trouver un germe de difféomorphisme

$$\mathbf{F}\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$$

tel que $F^* f = Q$, $F^*\omega = \chi(Q)\,\mathrm{d}^n x$, où χ est une fonction C^∞ convenable d'une variable, et $\mathrm{d}^n x = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ la forme volume canonique. Si la hessienne Q est définie, disons définie positive, le germe de fonction χ restreinte à $[0, +\infty]$ est caractéristique du couple (f, ω); si Q est indéfinie, seul le jet d'ordre infini de χ est caractéristique.

En d'autres termes, le difféomorphisme $\mathbf{F}$ (ou changement de coordonnées) ramène f à la forme de Morse, et ramène ω aussi près que possible de la forme normale. Inversement, il est possible de trouver un difféomorphisme G qui ramène ω à la forme normale ($G^*\omega = \mathrm{d}^n x$) et qui ramène f à

$$G^* f = \psi(Q)$$

avec une fonction C^∞ ψ convenable. On passe de l'une à l'autre forme en considérant des changements de coordonnées

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1' = x_1 u(Q), \ldots, x_n' = x_n u(Q))$$

la fonction u vérifiant $u(0) \neq 0$; on a alors

$$Q' = \frac{1}{2}\sum_1^n x_i'^2 = Q u^2(Q)$$

$$\mathrm{d}^n x' = u^{n-1}(Q)\left(u(Q) + Q\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}Q}\right)\mathrm{d}^n x.$$

Dans le cas où les données sont analytiques, ce théorème avait été obtenu par l'un de nous[4]. Nous allons immédiatement nous rabattre sur le lemme suivant, que nous discuterons ensuite.

Lemme principal. *Sur l'espace $\mathbb{R}^n$, soit Q une forme quadratique non dégénérée, et ω une forme différentielle de degré n, C^∞ au voisinage de l'origine. On peut écrire* *localement*

$$\omega = \chi(Q)\,\mathrm{d}^n x + \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}Q$$

où χ est une fonction C^∞ de Q au voisinage de 0, et η une $(n-2)$-forme convenables.

Preuve du théorème. Par la version ordinaire du lemme de Morse, on peut trouver des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ au voisinage de 0 dans lesquelles la fonction de Morse f s'écrive comme la forme quadratique Q. Par le lemme principal, nous avons

$$\omega = \chi(Q)\,\mathrm{d}^n x + \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}Q$$

comme ci-dessus. Posons

$$\omega_t = t\omega + (1-t)\chi(Q)d^n x, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Nous voulons construire une famille F_t de difféomorphismes C^∞ de $\mathbb{R}^n$, définis au voisinage de l'origine et préservant celle-ci, telle que pour tout $t \in [0, 1]$,

(a) $$F_t^* Q = Q$$

(b) $$F_t^* \omega_t = \chi(Q)\,\mathrm{d}^n x.$$

Soit X_t le champ de vecteurs $\partial F_t/\partial t$. Les conditions (a) et (b) résultent de:

(a′) $$\theta(X_t)Q = Q$$

(b′) $$\theta(X_t)\omega_t + \frac{\partial}{\partial t}\omega_t = 0.$$

La condition (b′) se réécrit:

$$\mathrm{d}\iota(X_t)\omega_t = -\mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}Q.$$

Noter que dans la décomposition du lemme, la forme $\mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}Q$ est forcément nulle à l'origine, et donc toutes les ω_t sont des formes volumes (i.e. non nulles en 0). Nous définissons donc un champ X_t satisfaisant (b′) en posant

$$\iota(X_t)\omega_t = -\eta \wedge \mathrm{d}Q.$$

Alors la condition (a′) est satisfaite aussi:

$$\theta(X_t)Q \cdot \omega_t = \iota(X_t)(\mathrm{d}Q \wedge \omega_t) - \mathrm{d}Q \wedge \iota(X_t)\omega_t = 0.$$

Quitte à restreindre le voisinage de l'origine, le champ X_t s'intègre jusqu'à $t = 1$. Alors

$$F_1^* Q = Q, \qquad F_1^* \omega = \chi(Q)\,\mathrm{d}^n x$$

et le théorème est établi.

Le lemme principal est lui-même un problème déguisé de cohomologie relative. Soit Ω^* l'algèbre des germes à l'origine de formes différentielles C^∞, et soit $(\mathrm{d}Q)$ l'idéal différentiel qu'y engendre $\mathrm{d}Q$. Il est assez facile de voir, et nous le détaillerons plus loin (§6), que le lemme principal est une assertion sur la cohomologie de degré $n-1$ du complexe quotient $\Omega^*/(\mathrm{d}Q)$.

Bien que seul le H^{n-1} soit pertinent au lemme de Morse, nous avons calculé toute la cohomologie $H^*(\Omega^*/(\mathrm{d}Q))$. Nous énonçons au paragraphe 6 les résultats.

§2. UN ISOMORPHISME DE COHOMOLOGIES

LEMME 1. *Soit X une variété différentiable, G un groupe de Lie compact et connexe, $f_1, f_2, \dots, f_r$ un certain nombre de fonctions différentiables sur X invariantes par G. Dans l'algèbre Ω^* de formes différentielles sur X, soit $\mathscr{I}^*$ l'idéal engendré par $\mathrm{d}f_1, \dots, \mathrm{d}f_r$. Le morphisme de complexes $\Omega^G/\mathscr{I}^G \to \Omega/\mathscr{I}$ induit un isomorphisme de cohomologies; si $Z \subset X$ est un sous-ensemble G-invariant, le même résultat subsiste en remplaçant Ω par l'algèbre de formes dont les coefficients sont plats le long de Z.*

Preuve. Prouvons d'abord l'injectivité de la flèche $H^*(\Omega^G/\mathscr{I}^G) \to H^*(\Omega/\mathscr{I})$. Soit $\zeta \in \Omega^G$ un cocyle modulo $\mathscr{I}$, i.e. $\mathrm{d}\zeta \in \mathscr{I}$. Supposons ce cocycle cohomologue à 0 dans $\Omega/\mathscr{I}$; c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$\zeta = \mathrm{d}\xi + \sum_1^r \mathrm{d}f_i \wedge \eta_i \tag{1}$$

avec des formes ξ, η_i convenables. Formons les moyennes invariantes

$$\xi\natural = \int_G s^*\xi \cdot \mathrm{d}s, \text{ etc.}$$

où $\mathrm{d}s$ est la mesure de Haar. De (1), résulte

$$\zeta = \zeta\natural = \mathrm{d}\xi\natural + \sum_1^r \mathrm{d}f_i \wedge \eta_i\natural$$

qui exprime que $\zeta \sim 0$ dans $\Omega^G/\mathscr{I}^G$. Noter que la connexité de G n'intervient pas dans cette partie de la démonstration.

Passons à la surjectivité: on se donne $\zeta \in \Omega$, $\mathrm{d}\zeta \in \mathscr{I}$, et nous voulons écrire ζ comme somme d'une forme G-invariante fermée modulo $\mathscr{I}$ (ce sera $\zeta\natural$), d'un cobord et d'un élément de $\mathscr{I}$. Puisque $\mathrm{d}\zeta \in \mathscr{I}$, on peut écrire, $\mathrm{d}\zeta = \sum_1^r \mathrm{d}f_i \wedge \eta_i$, $\eta_i \in \Omega$. On en déduit d'abord que $\mathrm{d}\zeta\natural \in \mathscr{I}$. Ensuite si $Y \in \mathscr{G}$ (l'algèbre de Lie de G qui opère sur X par champ de vecteurs), $\theta_Y\zeta = \mathrm{d}\iota_Y\zeta + \iota_Y\,\mathrm{d}\zeta$, soit:

$$\theta_Y\zeta = \mathrm{d}\iota_Y\zeta - \sum_1^r \mathrm{d}f_i \wedge \iota_Y\,\mathrm{d}\eta_i. \tag{2}$$

Tout élément s du groupe compact connexe G peut s'écrire $s = \exp(Y)$ avec $Y \in \mathscr{G}$, donc:

$$s^*\zeta = \zeta + \int_0^1 (\exp \tau Y)^*\theta_Y\zeta \cdot \mathrm{d}\tau,$$

soit

$$s^*\zeta = \zeta + \mathrm{d}\int_0^1 (\exp \tau Y)^*\iota_Y\zeta\,\mathrm{d}\tau - \sum_1^r \mathrm{d}f_i \wedge \int_0^1 (\exp \tau Y)^*\iota_Y\,\mathrm{d}\eta_i \cdot \mathrm{d}\tau \tag{3}$$

c'est-à-dire

$$s^*\zeta \sim \zeta \quad \text{dans} \quad \Omega/\mathcal{I}.$$

Nous voulons moyenniser cette formule sur $s \in G$: il se présente une petite difficulté due à ce que le logarithme $s \mapsto Y$ présente des singularités loin de l'élément neutre. Choisissons donc des points $s_1, \ldots, s_\alpha, \ldots, s_N$ de G, et des voisinages $V_1, \ldots, V_\alpha, \ldots, V_N$ de ces points tels que tout s de V_α s'écrive $s = \exp(Y) \cdot s_\alpha$ avec un Y de $\mathcal{G}$ dépendant différentiablement de s. De façon analogue à (3), on a:

$$s^*\zeta = s_\alpha^*\zeta + \mathrm{d}\int_0^1 s_\alpha^*(\exp \tau Y)^* \cdot i_Y\zeta \, \mathrm{d}\tau - \sum_1^r \mathrm{d}f_i \wedge \int_0^1 s_\alpha^*(\exp \tau Y)^* i_Y \, \mathrm{d}\eta_i \, \mathrm{d}\tau. \tag{4}$$

Soit maintenant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ une partition de l'unité sur G subordonnée au recouvrement par les V_α. En intégrant (4), il vient:

$$\int_G s^*\zeta \cdot \varphi_\alpha(s) \cdot \mathrm{d}s = s_\alpha^*\zeta \cdot \int_G \varphi_\alpha(s) + \text{cobord} + (\text{élément de } \mathcal{I}),$$

puis
$$\begin{aligned}\zeta^\natural &= \sum_\alpha \int_G s^*\zeta \cdot \varphi_\alpha(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \sum_\alpha s_\alpha^*\zeta \int_G \varphi_\alpha(s)\,\mathrm{d}s + \text{cobord} + (\text{élément de } \mathcal{I}) \\ &= \zeta + (\text{cobord}) + (\text{élément de } \mathcal{I}),\end{aligned}$$

cette dernière égalité utilisant (3) appliquée aux N formes $s_1^*\zeta, \ldots, s_N^*\zeta$. Il apparaît ainsi que $\zeta \sim \zeta^\natural$ dans $\Omega/\mathcal{I}$, c.q.f.d.

Si on part avec ζ, ξ et η_i plates le long de Z, les constructions précédentes ne font intervenir que des formes plates le long de Z (moyennisation, produits intérieurs, etc.).

§3. SOLUTIONS DE $r\frac{\partial f}{\partial s} + s\frac{\partial f}{\partial r} = g$

Les questions qui suivent ont déjà été abordées par divers auteurs ([1]; [2]), mais pour la commodité du lecteur et pour préciser certains énoncés, nous allons les examiner à nouveau. Dans ce paragraphe 3, le plan $\mathbb{R}^2$ est rapporté à ses coordonnées canoniques r et s, et

$$X = r\frac{\partial}{\partial s} + s\frac{\partial}{\partial r}.$$

LEMME 2. *Soit $g(r, s)$ une fonction C^∞ au voisinage de 0, plate à l'origine. Il existe une unique fonction $f(r, s)$ solution de*

$$Xf = g, \tag{5}$$

C^∞ et plate à l'origine, nulle sur les deux axes $r = 0$ et $s = 0$. Si g est paire (resp. impaire) par rapport à l'une ou l'autre des variables r et s (ou les deux), f est impaire (resp. paire) par rapport à cette variable. Si g est divisible par un monôme $r^k s^l$ (k, l entiers ≥ 0), f est divisible par $r^{k+1}s^{l+1}$.

Preuve. Les orbites des points des deux axes sous le champ X remplissent $\mathbb{R}^2$ entier moins les deux diagonales: l'unicité de la solution est donc claire. Pour construire f, il est plus commode d'utiliser les coordonnées:

$$u=(r+s)/2 \qquad v=(r-s)/2$$

$$X=u\frac{\partial}{\partial u}-v\frac{\partial}{\partial v}.$$

En dérivant α fois par rapport à v l'équation $Xf=g$, puis en faisant $v=0$, on trouve

$$u\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^\alpha f}{\partial v^\alpha}(u,0)-\alpha\frac{\partial^\alpha f}{\partial v^\alpha}(u,0)=\frac{\partial^\alpha g}{\partial v^\alpha}(u,0)$$

et cette équation différentielle en u admet la solution

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial v^\alpha}(u,0)=\int_0^1 t^{-\alpha-1}\frac{\partial^\alpha g}{\partial v^\alpha}(tu,0)\,dt$$

(se rappeler que g est plate en 0). Par là, on détermine le jet infini de f le long de la diagonale $v=0$; et pareillement le long de l'autre diagonale. Prolongeons ces jets en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^2$: on se trouve ramené à l'équation $Xf=g$ sous l'hypothèse que g est plate le long des deux diagonales $u=0$ et $v=0$. Maintenant le problème se sépare sur les quatre quadrants qu'elles délimitent.

Sur le quadrant $u>0$, $v>0$ par exemple, on pose:

$$f(u,v)=\int_{(v/u)^{1/2}}^1 g(tu,t^{-1}v)\frac{dt}{t}$$

fonction qui est nulle sur le demi-axe $s=0$, $r>0$, et qui vérifie $Xf=g$. Nous devons vérifier que f se prolonge platement aux deux demi-diagonales; donc par exemple que si $u\to 0$, à $v>0$ fixé, f et toutes ses dérivées tendent vers 0 plus vite que toute puissance de u: cela résulte aisément du phénomène correspondant pour g.

Les questions de parité sont sans difficulté, compte-tenu de l'unicité de la solution et du fait que le champ X change de signe sous l'effet d'une symétrie par rapport à r ou s. Pour les questions de divisibilité, clarifions un lemme:

LEMME 3. *Soit $g(r,s)$ une fonction C^∞ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$. Pour que g soit divisible par le monôme r^ks^l, il faut et il suffit que*

$$\frac{\partial^\alpha g}{\partial r^\alpha}(0,s)\equiv 0 \quad \textit{pour tout} \quad \alpha<k$$

$$\frac{\partial^\beta g}{\partial s^\beta}(r,0)\equiv 0 \quad \textit{pour tout} \quad \beta<l.$$

Admettons ce point et finissons la preuve du lemme 2. L'équation $Xf=g$ implique

$$r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\alpha\frac{\partial f}{\partial s}+\alpha\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial s}+s\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{\alpha+1}f=\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\alpha g$$

si l'on fait $r=0$ dans cette équation, $f(0,s)=(\partial f/\partial s)(0,s)=0$ donc

$$s\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{\alpha+1} f(0, s) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{\alpha} g(0, s)$$

d'où l'on conclut aussitôt par le lemme 3.

Pour la preuve de ce dernier, on applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $r \mapsto f(r, s)$:

$$f(r, s) = \frac{r^k}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \frac{\partial^k f}{\partial r^k}(tr, s)\, dt$$

puis on déduit des hypothèses du lemme 2 que les dérivées d'ordre $<l$ de la fonction $s \mapsto (\partial^k f/\partial r^k)(tr, s)$ sont nulles pour $s = 0$; et par une nouvelle application de la formule de Taylor

$$f(r, s) = \frac{r^k s^l}{(k-1)!(l-1)!} \int_0^1 \int_0^1 (1-t)^{k-1}(1-t')^{l-1} \frac{\partial^{k+l}}{\partial r^k \partial s^l}(tr, t's)\, dt \cdot dt'$$

c.q.f.d.

Pour en finir avec l'équation $Xf = g$ disons quelques mots du cas où g n'est pas supposée plate. En appliquant l'opérateur X à la série de Taylor de f à l'origine, on trouve aisément que l'équation est dépourvue de solution si l'un des nombres

$$\frac{\partial^{2k} f}{\partial u^k \partial v^k}(0, 0) \qquad k \geq 0$$

est non nul. S'ils sont tous nuls, on obtient une solution formelle $\hat{f}$ de (5): on la prolonge de façon quelconque en une fonction C^∞, et on se trouve ramené au lemme 2.

Encore une remarque: on sait que lorsqu'un groupe de Lie réductif G connexe d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ opère sur un module M fini sur $\mathbb{R}$, on a une décomposition directe

$$M = M^{\mathscr{G}} \oplus \mathscr{G}M$$

en invariants et divisibles. Par contre, si $G = SO(1, 1)$ (ou plutôt sa composante neutre) opère dans $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, on voit qu'une fonction plate G-invariante g peut s'écrire $g = Xf$, donc appartenir à $\mathscr{G} \cdot C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

§4. PREUVE DU LEMME PRINCIPAL

Noter tout d'abord qu'on peut supposer ω nulle à l'origine, car sa valeur à l'origine peut toujours être incorporée au terme $\chi(Q)\, d^n x$. Si maintenant on écrit $\omega = g(x)\, d^n x$, avec $g(0) = 0$ et si $Q = \sum_1^n \pm x_i^2/2$ on peut trouver des fonctions C^∞ $g_i(x)$ telles que

$$\omega = g(x)\, d^n x = \sum_1^n x_i g_i(x)\, d^n x = dQ \wedge \sum_1^n \pm g_i(x)\, dx_i$$

autrement dit, ω appartient à l'idéal différentiel (dQ) engendré par dQ dans Ω^*.

(1) Supposons Q définie, auquel cas son groupe orthogonal $SO(Q)$ est compact. Prenons une $(n-1)$ forme ζ telle que $d\zeta = \omega$: c'est un $(n-1)$ cocycle modulo (dQ). D'après le lemme 1, ζ est homologue à une forme ζ' $SO(Q)$-invariante:

$$\zeta = \zeta' + \mathrm{d}\xi + \eta \wedge \mathrm{d}Q$$

avec ξ, η convenables. Différentiant,

$$\omega = \mathrm{d}\zeta' + \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}Q$$

et la n-forme $\mathrm{d}\zeta'$, $SO(Q)$-invariante, s'écrit $\chi(Q)\,\mathrm{d}^n x$, *c.q.f.d.*

(2) Le cas d'une forme Q indéfinie est plus difficile. Nous choisissons des coordonnées linéaires $x_1, \ldots, x_p$, $y_1, \ldots, y_q$ $(p+q=n,\ p\geq 1,\ q\geq 1)$ dans lesquelles

$$Q = \frac{1}{2}\sum_1^p x_i^2 - \frac{1}{2}\sum_1^q y_i^2.$$

Rappelons qu'un polynôme, et donc une fonction formelle ou analytique invariante par $SO(Q)$ est un polynôme (resp. une fonction formelle, analytique) en Q. Il en va de même pour les fonctions C^∞ si $p\geq 2$ et $q\geq 2$[3]; par contre si $p=1$ par exemple, l'ouvert $Q>0$ a deux composantes connexes symétriques par rapport à $O\oplus\mathbb{R}^q$: une fonction de Q prend des valeurs égales en deux points symétriques, alors qu'une fonction C^∞ invariante peut être identiquement nulle sur l'une seulement des deux composantes (voyez par exemple le cas $p=q=1$).

Cela dit, revenons à la preuve du lemme. Partons de ω (nulle à l'origine), soit $\zeta\in\Omega^{n-1}$ telle que $\mathrm{d}\zeta=\omega$. Dans le complexe $\hat{\Omega}^*$ des formes différentielles à coefficients formels, nous pouvons appliquer le lemme 1 avec le groupe $SO(Q)$ au cocycle relatif ζ (plus exactement à son jet infini à l'origine):

$$j^\infty\zeta = \zeta' + \mathrm{d}\xi + \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}Q$$

avec ξ, $\eta\in\hat{\Omega}^*$ convenables: de là

$$j^\infty\omega = \chi(Q)\,\mathrm{d}^n x + \mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}Q$$

avec une fonction formelle χ. Relevant χ et η en des objets C^∞, on obtient

$$\omega = \chi(Q)\,\mathrm{d}^n x + \mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}Q + (n\text{-forme plate à l'origine}).$$

En d'autres termes, nous sommes ramenés à traiter le cas d'une forme ω plate en 0. Nous allons établir le lemme suivant:

LEMME 4. *Soit ω une n-forme plate à l'origine: elle peut s'écrire* $\omega=\mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}Q$ *avec une $(n-2)$-forme η convenable plate à l'origine.*

Désignons par Ω_∞^* le complexe des formes différentielles plates à l'origine, et $(\mathrm{d}Q)_\infty$ l'idéal qui engendre $\mathrm{d}Q$. Noter qu'une forme $\omega\in\Omega_\infty^n$ appartient à cet idéal: en effet dans la formule (6) ci-dessus, on peut explicitement choisir les g_i

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t.$$

Noter aussi que Ω_∞^* est acyclique (voyez les bonnes démonstrations du lemme de Poincaré) ce qui fournit $\zeta\in\Omega_\infty^{n-1}$ avec $\mathrm{d}\zeta=\omega$.

Nous appliquons maintenant le lemme 1 avec le groupe $K=SO(p)\times SO(q)$ compact opérant de façon évidente dans $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^p\oplus\mathbb{R}^q$: nous obtenons ξ, $\eta\in\Omega_\infty^*$ et

$\zeta' \in \Omega_\infty^{n-1,K}$ avec

$$\zeta = \zeta' + \mathrm{d}\xi + \eta \wedge \mathrm{d}Q$$

de là:

$$\mathrm{d}\zeta = \mathrm{d}\zeta' + \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}Q$$

en d'autres termes nous sommes ramenés à prouver le lemme avec une donnée $\omega = \mathrm{d}\zeta'$ K-invariante (et plate à l'origine, bien sûr). A ce stade, nous allons procéder directement.

Quelques notations sont nécessaires. Si $p \geq 2$ (resp. $q \geq 2$) on pose:

$$r = \left(\sum_1^p x_i^2\right)^{1/2} \qquad s = \left(\sum_1^q y_i^2\right)^{1/2}$$

mais si $p = 1$, $r = x_1$ et si $q = 1$, $s = y_1$. Toute fonction invariante par K s'écrit $f(r, s)$, la fonction $C^\infty f$ devant être paire en r si $p \geq 2$ (resp. paire en s si $q \geq 2$) (ce qui assure qu'elle est fonction C^∞ de r^2, resp. de s^2, et donc C^∞ sur $\mathbb{R}^n$). Par ailleurs, soit

$$\mathrm{d}\theta = r^{-p} \sum_1^p (-1)^{i+1} x_i \, \mathrm{d}x_{\hat{i}}$$

$$\mathrm{d}\varphi = s^{-q} \sum_1^q (-1)^{i+1} y_i \, \mathrm{d}y_{\hat{i}}$$

ce sont des formes, invariantes par K, de degrés respectifs $p-1$ et $q-1$; on a $\mathrm{d}^p x = r^{p-1} \, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}^q y = s^{q-1} \, \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\varphi$. (Pour $p = 1$, $\mathrm{d}\theta$ est la 0-forme 1).

Revenons à la forme $\omega \in \Omega^n$ du lemme 4, maintenant supposée invariante par K:

$$\omega = g(r, s) \, \mathrm{d}^p x \wedge \mathrm{d}^q y$$

la fonction C^∞ g étant paire en r (resp. en s) si $p \geq 2$ (resp. si $q \geq 2$). Nous cherchons une forme $\eta \in \Omega_\infty^{n-2}$ vérifiant $\omega = \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}Q$ du type

$$\eta = f(r, s) \, \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi$$

pour que ceci soit C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, il faut d'une part que la fonction $C^\infty f(r, s)$ factorise $r^p s^q$: $f = r^p s^q f_1(r, s)$ et d'autre part que le quotient f_1 satisfasse les mêmes conditions de parité que g. Effectuons le calcul:

$$\mathrm{d}\eta = \frac{\partial f}{\partial r} \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi + (-1)^{p-1} \frac{\partial f}{\partial s} \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}Q = (-1)^q \left(s \frac{\partial f}{\partial r} + r \frac{\partial f}{\partial s}\right) \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\varphi$$

que nous voulons égale à

$$\omega = g(r, s) r^{p-1} s^{q-1} \, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\varphi,$$

d'où l'équation

$$s\frac{\partial f}{\partial r}+r\frac{\partial f}{\partial s}=\pm r^{p-1}s^{q-1}g(r,s).$$

C'est ici que joue le lemme 2: il y a une solution $f(r,s)$, elle est divisible par r^ps^q, et les parités s'ajustent: si par exemple $p\geq 2$, g est paire en r, donc $r^{p-1}s^{q-1}g$ a la parité de r^{p-1}, donc f a la parité de r^p (lemme 2) et finalement $f_1=f/r^ps^q$ est paire en r. Ainsi la preuve du lemme 4, et donc du lemme principal, est achevée.

§5. LA QUESTION D'UNICITE

D'après l'assertion d'existence du théorème principal, la fonction de Morse f et la forme volume ω se ramènent par un difféomorphisme convenable, respectivement à

$$F^*f=Q \qquad F^*\omega=\chi(Q)\,\mathrm{d}^nx.$$

Le difféomorphisme F n'a rien d'unique: par exemple si L est un champ de vecteurs linéaire préservant Q $(\theta_L\cdot Q=0)$ alors tout champ de la forme $f(Q)L$, tout difféomorphisme $\exp tf(Q)L$, t réel, préserve Q et ω. Il faut donc discuter l'unicité de χ.

Supposons d'abord Q définie, disons $Q=\sum_1^n x_i^2=r^2$. La fonction de $t>0$

$$\psi(t)=\int_{f\leq t}\omega$$

est certainement caractéristique du couple (f,ω). Calculée dans les coordonnées (x_i) où $f=Q=r^2$ et $\omega=\chi(r^2)r^{n-1}\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta$, elle donne

$$\psi(t)=\Gamma_n\int_0^{t^{1/2}}r^{n-1}\chi(r^2)\,\mathrm{d}r$$

(Γ_n est l'aire de la spère unité S^{n-1}); de là

$$t\psi'(t)=\Gamma_n t^{n/2}\chi(t)$$

ce qui montre que χ est pleinement caractéristique.

Passons au cas indéfini. D'abord, il ne peut y avoir unicité de χ. Supposons en effet f et ω ramenées à Q et $\chi(Q)\,\mathrm{d}^nx$ respectivement. Remplaçons χ par une fonction χ' qui n'en diffère que par une fonction plate de Q; le lemme 4 permet de trouver $\eta\in\Omega^{n-2}$ en sorte que

$$\chi(Q)\,\mathrm{d}^nx-\chi'(Q)\,\mathrm{d}^nx=\mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}Q$$

et la technique de Moser employée au paragraphe 1 fournira un difféomorphisme G vérifiant G^*Q et $G^*\chi(Q)\,\mathrm{d}^nx=\chi'(Q)\,\mathrm{d}^nx$. Tout au plus, le jet d'ordre infini de χ à l'origine peut être caractéristique de (f,ω).

Que tel soit bien le cas résulte, réflexion faite, du lemme suivant:

LEMME. *Soit G un difféomorphisme formel de $\mathbb{R}^n$ fixant l'origine. Supposons que $G^*Q=Q$, et que G^*d^nx soit de la forme $f(Q)\,\mathrm{d}^nx$, avec une fonction f formelle convenable. Alors nécessairement $f=1$, $G^*\,\mathrm{d}^nx=\mathrm{d}^nx$.*

Preuve. Comme il s'agit de série formelles, il est permis de complexifier le problème; le groupe $SO(Q)$ se complexifie en $SO(n, \mathbb{C})$, qui est aussi complexifié du groupe orthogonal compact $SO(n)$. Posons alors

$$G_0 = \int_{SO(n)} s \circ G \circ s^{-1} \cdot \mathrm{d}s$$

(l'intégration s'effectue composante par composante de Taylor). Alors,

(1) $G_0^* Q = Q$
(2) $G_0^* \mathrm{d}^n x = f(Q)\, \mathrm{d}^n x$
(3) G_0 commute à l'action de $SO(n)$.

Mais les difféomorphismes qui commutent à $SO(n)$ sont aisément repérés: ils s'écrivent

$$x \mapsto (x_1' = x_1 g(Q), \ldots, x_n' = x_n g(Q))$$

avec une fonction g convenable. Puisque G_0 doit préserver Q, $g \equiv 1$ et G_0 est l'identité. Donc

$$G^* \mathrm{d}^n x = f(Q)\, \mathrm{d}^n x = G_0^* \mathrm{d}^n x = \mathrm{d}^n x \qquad c.q.f.d.$$

§6. LA COHOMOLOGIE RELATIVE

Il est possible de calculer complètement la cohomologie du complexe $\Omega^*/(\mathrm{d}Q)$; nous nous bornerons à donner les résultats.

(a) Supposons d'abord Q définie, disons définie positive, et les coordonnées $(x_i)_{1 \le i \le n}$ ajustées pour que

$$Q = \sum_1^n x_i^2/2.$$

Soit

$$\gamma = \sum_1^n (-1)^{i+1} x_i\, \mathrm{d}x_i = \iota\left(\sum_1^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}^n x,$$

qui est une $(n-1)$-forme invariante par $SO(Q)$; on a:

$$\mathrm{d}\gamma = n\omega \qquad \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}\gamma = 2Q \cdot \mathrm{d}^n x.$$

Alors $H^0(\Omega/(\mathrm{d}Q))$ est formée par les fonctions invariantes par $SO(Q)$, c'est-à-dire les fonctions $f(Q)$, $f \in C^\infty([0, +\infty])$; chaque classe dans $H^{n-1}(\Omega/\mathrm{d}Q)$ contient un unique cocycle de la forme $\chi(Q)Q\gamma$, $\chi \in C^\infty([0, +\infty])$; et les autres $H^k(\Omega/(\mathrm{d}Q))$ sont nuls. Ce résultat est l'exact parallèle du cas analytique.

(b) Supposons Q indéfinie, et les coordonnées $(x_i)_{1 \le i \le p}$, $(y_j)_{1 \le j \le q}$ choisies comme au paragraphe 4: considérons à nouveau les formes $\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}\varphi$, et la $(n-1)$ forme γ

$$\gamma = r^p\, \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}^q y + (-1)^p s^q\, \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}^p x = \iota\left(\sum_1^p x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_1^q y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right) \mathrm{d}^p x \wedge \mathrm{d}^q y$$

qui est invariante par $SO(Q)$ (contrairement à $\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}\varphi$). Dans le complexe $\Omega/(\mathrm{d}Q)$, tout cocycle est cohomologue à une combinaison $\mathbb{R}$-linéaire de cocycles suivants:

(1) En degré 0, une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ invariante par $SO(Q)$ (plus exactement un germe à l'origine).

(2) En degré $p-1$, une forme $f\,\mathrm{d}\theta$, avec une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ invariante par $SO(Q)$, nulle pour $Q \le 0$, et déterminée par la classe de $f\,\mathrm{d}\theta$ dans $H^{p-1}(\Omega/(\mathrm{d}Q))$.

(3) En degré $q-1$, une forme $g\,\mathrm{d}\varphi$, avec une fonction g invariante par $SO(Q)$, nulle pour $Q \ge 0$, déterminée par la classe de $g\,\mathrm{d}\varphi$ dans $H^{q-1}(\Omega/(\mathrm{d}Q))$.

(4) En degré $n-1$, une forme $\chi(Q)Q\gamma$, avec une fonction χ C^∞ d'une variable, qui n'est déterminée que modulo fonction plate par la classe de $\chi(Q)Q\gamma$ dans $H^{n-1}(\Omega/(\mathrm{d}Q))$.

Même si $p = q$, les classes définies par (2) et (3) sont indépendantes; par contre si p ou $q = 1$, il y a redondance avec le (1).

Pour comprendre ces résultats, il faut voir que les quadriques de niveau $Q = t$ avec $t > 0$ (resp. $t < 0$) se rétractent par déformation sur leur intersection avec $\mathbb{R}^p \oplus 0$ (resp. $0 \oplus \mathbb{R}^q$) qui est une sphère S^{p-1} (resp. S^{q-1}): le coefficient f (resp. g) du cocycle $f\,\mathrm{d}\theta$ du (2) (resp. $g\,\mathrm{d}\varphi$ du (3)) se détermine par intégration sur le $(p-1)$ cycle (resp. le $(q-1)$ cycle) fondamental. Par contre, la $(n-1)$ homologie des quadriques de niveau est nulle, et c'est pourquoi le coefficient χ du (4) n'est qu'une fonction formelle, fantôme en quelque sorte du cas analytique: les quadriques $Q = t \ne 0$ dans le complexifié $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{C}$ se rétractent elles sur des sphères S^{n-1}, ce qui explique aussi pourquoi les $(p-1)$- et $(q-1)$-cocycles du (2) et du (3) ne peuvent avoir que des coefficients plats à l'origine.

REFERENCES

1. V. Guillemin, D. Schaeffer: Fuchsion partial differential equations. *Duk Math. J.* **44** (1977), 157–200.
2. R. Roussarie: Modèles locaux de champs et de formes. *Astérisque* **30** (1975).
3. G. Schwarz: Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group. *Topology* **14** (1975), 63–68.
4. J. Vey: Sur le lemme de Morse. *Inventiones Math.* **40** (1977), 1–10.

Université Scientifique et Médicale de Grenoble
et Centre Univérsitarie de Savoie