Calcul d'une intégrale dans le plan : $\iint_{\mathbb{R}^2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)dxdy = 2\pi\text{Aire}(T)$

Yves Colin de Verdière*

15 octobre 2011

Soit $\mathcal{E}$ un plan euclidien orienté dont on note $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un système de coordonnées orthonormales. Soit T un triangle de sommets A, B, C. On suppose que les trois sommets de T ne sont pas alignés et que déterminant$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est positif. Soit, pour $M \in \mathcal{E}$, $\alpha = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$, $\beta = (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})$ et $\gamma = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ les angles orientés sous lesquels M voit les côtés de T. Le but de cette note est le calcul de l'intégrale

$$I = \iint_{\mathcal{E}}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)dxdy\ .$$

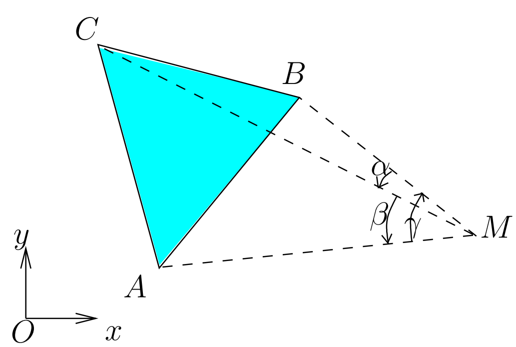

Figure 1: le triangle ABC vu du point M extérieur

D'où vient cette intégrale ?

C'est en écoutant à Vienne (Autriche) en décembre 94 un exposé de Ruedi Seiler, professeur à la Technische Universität de Berlin, que j'ai entendu parler de cette intégrale. Ruedi Seiler a mentionné dans son exposé que cette intégrale avait été étudiée par Alain Connes dans le mémoire [3] aux Publications Mathématiques de l'IHES sur la "géométrie non commutative". Ruedi Seiler laissait entendre que la méthode de Connes était sophistiquée et indirecte, c'est du moins ce que j'avais

*Université Grenoble I, Institut Fourier, Unité mixte de recherche CNRS-UJF 5582, BP 74, 38402-Saint Martin d'Hères Cedex (France) ; yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr ; http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~ycolver/

compris. En fait, je viens de la relire (pages 81 à 83 du mémoire). La méthode est assez naturelle, mais elle ne donne l'intégrale qu'à une constante près dont l'auteur nous dit qu'elle est "easy to check" ! La constante est en fait calculée dans [1] (Lemme 4.4, pages 409 à 411) par une méthode assez compliquée qui ne donne pas accès aux généralisations, par exemple au cas de la géométrie hyperbolique. Donc ce problème s'est inscrit dans ma tête et j'ai continué à y penser pendant la fin du congrès. De retour à Grenoble, j'ai trouvé une méthode élémentaire ("the proof from the Book" selon la terminologie de Paul Erdös[1]) pour faire ce calcul, méthode que je n'ai publiée nulle part et que je suis heureux de présenter ici.

Quelques mots sur le contexte où survient cette intégrale

Dans [1], il s'agit d'une question de physique mathématique liée à "l'effet Hall quantique". L'effet Hall "classique" a été découvert en 1879 par le physicien américain Edwin Herbert Hall : un courant électrique traversant un matériau baignant dans un champ magnétique engendre une tension perpendiculaire à ceux-ci. Cette tension est due à la force de Lorentz qui agit sur les électrons porteurs des charges électriques. Sous certaines conditions, cette tension croît par paliers en progression arithmétique, effet caractéristique de la physique quantique, c'est l'effet Hall quantique entier. Il a été découvert à Grenoble en 1980 par Klaus von Klitzing, physicien allemand ; cette découverte lui a valu le prix Nobel de physique de 1985. Depuis cette période, les physiciens théoriciens et les mathématiciens ont cherché une explication théorique à cet effet et à l'apparition de cette quantification. Qui sont ces entiers ? Dans l'article [1], ces entiers apparaissent comme les traces d'opérateurs en dimension infinie qui comptent des différences régularisées de nombres d'électrons (différences du type $\infty - \infty$). Lorsqu'un opérateur linéaire A dans une espace de Hilbert est à trace, on peut souvent calculer cette trace comme intégrale du noyau sur la diagonale : si A opére sur un espace de fonctions sur X, son noyau K_A est défini par l'identité

$$Af(x) = \int_X K_A(x,y) f(y) dy \ ,$$

et sa trace par

$$\mathrm{Trace}(A) = \int_X K_A(x,x) dx \ .$$

L'intégrale que nous étudions intervient dans le calcul de certaines de ces traces.

Le calcul de l'intégrale

On va montrer que

$$I = 2\pi \mathrm{Aire}(T) \ .$$

Soit $a,\ b,\ c$ les mesures en radians comprises entre $-\pi$ et π des angles $\alpha,\ \beta$ et γ.

Lemme 1 *La fonction* sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifie* $\sin x = x + f(x)$ *avec* f *impaire et, lorsque* $x \to 0$, $f(x) = O(x^3)$.

Preuve.–

C'est clair par la formule de Taylor puisque $f'(0) = f''(0) = 0$.

□

On décompose $\sin\alpha = a + f(a)$ où $f(a) = O(a^3)$ pour $a \to 0$ et f est impaire. On vérifie que $a + b + c$ vaut 0 si M est extérieur à T et, à cause de l'orientation du triangle, 2π sinon.

[1] Il s'agit du livre où Dieu conserve les preuves les plus élégantes de chaque théorème ; un extrait de ce livre est publié dans [2]

Lemme 2 *Lorsque M tend vers l'infini, on a : $a = O\left(1/\sqrt{x^2+y^2}\right)$ et de même pour b et c*

Preuve.–

On part de la formule

$$2\ \mathrm{aire}(MBC) = |\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})| = 2\|\overrightarrow{MB}\|\|\overrightarrow{MC}\|| \sin a|\ .$$

On évalue le déterminant dans le repère orthonormé (x, y) et on obtient, en notant (x, y) les coordonnées de M, (b_1, b_2) celles de B et (c_1, c_2) celles de C,

$$|(b_1 - c_2)x + (c_1 - b_2)y + b_1c_2 - b_2c_1| = \|\overrightarrow{MB}\|\|\overrightarrow{MC}\|| \sin a|\ ,$$

et, posant $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, $r_B = \|\overrightarrow{OB}\|$ et $r_C = \|\overrightarrow{OC}\|$, la majoration

$$| \sin a| \leq \frac{C_1r + C_2}{|(r - r_B)(r - r_C)|}\ .$$

□

On en déduit la convergence de l'intégrale, car $a = O\left(1/\sqrt{x^2+y^2}\right)$ et donc l'intégrande est, à l'infini de $\mathcal{E}$, $O\left(1/(x^2+y^2)^{3/2}\right)$, et la formule

$$I = 2\pi \mathrm{Aire}(T) + \iint_{\mathcal{E}} f(a)dxdy + \iint_{\mathcal{E}} f(b)dxdy + \iint_{\mathcal{E}} f(c)dxdy$$

Les 3 dernières intégrales de la décomposition précédente sont nulles, comme on le voit pour la première par exemple : si σ est la symétrie euclidienne par rapport à la droite BC, $f(a(\sigma M)) = -f(a(M))$, car $a(\sigma M) = -a(M)$.

Généralisations

le calcul précédent s'étend au cas de la géométrie hyperbolique. On peut aussi considérer le cas de polygônes à plus de 3 côtés. Je laisse au lecteur perspicace le soin de proposer une version "continue" pour une courbe fermée plane, comme limite du cas de polygônes dont le nombre de côtés tend vers l'infini. On voit aussi que la fonction "sinus" n'est pas importante. N'importe quelle fonction impaire trois fois continuement dérivable de a peut être utilisée avec une constante de normalisation $2\pi f'(0)$.

Références

[1] Joseph Avron, Ruedi Seiler & Barry Simon. *Commun. Math. Phys.* **159**:399–422 (1994).

[2] Martin Aigner & Günter Ziegler, Proofs from THE BOOK *(4th ed.). Berlin, New York: Springer-Verlag* (2009).

[3] Alain Connes. *Publications Mathématiques de l'IHES* **62**:257–360 (1986).