Verdière, Yves Colin de

Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes les périodiques.

Persistenter Link: http://dx.doi.org/10.5169/seals-41593

Commentarii Mathematici Helvetici, Vol.54 (1979)

PDF erstellt am: Feb 25, 2011

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 508–522 Birkhäuser Verlag, Basel

Sur le spectre des opérateurs elliptiques a bicaractéristiques toutes periodiques

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Introduction

Dans cet article, nous détaillons les démonstrations et résultats annoncés dans [*CV*2]. Rappelons de quoi il s'agit: X est une variété C^∞ compacte de dimension d munie d'une densité C^∞ dx; P est un opérateur pseudo-différentiel (OPD en abrégé) elliptique autoadjoint positif d'ordre 1 opérant sur les fonctions sur X. On note $p \in C^\infty(T^*X\backslash 0, \mathbf{R}^+\backslash 0)$ le symbole principal de P et on suppose que le symbole sous-principal de P est nul. Soit H_p le gradient symplectique de p par rapport *à* la structure symplectique canonique de $T^*X\backslash 0$, l'hypothèse principale notée (C) est que les trajectoires du flot de H_p (les bicaractéristiques) sont 2π périodiques: $\varphi_{2\pi} = \mathrm{Id}$; si 2π est la plus petite période de chaque bicaractéristique, on dira que P vérifie l'hypothèse (SC). L'opérateur P admet un spectre discret $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \ldots$, chaque valeur propre étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité; on notera $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base orthonormée de fonctions propres ($P\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$) de $L^2(X, dx)$. Duistermaat et Guillemin ([D–G)] ont obtenu une information très intèressante sur ce spectre qui a été précisée dans certains cas par Weinstein ([W1]): si on note α (entier) l'indice de Maslov commun à toutes ces bicaractéristiques 2π-périodiques, les valeurs propres λ_n s'accumulent autour de la progression arithmétique $k+(\alpha/4)(k\in\mathbf{N})$. Avant de préciser les résultats obtenus dans notre article, donnons quelques exemples de la situation décrite plus haut.

Exemple 1. X est une variété riemannienne à géodésiques toutes 2π-périodiques, dx est l'élément de volume riemannien et $P=\Delta^{1/2}$ où Δ est le laplacien associé à la métrique de X. Pour une étude détaillée de ces variétés, on pourra consulter le livre [BE]. Comme exemples, signalons les espaces symétriques compacts de rang 1 munis de leur métrique canonique, les quotients de tels espaces par un groupe fini d'isométries (espaces lenticulaires); enfin, sur les sphères, on sait construire des métriques non canoniques ayant cette propriété (surfaces de Zoll).

Exemple 2. X est comme dans l'exemple 1, V est une fonction C^∞ réelle sur X et $c\in\mathbf{R}$ tel que $V+c>0$ partout; on pose alors $P=(\Delta+V+c)^{1/2}$. Les valeurs

propres de P sont alors reliées simplement à celles de l'opérateur de Schrödinger $H=\Delta+V$ (cf. [CV 1] et [W4]).

Décrivons maintenant le contenu de l'article: dans le paragraphe 1, on précise le résultat de Duistermaat et Guillemin de la façon suivante: il existe un $M>0$ tel que si

$$I_k=\left[\left(k+\frac{\alpha}{4}\right)^2-M,\left(k+\frac{\alpha}{4}\right)^2+M\right],$$

alors Spectre $(P^2)\subset\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$; on peut alors définir la multiplicité approchée par $d_k=\text{Cardinal}\ \{n|\lambda_n^2\in I_k\}$ et le résultat principal est une description du comportement de la suite d_k: par exemple, sous l'hypothèse (SC), il existe $k_0\in\mathbf{N}$ tel que, pour $k\geq k_0$, d_k est une fonction polynômiale de k. On donne ensuite quelques exemples et propriétés de ces polynômes lorsque P^2 est un opérateur différentiel.

Dans le paragraphe 2, on montre comment les résultats sur la multiplicité permet de trouver certains théorèmes géométriques d'intégralité très proches de ceux de Weinstein ([W2] et [W3]).

Dans le paragraphe 3, on étudie la dispersion des λ_n^2 autour des valeurs $(k+(\alpha/4)^2$; supposant qu'on ait écrit toutes les valeurs propres de P^2 sous la forme $\lambda_n^2=(k+(\alpha/4))^2+\mu_{k,l}$ avec $1\leq l\leq d_k$ et $-M\leq\mu_{k,1}\leq\cdots\leq\mu_{k,d_k}\leq M$, on s'intéresse aux mesures $\mu_k=\sum_{l=1}^{d_k}\delta(\mu_{k,l})$ et à leur répartition limite lorsque $k\to+\infty$, on précise ainsi certains résultats de [W4].

Enfin dans le paragraphe 4, on étudie les relations entre les résultats précédents et le développement asymptotique de Minakschisundaram-Pleijel pour $Z(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-t\lambda_n^2}$ lorsque $t\to 0^+$. Cela donne entre autres une preuve d'une conjecture due à Chachère ([CH]) sur la valeur moyenne des μ_k lorsque $k\to+\infty$ dans le cas d'une métrique de Zoll sur S^2.

Remarque. Tous les opérateurs pseudo-différentiels (OPD) et opérateurs intégraux de Fourier considérés dans cet article sont classiques.

Remerciements. Je tiens à remercier A. Hirschowitz pour des discussions sur la propriété de transmission ainsi que pour la preuve de la proposition 1.9.; je remercie aussi le referee qui m' a signalé façon plus élémentaire de finir la preuve du théoréme 1.4 et une incorrection dans l'énoncé 3.1.

1. Les multiplicités

On étudie le spectre de l'opérateur P en le perturbant de façon à obtenir un opérateur ayant pour spectre une progression arithmétique, plus précisément, on

a le

THEOREME 1.1. *Il existe un OPD Q_1 d'ordre -1 avant mêmes fonctions propres que P (et donc commutant avec P), unique à opérateur régularisant de rang fini près tel que* Spectre $(P+Q_1)\subset\{k+(\alpha/4)|k\in\mathbf{N}\}$ *où $\alpha\in\mathbf{N}$ est l'indice de Maslov commun aux bicaractéristiques 2π-périodiques de P.*

COROLLAIRE 1.2. *Il existe $M>0$ tel que, si*

$$I_k=\left[\left(k+\frac{\alpha}{4}\right)^2-M,\left(k+\frac{\alpha}{4}\right)^2+M\right]$$

alors Spectre $(P^2)\subset\bigcup_{k=0}^{+\infty}I_k$ *(comparer avec* [D–G] *et* [W1])

Ces résultats ont été prouvés indépendamment par Weinstein ([W4]) et par V. Guillemin ([G2]).

Preuve du corollaire 1.2. On a $P^2=(P+Q_1)^2-Q$ où Q est un OPD d'ordre 0, donc borné dans $L^2(X,dx)$. Soit M la norme de cet opérateur; désignons par $\mu_0\leq\mu_1\leq\cdots\leq\mu_n\leq\cdots$ les valeurs propres de $(P+Q_1)^2$, on a: $\mu_n-M\leq\lambda_n\leq\mu_n+M$ d'après la caractérisation variationnelle de la n-ième valeur propre d'un opérateur autoadjoint (minimax). On en déduit aisément 1.2.

Preuve du théorème 1.1. D'après [D–G], on a:

$$\exp\left(-2\pi i\left(P-\frac{\alpha}{4}\right)\right)=Id+C,$$

où C est un OPD d'ordre -1, de plus $C\varphi_n=c_n\varphi_n$ avec

$$c_n=\exp\left(-2\pi i\left(\lambda_n-\frac{\alpha}{4}\right)\right)-1$$

comme C est un opéateur compact, $c_n\to 0$ quand $n\to+\infty$. Soit n_0 tel que, si $n\geq n_0$, on ait $|c_n|\leq\frac{1}{2}$, on définit un opéateur Q_2 par

$$Q_2\varphi_n=\frac{1}{2i\pi}\operatorname{Log}(1+c_n)\varphi_n,$$

où l'on prend une détermination quelconque de Log pour $n<n_0$ et la

détermination principale pour $n \geq n_0$. Alors si $C = C_1 + C_2$ avec

$$C_1\varphi_n = \begin{cases} c_n\varphi_n & \text{pour} \quad n < n_0, \\ 0 & \text{pour} \quad n \geq n_0, \end{cases}$$

on a $Q_2 = 2i\pi \operatorname{Log}(Id + C_1) + 2i\pi \operatorname{Log}(Id + C_2)$,

le premier opérateur étant régularisant de rang fini; le second étant un OPD d'ordre -1 car défini par la série

$$\frac{1}{2i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{C_2^n}{n}$$

qui converge normalement et au sens des OPD. Donc Q_2 est un OPD d'ordre -1 et il est clair que

$$\exp\left(-2i\pi\left(P + Q_2 - \frac{\alpha}{4}\right)\right) = Id$$

et donc

$$\text{Spectre } (P + Q_2) \subset \left\{k + \frac{\alpha}{4} \middle| k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Comme le symbole principal p de $P + Q_2$ est > 0, il n'y qu'un nombre fini de valeurs propres $k + (\alpha/4)$ telles que $k < 0$: remplacer celles-ci par $\alpha/4$, revient á modifier Q_2 par un opérateur régularisant de rang fini, pour obtenir un opérateur Q_1 satisfaisant les propriétés requises. L'unicité est évidente: si Q_1 et Q_1' sont deux tels opérateurs, le spectre de $Q_1 - Q_1'$ est formé d'entiers et comme cet opérateur est compact, il n'a qu'un nombre fini de valeurs propres non nulles.

Pour étudier les multiplicités, on définit d_k comme étant la multiplicité de $k + (\alpha/4)$ comme valeur propre de $P + Q_1$; pour k assez grand, on a évidemment aussi $d_k = \text{Cardinal } \{\text{Spectre } (P^2) \cap I_k\}$; d_k n'est pas très bien défini à cause de l'ambiguité sur Q_1, mais est bien défini comme germe au voisinage de l'infini; d'autre part, si Q_1 et Q_1' sont comme plus haut, on a: $\sum_{k=0}^{+\infty}(d_k - d_k') = 0$ (à cause du minimax).

Avant d'énoncer le résultat fondamental de ce paragraphe, on doit faire quelques remarques géométriques. Si p vérifie la condition (C) il peut y avoir des bicaractéristiques ayant comme périodes $(2\pi/m_j)$, $(m_j \in \mathbf{N},\ m_j \geq 2)$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

PROPOSITION 1.3. *L'ensemble des points de $T^*X\backslash 0$ ayant $(2\pi/m_j)$ comme période sous l'actrion du flot φ_t de H_p est une sous-variété conique W_j de $T^*X\backslash 0$ de*

dimension paire $2d_j$. *Les* W_j *sont des variétés de points fixes "clean" (au sens de* [D–G]) *pour l'action de* $2\pi q/m_j (q \in \mathbf{Z})$.

En effet, comme $\varphi_{t+2\pi} = \varphi_t$, le flot φ_t définit une action C^∞ de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ sur la variété compacte $Z = p^{-1}(\{1\})$. Les W_j correspondent à la stratification de Z suivant les types d'orbites de cette action. La parité de la dimension est une conséquence facile du fait que le sous-espace invariant par un sous-groupe compact du groupe symplectique réel est de dimension paire, car à conjugaison près, il s'agit d'un sous-groupe du groupe unitaire.

On peut maintenant énoncer le

THÉORÈME 1.4. *Il existe un polynôme* $R(t)$ *de la forme* $R(t) = b_1 t^{d-1} + d_3 t^{d-3} + b_4 t^{d-4} + \cdots + b_d$ *et un entier* k_0 *tel que pour* $k \geq k_0$, *on ait:*

$$d_k = R\left(k + \frac{\alpha}{4}\right) + \sum_{j=1}^{N} u_{j,k}$$

où les suites $u_{j,k}$ *sont de la forme* $u_{j,k} = \sum_{l=1}^{m_j - 1} (\omega_{j,l})^k R_{j,l}(k)$ *avec*

$$\omega_{j,l} = \exp\left(2\pi i \frac{l}{m_j}\right)$$

et $R_{j,l}$ *polynôme de degré* $d_j - 1$; *en particulier sous l'hypothèse* (*SC*), $d_k = R(k + \alpha/4)$.

Remarque. Le polynôme R vient d'être calculé par Boutet de Monvel et Guillemin ([B–G]) à l'aide de la formule d'Atiyah-Singer (voir aussi [B]).

Preuve du théorème 1.4. Soit $Z(t) = \mathrm{Tr}(\exp(-it(P + Q_1))$, cette distribution sur $\mathbf{R}$ peut aussi s'écrire $Z(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k e^{-it(k+(\alpha/4)}$. Les d_k sont donc les coefficients de Fourier de la distribution $e^{it(\alpha/4)} Z(t)$; leur comportement quand $k \to +\infty$ est déterminé par les singularités de $Z(t)$ qui sont analysées dans [H] et [D–G], rappelons en particulier que

$$\mathrm{Supp\,Sing}\,(Z(t)) \subset \left\{\frac{2\pi l}{m_j} \middle| l \in \mathbf{Z}, j = 1, \ldots, N\right\}$$

et que la théorie de la clean intersection qui s'applique ici permet de savoir la forme précise de la singularité en ces points: si $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ est telle que

$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \rho(t-2\pi k)=1$ et que Support $(\rho)\subset]-2\pi, 2\pi[$, on a: d'une part

$$d_k=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} (\rho Z)(t)e^{it(k+(\alpha/4)}\,dt$$

et d'autre part, d'après [D–G],

$$(\rho Z)(t)=\int e^{-it\tau}(b(\tau)+\sum_{j=1}^{N}\sum_{l\in\mathbf{Z}\setminus 0} e^{-2\pi i(l/mj)\tau}b_{l,j}(\tau))\,d\tau$$

où $b(\tau)=R(\tau)+0(\tau^{-1})$ et $b_{l,j}(\tau)=R'_{l,j}(\tau)+0(\tau^{-1})$ (R étant un polynôme de la forme voulue par 1.4 et $R'_{l,j}$ des polynômes de degré d_j-1). On en déduit aisément:

$$d_k=R\left(k+\frac{\alpha}{4}\right)+\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{m_j-1}(\omega_{j,l})^k R_{j,l}(k)+\epsilon_k$$

avec $\epsilon_k\to 0$ quand $k\to\infty$. Il suffit donc de montrer que ϵ_k est nul pour k assez grand. Comme on le verra en détail au paragraphe 2, $d'_k=d_k-\epsilon_k$ vérifie une équation de récurrence linéaire à coefficients entiers de la forme $A_0d'_k+A_1d'_{k+1}+\cdots+A_nd'_{k+n}=0$. On en déduit facilement que $\text{limite}_{k\to\infty}(A_0D_k+\cdots+A_nd_{k+n})=0$ et comme c'est un entier, il est nul pour $k\geq k_0$. On en déduit que ϵ_k satisfait pour $k\geq k_0$ ladite relation de récurrence, ce qui n'est possible que si $\epsilon_k=0$ pour $k\geq k_0$. en effet, les racines de l'équation caractéristique de cette récurrence sont de module 1. On a ainsi prouvé le théorème 1.4.

Il est intéressant de préciser la forme des polynômes R, $R_{j,l}$ sur des exemples:

Exemple 1.5. Le cas des espaces symétriques compacts de rang 1 simplement connexes.

Ces exemples vérifient la propriété (SC), et on peut donner un procédé de fabrication uniforme des polynômes R: R est de la forme

$$R(t)=\frac{2j}{(d-1)!}tH_{l_1}(t)H_{l_2}(t)\quad\text{avec}\quad l_1+l_2=d-2,\ l_1=\frac{\alpha}{2}-1$$

et H_l est le polynôme de degré l défini par:

$$H_l(t)=\left(t-\frac{l-1}{2}\right)\left(t-\frac{l-3}{2}\right)\cdots\left(t+\frac{l-1}{2}\right);$$

j est déterminé par la condition

$$d_0 = R\left(\frac{\alpha}{4}\right) = 1.$$

On verra plus bas que

$$j = \frac{\mathrm{vol}\,(X)}{\mathrm{vol}\,(S^d)}.$$

Rappelons dans un tableau les valeurs de d, α, j et des valeurs propres λ_n^2 du laplacien pour ces espaces:

X	d	α	λ_i^2	j
S^n	n	$2(n-1)$	$k(k+n-1)$	1
$P^n\mathbf{C}$	$2n$	$2n$	$k(k+n)$	$\frac{2n-1!}{n!n-1!}$
$P^n\mathbf{H}$	$4n$	$4n+2$	$k(k+2n+1)$	$\frac{4n-1!}{2n-1!2n+1!}$
$P^2\mathbf{C}a$	16	22	$k(k+11)$	39

On peut remarquer que ces polynômes R possède plusieurs propriétés remarquables, notamment celle d'avoir tous leurs zéros dans $\mathbf{Z}/2$, et celle d'être de la parité de $d+1$. De plus, sur ces exemples, R est entièrement déterminé par d et α et donc j aussi.

Exemple 1.6. L'espace lenticulaire $\mathrm{S0}(3)/\mathbf{Z}_2$.

Pour cet espace muni de la métrique canonique qui donne aux géodésiques la période 2π (sauf une de période π) on a $d=3$ et $\alpha=2$, les valeurs propres du laplacien sont de la forme $k(k+1)$ et la multipli-cité d_k vaut $d_k = \frac{1}{2}((2k+1)^2+(-1)^k)$.

Exemple 1.7. Un opérateur P sur S^2 tel que P^2 n'est pas un opérateur différentiel.

Soit

$$P = 2\sqrt{\Delta_0 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

où Δ_0 est le laplacien canonique sur S^2 et $(\partial/\partial\theta)$ le champ de vecteur des rotations

infinitésimales autour de Oz. Toutes les bicaractéristiques sont 2π-périodique, sauf une qui se projette sur l'équateur et a la période $2\pi/3$. On a $d=2$ et $\alpha=4$, les valeurs propres sont de la forme $k+1$, $k\geq 0$ et on a:

$$d_k=\left[\frac{2k}{3}\right]+1=\frac{2}{3}(k+1)+u_k \quad \text{avec} \quad u_{3k}=\frac{1}{3}=-u_{3k+1} \text{ et } u_{3k+2}=0.$$

Le cas où P^2 est un opérateur différentiel. Dans ce case, on va prouver que la propriété de parité du polynôme R est toujours satisfaite. La preuve utilise la propriété de transmission telle qu'elle a été introduite par Boutet de Monvel et étudiée en liaison avec la théorie des opérateurs intégraux de Fourier par Hirschowitz et Piriou ([H–P]).

THÉORÈME 1.8. *Si P^2 est un opéateur différentiel, le polynôme R a la parité de $d+1$.*

Ce théorème se décompose en deux propositions:

PROPOSITION 1.9. *Si P^2 est un OPD de transmission (en particulier, si c'est un opérateur différentiel), l'OPD $P_1^2=P^2+Q=(P_1+Q)^2$* (cf. th. 1.1) *est aussi de transmission.*

PROPOSITION 1.10. *Si P_1^2 est de transmission, la singularité à l'origine de $\mathrm{Tr}(e^{-itP_1})=Z_1(t)$ est telle que pour $\rho\in C_0^\infty$, à support assez voisin de* 0, *on ait: $(\rho Z_1)(t)=\int e^{-it\tau}b(\tau)\,d\tau$ avec $b(\tau)\cong b_1\tau^{d-1}+b_3\tau^{d-3}+b_5\tau^{d-5}+\cdots$*

La proposition 1.10 est prouvée dans [D–G] sous l'hypothèse que P_1^2 est un opérateur différentiel, mais l'hypothèse qui intervient dans la démonstration est que P_1^2 est de transmission.

Preuve de la proposition 1.9. Il suffit de prouver que Q est de transmission, c'est-à-dire que $\tau Q=Q$, où τ désigne la transformation qui au symbole $\sum_{j=0}^\infty a_{m-j}(x,y,\xi)$ associe le symbole $(-1)^m\sum_{j=0}^\infty(-1)^j a_{m-j}(x,y,\xi)$. La démonstration se décompose en plusieurs lemmes:

LEMME 1.11. *Les seules transmisssions globales sur les OPD sur une variété connexe de dimension $d\geq 2$ sont $+\tau$ et $-\tau$.*

Cela résulte aisément du corollaire 1.19 de [H–P]: ici $\Lambda=N^*(\Delta)\backslash 0$, où Δ est la diagonale de $X\times X$, est une variété connexe; les seules fonctions antisymétriques localement constantes de Λ dans $\mathbf{R}/4\mathbf{Z}$ sont constantes et donc égales à 0 et +2.

LEMME 1.12. *Q est caractérisé (modulo régularisant) par les propriétés:* $\cos 4\pi\sqrt{P^2+Q} = \pm Id$, $[P, Q]=0$ *et Q est un OPD d'ordre* 0.

En effet, si (λ_n^2, φ_n) est la décomposition spectrale de P^2 et que l'on pose $Q\varphi_n = \mu_n\varphi_n$, μ_n est bornée et $\cos 4\pi\sqrt{\lambda_n^2+\mu_n} = \pm 1$ et donc $\lambda_n^2+\mu_n = (k'/4)^2 (k' \in \mathbf{Z})$ et comme $\lambda_n^2 \in I_{k_n}$, on voit que pour n assez grand $\mu_n = (k_n + (\alpha/4))^2 - \lambda_n$.

LEMME 1.13. $\cos 4\pi\sqrt{P^2+\tau Q} = \pm \mathrm{Id}$.

En effet, soit E_Q le noyau de $\cos t\sqrt{P^2+Q}$, caractérisé par:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + P^2 + Q)E_Q = 0 \\ \gamma_0 E_Q = \mathrm{Id} \\ \gamma_1 E_Q = 0 \end{cases}$$

où $\gamma_0 = \restriction_{t=0}$ et $\gamma_1 = \partial/\partial t \restriction_{t=0}$. Soit ω la transmission introduite dans la proposition 9.5 de [H–P], on a $E_{\tau Q} = \pm\omega E_Q$, en effet: $(\partial_t^2 + P^2 + \tau Q)\omega E_Q = \tau \circ \omega(\partial_t^2 + P^2 + Q)E_Q = 0$ (théorème 5–6 de [H – P]) $\gamma_0\omega E_Q = (\theta \circ \omega)\gamma_0 E_Q = \pm \mathrm{Id}$ où θ est la transmission telle que $\theta\gamma_0 = \gamma_0$; en effet $\theta \circ \omega = \pm\tau$ d'après le lemme 1.11 et $\tau\ \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$,

$$\gamma_1\omega E_Q = (\theta \circ \omega)\gamma_1 E_Q = 0.$$

On a maintenant si $R_{4\pi}$ est l'opérateur de restriction à $t = 4\pi$, $\cos 4\pi\sqrt{P^2+\tau Q} = R_{4\pi} \circ E_{\tau Q} = \pm R_{4\pi} \circ \omega E_Q$ et si ξ est une transmission telle que $\xi R_{4\pi} = R_{4\pi}$, on a: $\cos 4\pi\sqrt{P^2+\tau Q} = \pm(\xi \circ \omega)\,\mathrm{Id} = \pm \mathrm{Id}$.

On conclut alors aisément que τQ vérifie les propriétés de lemme 1.12 et donc $\tau Q = Q$: Q est de transmission.

L'indice. D'après le théorème, d_k est donné pour $k \geq k_0$ par la formule $d'_k = R(k + (\alpha/4) + \cdots$; on pose $i = \sum_{k=0}^{\infty} d_k - d'_k$.

PROPOSITION ET DÉFINITION 1.14. *L'indice i ne dépend pas du choix de Q_j, en fait il ne dépend que du symbole p de P. On appelle i l'indice de P.*

Remarque 1.15. $i = 0$ dans tous les exemples précédents.

2. Théorémes d'integralité

Dans le cas (SC), on a le

THÉORÈME 2.1. *Sous l'hypothèse* (SC), *le cofficient dominant b_1 de $R(t)$*

satisfait $b_1(d-1)! \in \mathbf{Z}$ *et*

$$b_1\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{d}{2}\right)(d-1)! \in \mathbf{Z}$$

En particulier, si $\alpha+2d$ *n'est pas multiple de* 4, $b_1(d-1)!$ *est un entier pair.*

COROLLAIRE 2.2. *Dans le cas riemannien,* $b_1(d-1)! = (2\,\mathrm{vol}\,(X))/(\mathrm{vol}\,(S_d))$ *est un entier et même un entier pair si* $\alpha+2d$ *n'est pas multiple de* 4.

Remarque 2.3. A. Weinstein a prouvé dans [W2] par des méthodes géométriques directes que $(\mathrm{vol}\,(X))/(\mathrm{vol}\,(S_d))$ est un entier.

Preuve du théorème 2.1. C'est une conséquence du lemme bien connu suivant:

LEMME 2.4. *Soit* $(d_k)_{k\geq k_0}$ *une suite d'entiers qui soit une fonction polynomiale de* k *de degré* $d-1$, *alors* d_k *est une combinaison à coefficients entiers des polynômes*

$$U_j(k) = \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!} \quad \textit{avec } 0 \leq j \leq d-1.$$

De ce lemme, on déduit que:

$$b_1\left(k+\frac{\alpha}{4}\right)^{d-1} + b_3\left(k+\frac{\alpha}{4}\right)^{d-3} + \cdots = A_0 U_{d-1}(k) + A_1 U_{d-2}(k) + \cdots$$

Identifiant les termes en k^{d-1} et k^{d-2}, il vient: $b_1(d-1)! = A_0$ et

$$b_1(d-1)!\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{d}{2}\right) = A_0 + A_1,$$

d'où l'on déduit 2.1. Le corollaire 2.2 est une conséquence générale de l'expression de b_1 donnée dans [H] et [D–G]: $b_1 = (2\pi)^{-d}\,\mathrm{vol}\,\{p=1\}$, ce qui dans le cas riemannien se traduit par $b_1 = (2\pi)^{-d}\,\mathrm{vol}\,(S^{d-1})\,\mathrm{vol}\,(X)$, dont on déduit 2.2.

Dans le cas où l'hypothèse (*C*) *seule est satisfaite,* il faut faire appel à un argument un peu plus compliqué sur les suites récurrentes d'entiers pour obtenir le:

THÉORÈME 2.5. *Sous l'hypothèse* (*C*) *et avec les notations du paragraphe* 1, *soit* $N = \mathrm{ppcm}(m_j^{d_j})$, *alors* $b_1 N(d-1)!$ *est un entier.*

Remarque 2.6. Ce théorème est à comparer à celui de A. Weinstein ([W3]) qui, dans le cas riemannien, affirme que si $N_1 = \mathrm{ppcm}(m_j^{d_j-1})$ (on a toujours, N divise N_1), alors $N_1 \cdot (\mathrm{vol}\,(X))/(\mathrm{vol}\,(S^d))$ est un entier, ce qui équivaut à dire que $b_1 N_1 (d-1)!$ est un entier pair.

Ce théorème est une conséquence de 1.4 et du:

LEMME 2.7. *Soit* $d_k = R(k) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{m_j-1} (\omega_{j,l})^k R_{j,l}(k)$ (*où* $\omega_{j,l} = \exp 2\pi i(l/m_j)$, R *polynôme de degré* $d-1$ *et* $R_{j,l}$ *polynôme de degré* $d_j - 1$) *une suite d'entiers pour* $k \geq k_0$, *alors si* $R(t) = b_1 t^{d-1} + b_2 t^{d-2} + \cdots + b_d$ *et si* $N = \mathrm{ppcm}(m_j^{d_j})$, *on a* $N b_1 (d-1)! \in \mathbf{Z}$.

Preuve de 2.7. A toute relation de récurrence sur les suites $(u_k)_{k \geq k_0}$ de la forme $c_0 u_k + c_1 u_{k+1} + \cdots + c_{n-1} u_{k+n-1} = 0$, on associe son polynôme caractéristique $B(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{n-1} t^{n-1}$; il est classique que les solutions de la relation de récurrence sont de la forme $u_k = \sum_j (\alpha_j)^k R_j(k)$ où les α_j sont zéros de B et R_j est un polynôme dont le degré μ_j est égal à l'ordre du zéro α_j diminué de 1. Soit

$$B(t) = \mathrm{ppcm} \left(\frac{t^{m_j} - 1}{t - 1} \right)^{d_j},$$

on a $B(t) = B_1(t) \cdots B_r(t)$ avec $B_k(t) = 1 + \cdots + t^{\nu_k - 1}$ où $\nu_k = \mathrm{ppcm}\,\{m_j \mid d_j \geq k\}$, en particulier $B(1) = \mathrm{ppcm}\,(m_j^{d_j})$. Ce polynôme à coefficients entiers est le polynôme caractéristique d'une relation de récurrence du type précédent dont $d_k - R(k)$ est solution: en effet les $\omega_{i,l}$ sont des zéros d'ordre d_i de B; soit $T(u_k) = c_0 u_k + \cdots + c_{n-1} u_{k+n-1}$ cette relation, on a: $T(d_k) = T(R(k)) = v_k$ est une suite d'entiers, or $T(R(k)) = Q(k)$ est un polynôme de degré $d-1$ de k dont le coefficient dominant est $T(1) b_1$, c'est-à-dire $B(1) b_1$, ce qui prouve le lemme 2.7 grâce à 2.4.

3. La dispersion

Si d_k est la multiplicité de $k + (\alpha/4)$ comme valeur propre de $P_1 = P + Q_1$, on peut écrire les valeurs propres de P^2 sous la forme $\lambda_{k,l}^2 = (k + (\alpha/4))^2 + \mu_{k,l}$ avec $-M \leq \mu_{k,l} \leq \cdots \leq \mu_{k,d_k} \leq M$, on introduit alors les mesures μ_k à support dans $[-M, +M]$ définies par $\mu_k = \sum_{l=1}^{d_k} \delta(\mu_{k,l})$ et on s'intéresse au comportement asymptotique des μ_k lorsque $k \to +\infty$. Cette étude a été entreprise par A. Weinstein dans [W4] dont nous allons préciser certains résultats:

THÉORÈME 3.1. *Il existe des symboles classiques* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{R}_{j,l}$ (*d'ordre* $d-1$ *et*

$d_j - 1$ respectivement) à valeurs dans les distributions à support dans $[-M, +M]$ de la forme $\mathcal{R}(t) \sim \nu_1 t^{d-1} + \nu_3 t^{d-3} + \nu_4 t^{d-4} + \cdots$ tels que, si $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, on ait:

$$\int \rho \, d\mu_k = \int \rho \, d\mathcal{R}\left(k + \frac{\alpha}{4}\right) + \sum \int \rho \, d\mathcal{R}_{j,l}(k)(\omega_{j,l})^k.$$

Preuve. Elle est très proche de celle du théorème 1.4: on introduit $Z_\rho(t) = \sum_k \mu_k(\rho) e^{-it(k+(\alpha/4)} = \mathrm{Tr}\,(\rho(Q)e^{-itP_1})$, où $P^2 = P_1^2 + Q$. Les $\mu_k(\rho)$ sont donc les coefficients de Fourier de $e^{it(\alpha/4)} Z_\rho(t)$, il reste donc à étudier les singularités de $Z_\rho(t)$; il suffit alors de savoir que $\rho(Q)$ est un OPD d'ordre 0 de symbole sous principal nul: l'analyse faite de la trace de e^{-itP_1} dans [D–G] est basée sur le fait que le noyau de cet opérateur est un opérateur intégral de Fourier d'un certain ordre associé à une variété lagrangienne Λ, ce qui reste toujours vrai après composition avec l'OPD $\rho(Q)$. L'assertion relative à la nullité de ν_2 peut s'obtenir en adaptant les raisonnements du paragraphe 2 de [D–G] au problème

$$\begin{cases} \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial u}{\partial t} + P_1 u = 0 \\ u(0) = \rho(Q) f. \end{cases}$$

Un problème difficile et non résolu en général est d'identifier les distributions ν_1, ν_3, etc $\cdots$ (voir cependant la réponse pour ν_1 dans le cas où $P^2 = \Delta_0 + V$, Δ_0 laplacien pour la métrique canonique sur un espace symétrique compact de rang 1 dans [W4]; une étude plus fine de la convergence de $(1/k^{d-1})\mu_k$ vers ν_1 est entreprise dans [CV1]).

Par analogie avec le théorème 1.8, on a le:

THÉORÈME 3.2. *Si P^2 est de transmission (en particulier si c'est un opérateur différentiel, on a $\nu_2 = \nu_4 = \cdots = \nu_{2k} = 0$ ($\forall k \in \mathbf{N}$).*

Preuve. On a vu (proposition 1.8) que P_1^2 et Q sont de transmission. Les $\nu_k(\rho)$ sont tels que, au voisinage de 0,

$$\mathrm{Tr}\,(\rho(Q)e^{-itQ_1}) = \int_0^{+\infty} e^{-it\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k(\rho) \tau^{d-k} \, d\tau \text{ (modulo } C^\infty);$$

ce sont aussi, d'après [D–G], à des coefficients universels près, les résidus aux points $(d+1-k)/2$ du prolongement B méromorphe de la fonction $\zeta_\rho(s) = \mathrm{Tr}\,(\rho(Q)P_1^{-2s})$. Or, d'après Seeley ([S]), si $B = \rho(Q)(P_1^2 - \lambda)^{-1}$ (calculée au sens de

[S]), B a un symbole $b(\lambda, x, \xi) \cong \sum_{j=0}^{+\infty} b_{-2-j}(x, \zeta, \lambda)$, et on a:

$$\text{Résidu}\left(\zeta_\rho, \frac{d-k+1}{2}\right) = c \int_\Gamma \int_{p=1} \lambda^{(d+1-k)/2} b_{-(k+1)}(x, \xi, \lambda)\, d\lambda \cdot \frac{dx\, d\xi}{dp}.$$

Il suffit donc de vérifier que $b_{-(k+1)}(x, -\xi, \lambda) = (-1)^{k+1} b_{-(k+1)}(x, \xi, \lambda)$, c'est-à-dire que B est de transmission: c'est clair pour $(P_1^2 - \lambda)^{-1}$ d'après les formules de [S] p.290 et d'autre part $\rho(Q)$ est de transmission comme limite de polynômes de Q.

4. Relations avec le developpement de Minakschisundaram-Pleijel

Rappelons ([B–G–M]) que, si $P^2 = \Delta$ (ou $\Delta + V$) est un opérateur différentiel, la fonction $Z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-t\lambda_n^2}$ admet quand $t \to 0^+$ un développement asymptotique de la forme:

$$Z(t) \cong (4\pi t)^{-d/2}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots),$$

dont les coefficients a_0, a_1, a_2 et même a_3 ont été calculés.

Etudions d'abord le cas de S^2

Soit g une (SC) métrique sur S^2, on sait ([BE]) que $\alpha = 2$, vol $(S^2, g) = 4\pi$ et donc $d_k = 2k+1$ pour $k \geq k_0$. On note i l'indice de ce spectre et $\lambda_{k,l}^2 = k(k+1) + \mu_{k,l}$, $l = 1, \ldots, d_k$ les valeurs propres du laplacien. On a donc:

$$\sum_{l=1}^{2k+1} \mu_{k,l} = c_1(2k+1) + c_3(2k+1)^{-1} + O(k^{-3})$$

$$\sum_{l=1}^{2k+1} \mu_{k,l}^2 = f_1(2k+1) + f_3(2k+1)^{-1} + O(k^{-3})$$

où $c_j = \int t\, d\nu_j$ et $f_j = \int t^2\, d\nu_j$. D'autre part, on a le développement asymptotique de $Z(t)$: $\sum e^{-t\lambda_{k,l}^2} \cong (4\pi t)^{-1}(\text{vol } X + \frac{1}{3}\int \tau v_g + \cdots)$ où τ est la courbure scalaire; utilisant la formule de Gauss Bonnet, il vient:

$$\sum e^{-t\lambda_{k,l}^2} \cong t^{-1} + \frac{1}{3} + a_2 t + \cdots.$$

On a donc:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-tk(k+1)} \sum_{l=1}^{d_k} e^{-t\mu_{k,l}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{2k+1}^{d_k} e^{-t(k(k+1)+\mu_{k,l})}$$

$$+ \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-tk(k+1)}(2k+1-t\sum \mu_{k,l} + \frac{t^2}{2} \sum \mu_{k,l}^2 + \cdots).$$

Donc, si $Z_0(t) = \sum (2k+1)e^{-tk(k+1)}$ et $W_0(t) = \sum (2k+1)^{-1} e^{-tk(k+1)}$,

$$Z(t) = Z_0(t) + \sum_{k=0}^{+\infty} (d_k - (2k+1)) - tc_1 Z_0 + \frac{t^2}{2} f_1 Z_0 - tc_3 W_0 + \frac{t^2}{2} f_3 W_0 + \cdots).$$

On a donc:

$$Z(t) = Z_0(t)(1 - tc_1) + i + c_3 t \log t + O(t).$$

D'où l'on déduit:

$$i - Bc_1 = 0 \quad \text{et} \quad c_3 = 0.$$

THÉORÈME 4.1. *Sous les hypothèse précédentes,*

$$\sum_{l=1}^{2k+1} \mu_{k,l} = (2k+1)i + O(k^{-3}).$$

En particulier dans le cas d'une métrique obtenue par déformation de la métrique canonique g_0, *on obtient*

$$\frac{1}{d_k} \sum_{l=1}^{d_k} \mu_{k,l} = O(k^{-4})$$

(*résultat conjecturé par Chachère* ([CH])).

Dans le cas général, la même méthode conduit à un résultat dans le cas de déformations de métriques vérifiant (C):

THÉORÈME 4.2. *Soit* $g(t)$ *une famille de métriques riemanniennes à géodésiques* 2π*-périodiques sur une variété* X *de dimension* $d > 2$, *on sait que* $\mathrm{vol}\,(X, g(t))$ *est indépendant de* t, *soit* $a_1(t)$ *le coefficient de développement de*

Minakschisundaram-Pleijel pour la métrique $g(t)$ *et* $c_1(t) = \int t\, d\nu_1$ *pour la métrique* $g(t)$, *on a*: $a_1(t) + \mathrm{vol}\,(X, g(0)) \times c_1(t) = \text{constante}$.

BIBLIOGRAPHIE

[B] BOUTET de MONVEL L., *Nombre de valeurs propres d'im opérateur elliptique et polynôme de Hilbert-Samuel* (Sém. Bourbaki, n° 532 (1979)).

[B-G-M] BERGER M., GAUDUCHON P. et MAZET E., *Le spectre d'une variété riemannienne. Lecture* Notes in Math. 194, Springer (1971).

[BE] BESSE A., *Manifolds all of whose geodesics are closed.* Ergebnisse der Math. und Grenzgebrite, Springer (1978).

[B-G] BOUTET de MONVEL L., et GUILLEMIN V., *The spectral theory of Toeplitz operators* (à paraitre)

[CH] CHACHÈRE G., *Numerical experiments concerning the eigenvalues of the Laplacian on a Zoll surface.* Ph. D. Thesis, U.C. Berkeley (1977).

[CV1] COLIN DE VERDIÈRE Y., *Spectre joint d'OPD qui commutent,* I et II. Preprints (1978). (I à parître dans Duke Math. Journal (1979)).

[CV2] COLIN DE VERDIÈRE Y., *Sur le spectre des opéateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques.* Comptes rendus Ac. Sciences Paris *286,* série A, (1978), 1195–1197.

[D-G] DUISTERMAAT H., GUILLEMIN V., *The spectrum of elliptic operators and periodic geodesics,* Invent. Math. *29,* (1975), 184–269.

[G1] GUILLEMIN V., *Some spectral results on rank one symetric spaces,* Adv. in Math. *28* (1978), 129–137.

[G2] GUILLEMIN V., *Lectures on the spectral theory of elliptic operators.* Duke Math. J. *44* (1977), 485–517.

[H] HÖRMANDER L. *The spectral function of an elliptic operator.* Acta Math. *121* (1968), 193–218.

[H-P] HIRSCHOWITZ A., PIRIOU A., *Propriétés de transmission pour les opérateurs intégraux de Fourier.* Preprint Nice (1978).

[S] SEELEY R., *Complex powers of an elliptic operator.* Proc. Symp. AMS Pure Math. *10* (1967), 288–307.

[W1] WEINSTEIN A., *Fourier integral operators, quantization and the spectra of Riemannian manifolds.* C.N.R.S. symposium, Aix en Provence (1974).

[W2] WEINSTEIN A., *On the volume of manifolds all of whose geodesics are closed.* Journal of Diff. Geom. *9,* (1974), 513–517.

[W3] WEINSTEIN A., *Symplectic V-manifolds,...* Comm. in pure and applied math. *30* (1977), 265–271.

[W4] WEINSTEIN A., *Asymptotic of eigenvalue clusters for the Laplacian plus a potential.* Duke Math. Journal *44* (1977), 883–892.

(29.9.78)

Laboratoire de Mathématiques Pures – Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HÈRES (France)

Reçu le 12 octobre 1978