

Du problème du toboggan d'Abel au problème inverse semi-classique

Par Yves COLIN DE VERDIÈRE

Institut Fourier (université de Grenoble 1), B.P. 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr

& Jean-Paul TRUC

École des Pupilles de l'Air, 38330 Montbonnot-Saint-Martin
jean-paul.truc@prepas.org

Résumé

Cet article traite d'un résultat démontré par Niels Henrik ABEL, à propos d'un problème de mécanique : la reconstruction de la forme d'un toboggan à partir de la fonction donnant le temps d'arrivée en fonction de la hauteur du lâcher initial. Ce résultat a été publié pour la première fois en allemand dans le *Journal de Crelle* [1], puis traduit en français en 1881 dans le premier volume des œuvres complètes de Niels ABEL [2].

Nous en donnons la démonstration basée sur la *transformée d'Abel*, en étendant le résultat d'ABEL au cas de toboggans non monotones, puis nous examinons quelques problèmes connexes classiques comme les courbes tautochrones et les périodes des oscillations des pendules. Enfin, nous montrons en quoi ces méthodes sont utiles et actuelles en donnant une application à la sismologie et en terminant par la résolution d'un problème inverse de mécanique semi-classique.



Figure 1
Portrait de Niels ABEL
par Johan GØRBITZ (1826).
© Département de
Mathématiques,
université d'Oslo.

1. Le problème du toboggan

Nous commençons par décrire le problème mécanique d'ABEL [1].

Soit $f : [-a, 0]_x \rightarrow \mathbb{R}_z$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que $f(-a) = E_0 > 0$, $f(0) = 0$ et $f'(x) < 0$ pour $-a \leq x \leq 0$. On considère un point pesant de masse m qui se déplace sans frottement sur le graphe de f dans un champ de pesanteur vertical, avec $g = 1$ comme sur la figure 2.

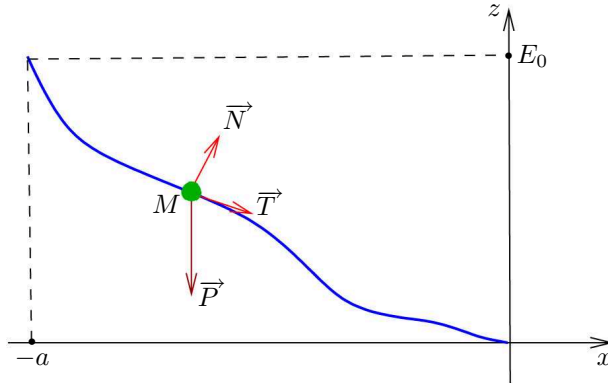


Figure 2. Point matériel sur un toboggan.

Pour chaque valeur $z_0 \in [0, E_0]$ de z , on considère les conditions initiales

$$z(t=0) = z_0 \text{ et } \dot{z}(t=0) = 0,$$

ce qui signifie que le point M est placé à l'instant $t = 0$ sur le toboggan au point d'altitude z_0 et lâché sans vitesse initiale. On note $\tau(z_0)$ la valeur de $t \geq 0$ telle que

$$x(\tau(z_0)) = 0 \text{ et } z(\tau(z_0)) = 0. \quad (1)$$

$\tau(z_0)$ est donc le temps de descente du point M de sa position initiale jusqu'au bas du toboggan. La question d'ABEL est la suivante :

La seule connaissance de la fonction temps d'arrivée $z \mapsto \tau(z)$ permet-elle de reconstituer le toboggan, i.e. la fonction $x \mapsto f(x)$?

La réponse est **oui** ; de plus, on dispose de formules explicites pour effectuer cette reconstruction. Commençons par rattacher le problème du toboggan à une classe de problèmes plus générale.

Nous repérons la position du point M sur la courbe par son abscisse curviligne s calculée à partir du point de départ (la fonction f est momentanément supposée de classe \mathcal{C}^2). Nous utilisons le repère de Frenet (\vec{T}, \vec{N}) , dans lequel nous projetons la relation fondamentale de la dynamique selon le vecteur \vec{T} . Nous noterons

$$\alpha = (\vec{i}, \vec{T})$$

l'angle du vecteur tangent \vec{T} avec l'horizontale (on a par exemple, sur la figure 2, $\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ et $\sin \alpha < 0$). On aura donc, en ce qui concerne l'accélération tangentielle : $m\gamma_T = m\ddot{s} = -mg \sin \alpha$, ou encore, en prenant $g = 1$,

$$\ddot{s} = -\sin \alpha. \quad (2)$$

Remarque 1.1 — L'accélération normale est donnée, en appelant R le rayon courbure, par $\gamma_N = \dot{s}^2/R$ — rappelons nous que dans le plan, le rayon de courbure est algébrique ; sur la figure 2 par exemple, $R > 0$ sur les parties convexes et $R < 0$ sur les parties concaves du toboggan. La réaction unilatérale du support est normale en l'absence de frottement et s'écrit $R_e \vec{N}$. En projetant sur la normale on obtient

$$R_e = \frac{m\dot{s}^2}{R} + mg \cos \alpha.$$

La conservation de l'énergie nous donne

$$\frac{m\dot{s}^2}{2} = mg(z_0 - z).$$

En annulant R_e , on voit apparaître une condition nécessaire pour que le point matériel quitte le toboggan au point d'altitude z si la contrainte est unilatérale :

$$\cos \alpha = \frac{2(z - z_0)}{R}.$$

Cette condition porte essentiellement sur la géométrie du toboggan — une condition supplémentaire du premier ordre est à rajouter pour que le décollage ait lieu effectivement.

À partir de maintenant, nous prendrons $m = 2$ comme masse du point matériel, ainsi que $g = 1$. Comme M admet $x(s)$ et $z(s)$ pour coordonnées et que $\vec{T} = d\vec{M}/ds$, nous avons

$$z'(s) = \sin \alpha. \quad (3)$$

En introduisant le potentiel

$$V(s) = mgz = 2z(s) \quad (4)$$

l'équation (2) se met sous la forme $2\ddot{s} = -V'(s)$. **Nous nous sommes donc ramenés à un problème plus simple et plus général, celui d'une particule de masse 2 dans un potentiel V obéissant à une équation de Newton de la forme**

$$2\ddot{x} = -V'(x). \quad (5)$$

Dans notre exemple, la variable $x = s$ est l'abscisse curviligne et le potentiel $V = 2z(s)$ est proportionnel à l'altitude. Bien sûr, une fonction $s \mapsto z(s)$ n'est pas quelconque et doit vérifier $|z'(s)| < 1$ à cause de (3). Le résultat d'ABEL permet dans ce type de problèmes de reconstituer le potentiel V si on connaît le temps d'arrivée pour tout niveau d'énergie. Plus précisément :

Théorème 1.1 (ABEL, 1826) — Soit $V : [-a, 0] \rightarrow [0, +\infty[$, continûment dérivable, vérifiant $V(0) = 0$ et $V'(x) < 0$ pour $-a \leq x \leq 0$. Nous notons $E_0 = V(-a)$ et, pour $0 \leq E \leq E_0$, $\tau(E)$ le temps d'arrivée en 0 (i.e. : $x(\tau(E)) = 0$) pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} V(x(0)) = E \\ \dot{x}(0) = 0 \\ 2\ddot{x} = -V'(x). \end{cases}$$

Alors la fonction $\tau : [0, E_0] \rightarrow [0, +\infty[$ détermine uniquement la fonction V .

Pour démontrer ce théorème, que nous appelons le *théorème d'Abel*, nous aurons besoin d'étudier une transformation intégrale simple introduite par ABEL.

2. La transformée d'Abel

Lemme 2.1 (Transformation d'Abel) — Nous notons \mathcal{A} l'opérateur linéaire défini, pour toute fonction u continue sur le segment $[0, b]$ à valeurs réelles, par $\mathcal{A}u(0) = 0$ et, pour tout $y \in]0, b]$,

$$\mathcal{A}u(y) = \int_0^y \frac{u(x)}{\sqrt{y-x}} dx.$$

Alors, pour tout $y \in [0, b]$,

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}u)(y) = \pi \int_0^y u(x) dx.$$

PREUVE. Soit y appartenant à $]0, b]$. On a

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}u)(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-z}} \left(\int_0^z \frac{u(x)}{\sqrt{z-x}} dx \right) dz.$$

En appliquant le théorème de Fubini, il vient

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}u)(y) = \int_0^y \left(\int_x^y \frac{1}{\sqrt{(y-z)(z-x)}} dz \right) u(x) dx$$

et on obtient le résultat à partir de l'identité

$$\int_x^y \frac{1}{\sqrt{(y-z)(z-x)}} dz = \pi. \quad \square$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème d'Abel.

PREUVE. On a, par conservation de l'énergie ($m = 2$),

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) = E.$$

Le temps de descente s'exprime par l'intégrale

$$\tau(E) = \int_{x(0)}^0 \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} dx,$$

soit, en posant $u = V(x)$ ou encore, W étant la fonction inverse de V , $x = W(u)$,

$$\tau(E) = - \int_0^E \frac{W'(u)}{\sqrt{E-u}} du,$$

ce qui s'écrit encore : $\tau(E) = -\mathcal{A}W'(E)$. En appliquant de nouveau la transformation d'Abel, on obtient

$$\mathcal{A}\tau(E) = -\mathcal{A}^2 W'(E) = -\pi \int_0^E W'(u) du = -\pi W(E)$$

d'où

$$W(E) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{A}\tau(E). \quad (6)$$

Il est donc possible de calculer W , donc le potentiel V à partir de la fonction τ . \square

3. Le cas où le toboggan a des parties horizontales

3.1. Valeurs critiques et mesures de Stieltjes

Nous avons supposé que la dérivée de V était partout < 0 . On peut s'affranchir de cette propriété. Nous supposons donc seulement que $E_0 > 0$, que V est de classe \mathcal{C}^1 et que, pour tout $x \in [-a, 0]$,

$$V'(x) \leq 0.$$

Il est alors clair que le temps $\tau(E)$ est infini dans le cas où $V'(x(0)) = 0$. Montrons que la fonction τ est alors une fonction intégrable au sens de Lebesgue, et que le théorème d'Abel reste vrai.

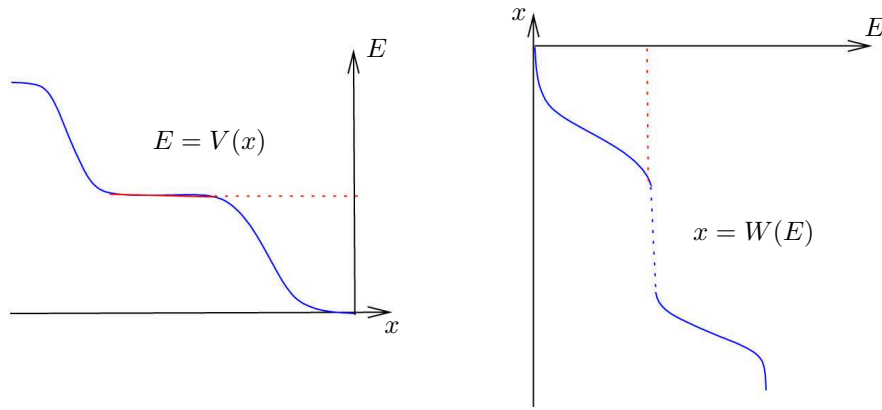


Figure 3. Toboggan avec des parties horizontales.

Définition 3.1 — E est une *valeur critique* de V s'il existe un x tel que $V'(x) = 0$ et $V(x) = E$.

Le théorème de Sard affirme que l'ensemble des valeurs critiques d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 est de mesure de Lebesgue nulle.

Pour traiter le cas du toboggan avec des parties horizontales, nous utiliserons le lemme suivant, dont la démonstration est donnée plus loin.

Lemme 3.1 — Nous supposons que $V : [-a, 0] \rightarrow [0, E_0]$ est de classe \mathcal{C}^1 et que, pour tout $x \in [-a, 0]$, $V'(x) \leq 0$. Si W est la fonction inverse¹ de V (W peut alors avoir des sauts), alors, pour tout E non critique (et donc pour presque tout E !), on a

$$\tau(E) = - \int_0^E \frac{1}{\sqrt{E-u}} dW(u)$$

où dW est la mesure de Stieltjes associée à W .

Avant de poursuivre, nous rappelons quelques résultats sur les mesures de Stieltjes.

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . La *mesure de Stieltjes* dW associée à une fonction croissante (respectivement décroissante) $W : I \rightarrow \mathbb{R}$ est définie, pour une fonction

1. W est définie presque partout ; plus précisément, W est définie en dehors des paliers de V où W a une discontinuité avec une limite à droite et une limite à gauche.

$g : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 à support compact, par²

$$\int_I g(u) dW(u) = - \int_I g'(u) W(u) |du|.$$

Par suite, dW est la dérivée de W au sens des distributions. La distribution dW ainsi définie est positive (respectivement négative), donc, en utilisant un théorème de Laurent SCHWARTZ, on voit que c'est une mesure de Radon.

Par exemple, si $I = \mathbb{R}$ et si W est la fonction caractéristique de $]0, +\infty[$, dW est la masse de Dirac en 0; si W est de classe \mathcal{C}^1 , $dW(u) = W'(u)du$. Si W est de classe \mathcal{C}^1 en dehors d'un point u_0 où W a un saut $W(u_0^+) - W(u_0^-) = m$, on a $dW(u) = W'(u)du + m\delta(u_0)$. Remarquons que, dans le cas présent, dW est aussi l'image directe de la mesure de Lebesgue sur $[-a, 0]$ par la fonction V caractérisée par

$$\int_I f(u) dW(u) = \int_{-a}^0 f(V(x)) dx.$$

Théorème 3.1 — La transformation d'Abel s'étend en une application des mesures de Stieltjes à valeurs dans les fonctions intégrables et on a, pour presque tout E ,

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{A}(dW))(E_-) = \pi(W(E_-) - W(0_+)).$$

PREUVE. On utilise le théorème de Fubini pour des fonctions positives : si $F(x, y) \geq 0$ pour tout $x \in I$ et tout $y \in J$, si $d\mu$ (respectivement $d\nu$) est une mesure de Radon positive sur l'ouvert I (respectivement J) et si

$$K = \int_I \left(\int_J F(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) < +\infty,$$

alors $\int_I F(x, y) d\mu(x)$ est finie pour presque tout y et on peut permuter les intégrales.

On prend $I = J =]0, E[$, $d\mu = dW$, $d\nu = |dy|$ et

$$F(x, y) = 1_{x < y < E} [(E - y)(y - x)]^{-\frac{1}{2}}.$$

On trouve ainsi $K = \pi(W(E_-) - W(0_+))$. \square

Le théorème 3.1 nous dit que la fonction $\tau(E)$, bien qu'infinie aux valeurs critiques de V , est intégrable. Combiné au lemme 3.1, il dit aussi que le théorème 1.1 d'Abel s'étend au cas d'un toboggan avec des paliers : un toboggan avec paliers est reconstructible à partir de la fonction intégrable $\tau(E)$ au moyen de la transformation d'Abel.

2. Contrairement à l'usage, nous notons $|dx|$ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , que nous distinguons ainsi de la forme différentielle dx . Nous avons donc, pour $a \neq b$,

$$\int_{[a, b]} f(x) |dx| = \pm \int_a^b f(x) dx$$

suivant que $a < b$ ou $a > b$. Cela rend plus claires les formules de changements de variables avec les valeurs absolues des déterminants jacobiens.

3.2. Démonstration simplifiée du lemme 3.1

Nous démontrons le lemme 3.1 sous l'hypothèse simplificatrice d'un nombre fini de paliers. Nous considérons une subdivision de l'intervalle $[-a, 0]$ correspondant aux paliers du potentiel :

$$-a \leq x_1 \leq y_1 < x_2 \leq y_2 < \cdots < x_n \leq y_n \leq 0$$

où V' s'annule exactement sur les intervalles $[x_i, y_i]$ pour $i = 1, \dots, n$. Nous notons $E_i = V(x_i) = V(y_i)$ pour $i = 1, \dots, n$. On part d'une valeur d'énergie $E = V(x(0))$ non critique. Au voisinage de $x(0)$, $V'(x) \neq 0$, donc le mobile prend de la vitesse; examinons comment il traverse un palier $[x_i, y_i]$ pour la valeur d'énergie E_i . Il arrive en $x = x_i$ avec une vitesse v qu'il va conserver pendant toute la traversée du palier. On calcule v par : $v^2 + V(x_i) = v^2 + E_i = E$, ce qui donne $v = \sqrt{E - E_i}$. La durée τ_i de la traversée du palier est donc

$$\tau_i = \frac{y_i - x_i}{\sqrt{E - E_i}}$$

ou encore, en utilisant la fonction inverse W ,

$$\tau_i = \frac{W(E_i^-) - W(E_i^+)}{\sqrt{E - E_i}} = -\frac{W(E_i^+) - W(E_i^-)}{\sqrt{E - E_i}}.$$

Nous constatons alors que la durée τ_i est égale à l'opposé de l'action d'une masse de Dirac δ_{E_i} appliquée à la fonction $u \mapsto 1/\sqrt{E - u}$ et multipliée par l'amplitude du saut de W . Nous examinons maintenant comment le mobile se déplace entre deux paliers, pour aller de $V = E$ au premier palier suivant E , ou bien pour se déplacer entre deux paliers de niveaux d'énergie $< E$. Nous supposons par exemple que y_i est la fin d'un palier et x_{i+1} le début d'un autre palier. Nous nous plaçons sur un segment $[c, d] \subset]y_i, x_{i+1}[$. Le temps $\tau(c, d)$ pour parcourir cet intervalle est donné par

$$\tau(c, d) = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} dx$$

et sur cet intervalle, on dispose d'une fonction réciproque W de classe \mathcal{C}^1 , donc, par changement de variable,

$$\tau(c, d) = \int_{E_c}^{E_d} \frac{W'(u)}{\sqrt{E - u}} du$$

ou, comme $E_c > E_d$ car W est décroissante,

$$\tau(c, d) = -\int_{E_d}^{E_c} \frac{W'(u)}{\sqrt{E - u}} du.$$

Quand c tend vers y_i et d vers x_{i+1} , cette intégrale converge; en effet, W' est négative, intégrable sur $K_i =]E_{i+1}, E_i[$ (et $\int_{K_i} W'(u) du = y_i - x_{i+1}$), et d'autre part la fonction $u \mapsto 1/\sqrt{E - u}$ est bornée sur ce même intervalle. La durée de traversée entre deux paliers $E_{i+1} < E_i$ est donc

$$t_i = -\int_{E_{i+1}}^{E_i} \frac{W'(u)}{\sqrt{E - u}} du$$

et le temps mis pour arriver au premier palier est

$$t = - \int_{E_1}^E \frac{W'(u)}{\sqrt{E-u}} du$$

(de même pour aller du dernier palier à l'arrivée). Pour obtenir le temps de descente $\tau(E)$, il ne reste plus qu'à ajouter toutes ces durées, et on obtient

$$\tau(E) = - \int_0^E \frac{W'(u)}{\sqrt{E-u}} du - \sum_{E_i < E} (W(E_i^+) - W(E_i^-)) \delta_{E_i} \left(\frac{1}{\sqrt{E-u}} \right).$$

On retrouve exactement l'action de la mesure de Stieljes, telle qu'elle a été définie (dérivée au sens des distributions de W , avec des masses de Dirac aux valeurs critiques). On a donc bien

$$\tau(E) = - \int_0^E \frac{1}{\sqrt{E-u}} dW(u)$$

pour toute valeur non critique.

4. Le toboggan avec des creux

On considère ici l'un des cas les plus simples d'un toboggan non monotone.

Nous supposons que le potentiel $V : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les conditions suivantes :

- V est de classe \mathcal{C}^1 ,
- $V'(x) < 0$ pour $0 \leq x < b$ et pour $c < x < a$,
- $V'(x) > 0$ pour $b < x < c$.

Nous posons $E_0 = V(0)$, $E_1 = V(b)$ et $E_2 = V(c)$.

Nous supposons que $E_1 < E_2 < E_0$ et que $V(a) = 0$.

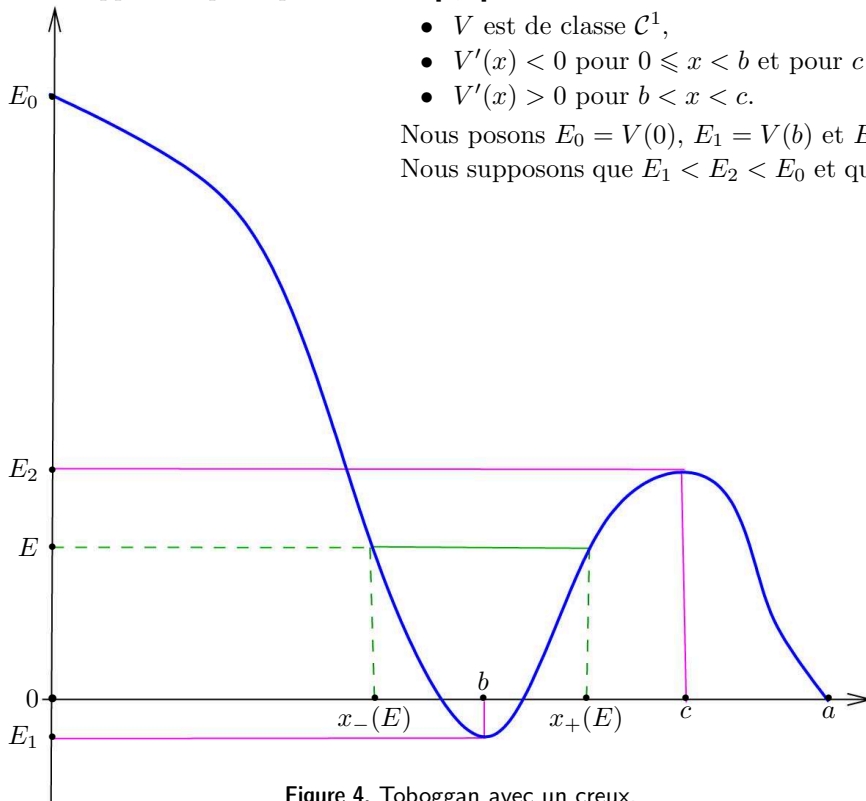


Figure 4. Toboggan avec un creux.

La fonction $\tau(E)$ est bien définie pour $E \neq E_2$ ($\tau(E_2) = +\infty$) ainsi que pour $E \neq E_1$ ($\tau(E_1) = +\infty$). Si $E_1 < E < E_2$, nous notons $x_-(E)$, $x_+(E)$ et $x_0(E)$ les trois solutions de l'équation $V(x) = E$, avec $x_-(E) < x_+(E) < x_0(E)$. Pour $E < E_2$, on prend $x_0(E)$ comme position de départ. Nous posons $I =]E_1, E_2[$ et, pour $E \in I$, nous notons $T(E)$ la période des oscillations dans l'intervalle $[x_-(E), x_+(E)]$ (situées dans le creux du pendule).

On a alors le théorème suivant.

Théorème 4.1 — La fonction V est, en dehors de l'intervalle $K =]x_-(E_2), x_+(E_2)[$, déterminée par la connaissance des fonctions $E \mapsto T(E)$ et $E \mapsto \tau(E)$.

PREUVE. Nous notons

$$W_1 : [E_1, E_0] \rightarrow [0, b], \quad W_2 : [E_1, E_2] \rightarrow [b, c] \quad \text{et} \quad W_3 : [0, E_2] \rightarrow [c, a]$$

les trois morceaux de fonctions inverses de V . On a alors les équations suivantes :

- Si $E_2 < E < E_0$,

$$\tau(E) = - \int_{E_1}^E \frac{W_1'(u)}{\sqrt{E-u}} du + \int_{E_1}^{E_2} \frac{W_2'(u)}{\sqrt{E-u}} du - \int_0^{E_2} \frac{W_3'(u)}{\sqrt{E-u}} du. \quad (7)$$

- Si $E_1 < E < E_2$,

$$T(E) = 2 \int_{E_1}^E \frac{W_2'(u) - W_1'(u)}{\sqrt{E-u}} du. \quad (8)$$

- Si $0 < E < E_2$,

$$\tau(E) = - \int_0^E \frac{W_3'(u)}{\sqrt{E-u}} du. \quad (9)$$

De l'équation (9), on tire comme plus haut la fonction W_3 . De l'équation (8) et de la connaissance de $T(E)$, on tire $W_2 - W_1$ sur l'intervalle $[E_1, E_2]$. Enfin, de l'équation (7), de la connaissance de $\tau(E)$ et de $W_2 - W_1$ sur l'intervalle $[E_1, E_2]$, on tire W_1 sur l'intervalle $[E_2, E_0]$. Tout ceci permet de reconstituer V en dehors de K . \square

5. Une autre application de la transformation d'Abel : l'inversion de Wiechert-Herglotz (1907-1910)

On dispose d'une jolie application de la transformée d'Abel en sismologie (voir par exemple [3], chapitre 12).

On suppose pour simplifier que la surface de la terre est le plan $z = 0$ et que la vitesse $c(z)$ ($z < 0$) de propagation des ondes sismiques ne dépend que de z . Dans l'approximation de l'optique géométrique, la détermination des trajectoires des ondes, appelées aussi les « rais », peut se ramener à des quadratures ; on peut interpréter les rais comme les géodésiques de la métrique $ds/c(z)$, le temps de parcours étant alors la longueur de la géodésique.

Supposons qu'un tremblement de terre ou une explosion ait lieu à la surface au point $x = 0, z = 0$. On peut alors mesurer, en chaque point $(x, z = 0)$, le temps $T(x)$ d'arrivée

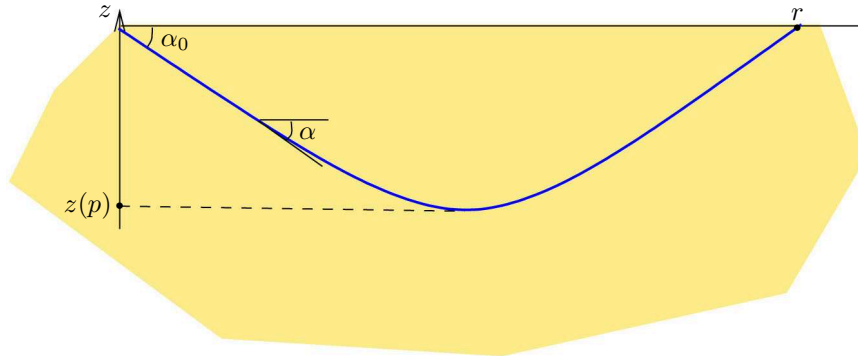


Figure 5. Un rai.

de l'onde. Il s'agit de retrouver le profil $c(z)$ à partir de la connaissance de la fonction $T(x) = \tau(r)$ où $r = |x|$. Cette fonction est déterminée par une expression de la forme

$$\tau(r) = \int_{(\gamma)} \frac{1}{c(z)} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz$$

où (γ) est la géodésique correspondant au minimum de la fonctionnelle.

Nous supposons que c est une fonction strictement décroissante de z (les ondes se déplacent plus vite en profondeur). L'équation des géodésiques est l'équation d'Euler-Lagrange (voir par exemple [4, 8, 12]) associée à

$$\int \frac{1}{c(z)} \sqrt{1 + x'^2} |dz|,$$

soit

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{x'}{c(z) \sqrt{1 + x'^2}} \right) = 0$$

ou encore

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\cos \alpha}{c(z)} \right) = 0,$$

d'où, en définissant α comme l'angle de $0\vec{r}$ avec la géodésique et en supposant pour simplifier que $c(0) = 1$, on déduit que $\cos \alpha = c(z) \cos \alpha_0$. On retrouve ainsi la loi de la réfraction de Snell-Descartes. Posons $p = \cos \alpha_0$ et notons $z(p)$ l'altitude du point où la tangente à la géodésique est horizontale; on a $c(z(p)) = p^{-1}$. La formule de variation première donne

$$\frac{d\tau}{dr} = \cos \alpha_0 = p.$$

Exprimant $r = 2 \int_{z(p)}^0 \frac{1}{\tan \alpha} dz$, il vient

$$r = 2p \int_{z(p)}^0 \frac{1}{\sqrt{c^{-2}(z) - p^2}} dz$$

où $c^{-2}(z(p)) = p^2$. Cette transformation intégrale s'exprime en terme d'une transformation d'Abel de la fonction c^{-2} .

6. Courbes tautochrones

Une *courbe tautochrone* est une courbe telle que le temps mis par un point matériel se déplaçant sur la courbe (sans frottement, dans un champ de gravitation uniforme) pour atteindre le point le plus bas de la courbe est indépendant de son point de départ. Le problème de déterminer ces courbes a passionné les mathématiciens du dix-septième siècle. C'est Christian HUYGENS qui l'a résolu en 1659. Dans son ouvrage intitulé *Horologium oscillatorium*, paru en 1673, il démontre que ces courbes sont des cycloïdes. On trouve dans un des cahiers de Niels ABEL, écrit probablement avant 1820, des notes sur les courbes tautochrones [10] ; ceci prouve que Niels ABEL s'intéressait déjà à ce problème de mécanique alors qu'il était encore lycéen.

Nous abordons ici ce problème par le biais du théorème d'Abel. Cela impose une légère restriction : en effet les potentiels envisagés dans le théorème 1.1 sont décroissants. Nous nous limiterons donc à chercher les courbes tautochrones dont l'altitude décroît. Ces courbes constituent des toboggans pour lesquels le temps d'arrivée $\tau(E)$ est une fonction constante, de valeur τ_0 .

Nous commençons par calculer la transformée d'Abel de la fonction constante τ_0 :

$$\mathcal{A}\tau_0(E) = \int_0^E \frac{\tau_0}{\sqrt{E-x}} dx = 2\tau_0\sqrt{E}.$$

En utilisant la relation (6), nous pouvons alors déterminer la fonction inverse du potentiel ; c'est $W(E) = -2\tau_0\sqrt{E}/\pi$. Nous en déduisons que le potentiel est

$$V(x) = \frac{\pi^2 x^2}{4\tau_0^2}.$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à prouver que la courbe tautochrone associée à ce potentiel, considéré comme fonction de l'abscisse curviligne, est une cycloïde.

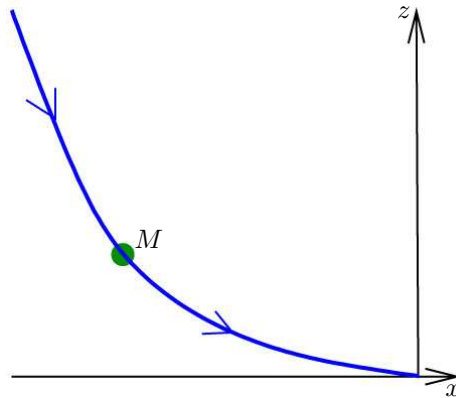


Figure 6. Courbe tautochrone.

Nous calculons l'abscisse curviligne à partir du point bas 0, la courbe étant orientée dans le sens de la descente (voir la figure 6). L'abscisse curviligne s varie alors dans un intervalle $[-\mathcal{L}, 0]$, comme la variable x dans le théorème 1.1. Nous supposons toujours que $m = 2$ et $g = 1$.

D'après (4), l'altitude est donnée par

$$z(s) = \frac{1}{2}V(s) = \frac{\pi^2 s^2}{8\tau_0^2}.$$

Nous en déduisons, en notant $M(s) = (x(s), y(s))$ le point mobile, que $z'(s) = \frac{\pi^2 s}{4\tau_0^2}$, d'où

$$x'(s) = \sqrt{1 - z'(s)^2} = \sqrt{1 - \frac{\pi^4 s^2}{16\tau_0^4}}.$$

Nous posons

$$\frac{\pi^2 s}{4\tau_0^2} = \cos \frac{\theta}{2}$$

avec $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, de telle sorte que $\sin \theta < 0$. Pour $\theta = \pi$, le point est en O , $s = 0$ et $x = 0$; pour $\theta = 2\pi$, M est en $A = (-a, V(-a))$ et $s = -\mathcal{L} < 0$. Nous pouvons alors calculer les coordonnées x et z du point $M(s)$. On a

$$x = \int_0^s x'(\xi) d\xi = -\frac{2\tau_0^2}{\pi^2} \int_\pi^\theta \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) du = -\frac{\tau_0^2}{\pi^2}(\theta - \sin \theta) + \frac{\tau_0^2}{\pi}$$

et de même

$$z = \frac{2\tau_0^2}{\pi^2} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\tau_0^2}{\pi^2}(1 + \cos \theta).$$

On retrouve bien la représentation paramétrique d'une cycloïde.

7. Période des pendules

On considère maintenant les oscillations périodiques d'un point matériel dans un potentiel V de classe \mathcal{C}^1 présentant un minimum en $x = 0$. On appellera un tel système un *pendule*, par référence à l'exemple d'un point matériel suspendu à un bras de longueur L . Dans le cas du pendule pesant de longueur L , l'équation des oscillations s'écrit

$$\ddot{\alpha} = \frac{g}{L} \sin \alpha$$

ou encore

$$\ddot{\alpha} = -V'(\alpha)$$

en prenant comme potentiel V :

$$V(\alpha) = \cos\left(\frac{g\alpha}{L}\right).$$

Nous considérons maintenant un pendule régi par l'équation (5), pour un potentiel $V(x)$ défini sur $[-a, c]$, où $-a < 0 < c$, supposé vérifier :

- $V(x) \geq 0$ pour tout x ,
- $V(0) = 0$,
- $xV'(x) > 0$ pour $x \neq 0$,
- $V(-a) = V(c)$.

Nous posons $E_0 = V(-a) = V(c)$.

Pour chaque $E \in]0, E_0]$, nous notons $T(E)$ la période des oscillations d'énergie E du point matériel de masse $m = 2$ dans le potentiel V . Par conservation de l'énergie, nous avons, à tout instant, $E = \dot{x}^2 + V(x)$

Nous notons $W_{\pm} : [0, E_0] \rightarrow [0, +\infty[$ les fonctions inverses de V sur $[0, c[$ et $[-a, 0[$ respectivement. Nous pouvons alors exprimer la période à l'aide de la transformation d'Abel.

Proposition 7.1 — La période $T(E)$ est donnée par

$$T(E) = 2\mathcal{A}(W_+'(E)) - 2\mathcal{A}(W_-'(E)).$$

PREUVE. Par la conservation de l'énergie, on a toujours $\dot{x}^2 + V(x) = E$, ce qui permet de calculer

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}}.$$

Nous posons $\{x \mid V(x) \leq E\} = [x_-(E), x_+(E)]$ et nous nous plaçons sur un intervalle de temps où x croît de $x_-(E)$ à $x_+(E)$. Cet intervalle a une durée d'une demi-période, ce qui donne

$$T(E) = 2 \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} dx.$$

Nous coupons l'intégrale en deux parties :

$$T(E) = 2 \int_{x_-(E)}^0 \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} dx + 2 \int_0^{x_+(E)} \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} dx.$$

Nous effectuons dans la première intégrale le changement de variable $x = W_-(u)$, et dans la seconde le changement $x = W_+(u)$. Il vient

$$\begin{aligned} T(E) &= 2 \int_E^0 \frac{W_-'(u)}{\sqrt{E - u}} du + 2 \int_0^E \frac{W_+'(u)}{\sqrt{E - u}} du \\ &= -2 \int_0^E \frac{W_-'(u)}{\sqrt{E - u}} du + 2 \int_0^E \frac{W_+'(u)}{\sqrt{E - u}} du, \end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$T(E) = 2\mathcal{A}(W_+'(E)) - 2\mathcal{A}(W_-'(E)). \quad \square$$

En particulier, on a

$$W_+ - W_- = \frac{2}{\pi} \mathcal{A}T.$$

Il existe ainsi de nombreux potentiels distincts ayant la même fonction $T(E)$. Parmi ceux-ci, il en existe un seul qui est pair, i.e. $W_+ + W_- \equiv 0$.

Exemple 7.1 — Pour l'oscillateur harmonique nous avons $V(x) = x^2$ et $T(E) = \pi$, mais le potentiel $V(x) = (\sqrt{1 + 2x} - 1)^2$, défini sur $]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, vérifie aussi $T(E) = \pi$; en effet

$$W_{\pm}(u) = \pm\sqrt{u} + \frac{u}{2},$$

donc $W_+(u) - W_-(u) = 2\sqrt{u}$ a la même valeur que pour le potentiel $V(x) = x^2$.

8. Problème spectral inverse

Soit D un domaine borné connexe à bord du plan, et soit

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_j < \dots$$

la suite des valeurs propres du laplacien dans D , avec les conditions au bord de Dirichlet. Pour chacun des λ_j , il existe une fonction $\phi_j : D \rightarrow \mathbb{C}$ non identiquement nulle telle que

$$\begin{cases} \Delta \phi_j + \lambda_j \phi_j = 0, \\ \phi_j(x) = 0 \text{ si } x \in \partial D. \end{cases}$$

On peut choisir les ϕ_j de façon à ce qu'elles forment une base orthonormale de $L^2(D, |dx|)$. La suite des λ_j est appelée le *spectre de D* . Du point de vue physique, les $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$ sont les fréquences de modes propres d'oscillations de la membrane vibrante D fixée au bord, d'où le terme *tambour* utilisé par Mark KAC.

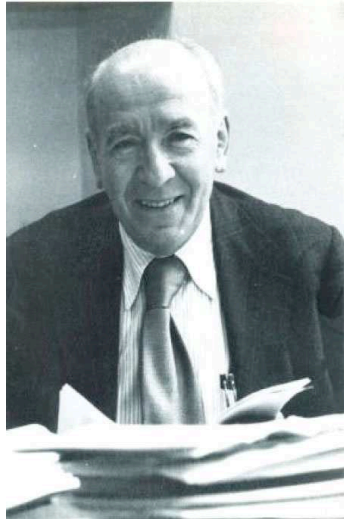


Figure 7. Mark KAC.
© Mathematisches
Forschungsinstitut
Oberwolfach.

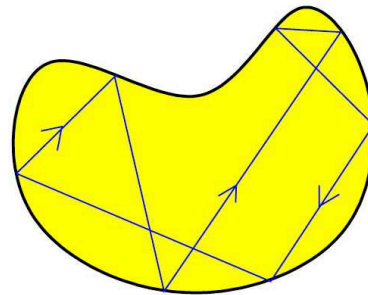


Figure 8
Trajectoire
périodique dans
un billard.

Dans son fameux article de 1966 [7], Mark KAC pose le problème suivant :

Le domaine D est-il déterminé par la suite des λ_j ?

KAC montre que l'aire de D , ainsi que la longueur du bord ∂D de D , sont déterminées par le spectre de D . Le premier auteur a prouvé dans sa thèse en 1973 que, si D_1 et D_2 ont même spectre du laplacien, les billards associés ont des trajectoires périodiques de mêmes longueurs.

On sait maintenant [6] qu'il existe des paires de domaines polygonaux D_1 et D_2 non isométriques ayant mêmes spectres. Les deux domaines de la figure 9 (page suivante) en sont des exemples ; on peut voir en particulier qu'ils ont mêmes aires, mêmes longueurs des bords et mêmes angles.

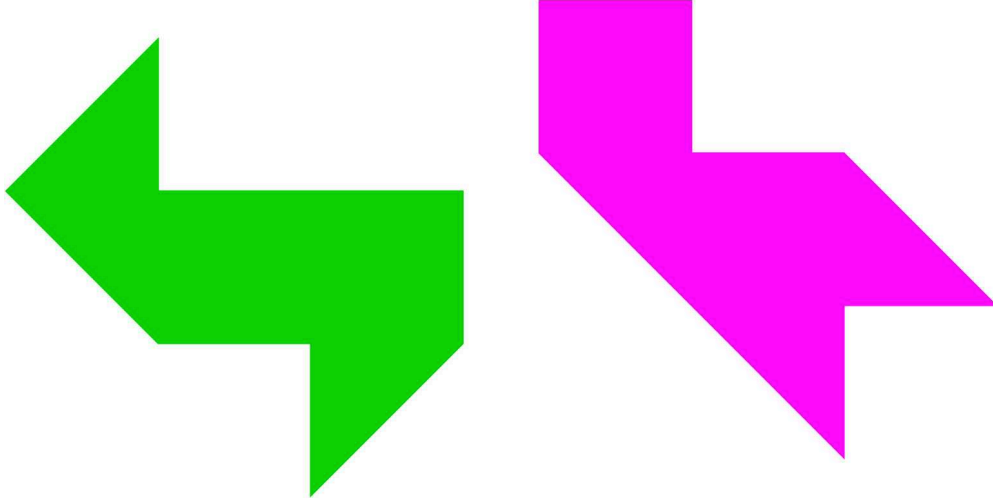


Figure 9. Deux domaines isospectraux.

9. Le problème inverse semi-classique

Il s'agit d'un problème inverse du type de celui de KAC. On considère, pour chaque valeur de la constante de Planck $\hbar > 0$ (en physique mathématique, et plus particulièrement en analyse semi-classique, il est courant de considérer \hbar comme un paramètre qui tend vers zéro), l'opérateur de Schrödinger

$$\hat{H}_\hbar = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

où l'on suppose, pour simplifier, que V est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , à valeurs positives ou nulles, vérifiant $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$, $xV'(x) > 0$ pour $x \neq 0$, et $V(0) = 0$. L'opérateur \hat{H}_\hbar admet un spectre

$$0 < \lambda_1(\hbar) < \dots < \lambda_j(\hbar) < \dots$$

caractérisé par l'existence d'une base orthonormale $(\varphi_j(\hbar))$ de $L^2(\mathbb{R}, |dx|)$ vérifiant, pour tout j , $\hat{H}_\hbar \varphi_j(\hbar) = \lambda_j(\hbar) \varphi_j(\hbar)$. Par exemple, si $V(x) = x^2$ (oscillateur harmonique), les valeurs propres sont les $\lambda_j(\hbar) = (2j + 1)\hbar$, et les fonctions propres sont les produits de l'exponentielle $\exp(-x^2/2)$ par des polynômes de Hermite.

Lorsque \hbar tend vers 0, on s'attend à ce que le comportement asymptotique des valeurs propres $\lambda_j(\hbar)$ soit décrit en termes de la mécanique classique d'une particule de masse m dans le potentiel V . Expliciter ce comportement est un des buts de l'analyse semi-classique.

On considère ainsi l'hamiltonien $H = \xi^2 + V(x)$ défini sur l'espace des phases $\mathbb{R}_{x,\xi}^2$ qui gouverne la dynamique classique à l'aide des équations de Hamilton :

$$\dot{x} = 2\xi, \quad \dot{\xi} = -V'(x) \tag{10}$$

(cette écriture simple de l'hamiltonien correspond en fait à $m = \frac{1}{2}$). Un des résultats les plus simples de l'analyse semi-classique est la formule de Weyl [11] (voir aussi [9],

section XIII.15), qui donne une estimation du nombre de valeurs propres inférieures ou égales à un niveau d'énergie donné :

$$N_{\hbar}(E) = \#\{\lambda_j(\hbar) \leq E\} \sim \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Aire}(\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi^2 + V(x) \leq E\}). \quad (11)$$

Par exemple, pour l'oscillateur harmonique, on a ainsi

$$N_{\hbar}(E) = \#\{j \in \mathbb{N} \mid (2j+1)\hbar \leq E\} \sim \frac{E}{2\hbar} = \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Aire}(\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi^2 + x^2 \leq E\}).$$

Si l'on note $A(E)$ l'aire de la formule 11, il est aisé de vérifier que la dérivée de $A(E)$ est la période des oscillations d'énergie E dans le potentiel V .

Dans le cas de l'oscillateur harmonique, $A(E) = \pi E$ et $A'(E) = \pi$, mais l'équation de Newton s'écrit alors $\ddot{x} + 4x(t) = 0$, dont les solutions sont justement de période π .

On en déduit ainsi que la connaissance de l'équivalent de $N_{\hbar}(E)$ pour tout E détermine la fonction période $T(E)$; mais la connaissance de la fonction période n'est pas suffisante pour déterminer la fonction V .

On a cependant le résultat suivant.

Théorème 9.1 (CdV [5]) — Le potentiel V est déterminé par la connaissance de la suite des $\lambda_j(\hbar)$ modulo $o(\hbar^2)$.

L'idée est d'essayer d'avoir le terme suivant dans la formule de Weyl. Le comportement asymptotique des $\lambda_j(\hbar)$ n'étant pas toujours très régulier, on le régularise et on considère, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_o^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la somme

$$Z_f(\hbar) = \sum_{j=1}^{\infty} f(\lambda_j(\hbar)).$$

La somme $Z_f(\hbar)$ est finie, mais le nombre de termes tend vers l'infini quand \hbar tend vers 0^+ . On montre ainsi, à l'aide du calcul pseudo-différentiel, que si f est égale à 1 dans un voisinage de 0, on a, γ_E étant la courbe fermée $\xi^2 + V(x) = E$ (la trajectoire de période $T(E)$ dans l'espace des phases) et t le temps sur la trajectoire γ_E ,

$$Z_f(\hbar) = \frac{1}{2\pi\hbar} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f(H) |dx d\xi| - \frac{\hbar^2}{12} \int_0^{+\infty} f'(E) \frac{d}{dE} \left(\int_{\gamma_E} V''(x) dt \right) dE + O(\hbar^4) \right). \quad (12)$$

L'équation (12) est appelée « formule de traces »; en effet, cette formule identifie la trace de $f(\widehat{H}_{\hbar})$ calculée de deux façons : le membre de gauche comme somme des valeurs propres $f(\lambda_j(\hbar))$ de $f(\widehat{H}_{\hbar})$, le membre de droite obtenu à l'aide du calcul pseudo-différentiel et de la formule $\text{Trace}(f(\lambda_j(\hbar))) = \int_{\mathbb{R}} K(x, x) |dx|$ où $K(x, y)$ est le noyau intégral de l'opérateur pseudo-différentiel $f(\widehat{H}_{\hbar})$ défini par

$$f(\widehat{H}_{\hbar}) \varphi_j(\hbar) = f(\lambda_j(\hbar)) \varphi_j(\hbar).$$

L'information supplémentaire obtenue du terme $\int_{\gamma_E} V''(x) dt$ nous donne $W_+ + W_-$ en recourant de nouveau à la transformée d'Abel.

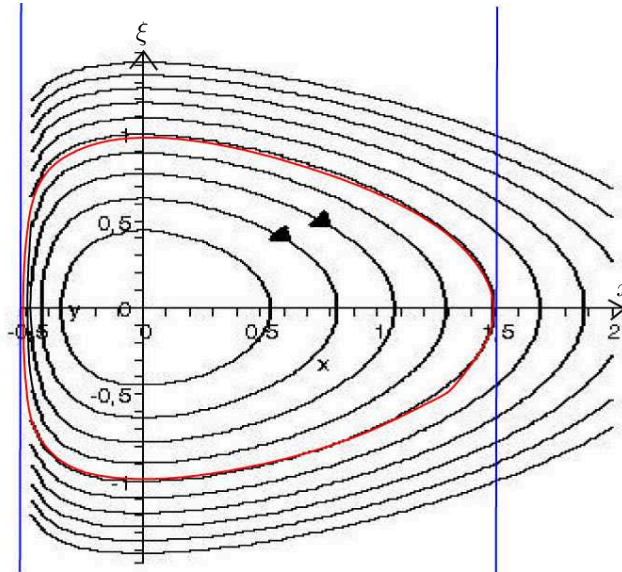


Figure 10. Portrait de phases pour l'exemple 7.1.

Plutôt que de démontrer la «formule de traces» (12) (voir [5]), nous allons ici nous contenter de la vérifier pour l'oscillateur harmonique.³ Elle s'écrit alors³

$$\sum f((2j + 1)\hbar) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} f(x^2 + \xi^2) |dx d\xi| + O(\hbar^\infty)$$

ou encore, en évaluant l'intégrale de droite par passage en coordonnées polaires,

$$\sum f((2j + 1)\hbar) = \frac{1}{2\hbar} \int_0^\infty f(E) dE + O(\hbar^\infty).$$

Rappelons la *formule sommatoire de Poisson* : si $F \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et si sa transformée de Fourier est la fonction $y \mapsto \widehat{F}(y) = \int_{\mathbb{R}} F(x) e^{-ixy} dx$, alors

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} F(jT + a) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\frac{2i\pi ka}{T}} \widehat{F}\left(\frac{2k\pi}{T}\right).$$

Le membre de droite est ainsi la série de Fourier du membre de gauche considéré comme une fonction de période T de la variable a : c'est la base de la démonstration de la formule sommatoire de Poisson.

On applique la formule sommatoire de Poisson, avec $T = 2\hbar$ et $a = \hbar$, F étant la fonction paire dont la restriction à $[0, +\infty[$ vaut f . Cela donne le résultat, si l'on se rappelle que \widehat{F} est à décroissance rapide, ce qui implique que la somme pour $k \neq 0$ des

$$\widehat{F}\left(\frac{k\pi}{\hbar}\right)$$

est $O(\hbar^\infty)$.

3. $O(\hbar^\infty)$ signifie $O(\hbar^N)$ pour tout entier N .

Références

- [1] Niels ABEL, *Auflösung einer mechanischen Aufgabe*, Journal de Crelle **1**, 153–157, 1826.
- [2] Niels ABEL, *Solution d'un problème de mécanique*, Œuvres complètes de Niels Henrik Abel, I, Grøndahl & Søn, Christiania (Norvège), 1881.
- [3] Keiiti AKI & Paul G. RICHARDS, *Quantitative Seismology, Theory and Models, Vol. II*, W. H. Freeman & Co, San Francisco, 1980.
- [4] Jean-Pierre BOURGUIGNON, *Calcul variationnel*, Éditions de l'École polytechnique, 2007.
- [5] Yves COLIN DE VERDIÈRE, *A semi-classical inverse problem, II : Reconstruction of the potential*, arXiv:0802.1643.
- [6] Carolyn GORDON, David WEBB & Scott WOLPERT, *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Invent. Math. **110**, 1–22, 1992.
- [7] Mark KAC, *Can one hear the shape of a drum ?*, Amer. Math. Monthly **73**, 1–23, 1966.
- [8] Yves MEYER, *Calcul des variations*, Cours de l'École polytechnique, 1981.
- [9] Michael REED & Barry SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics, IV Analysis of Operators*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1978.
- [10] Ludvig SYLOW, *Les études d'Abel et ses découvertes*, dans *Niels Henrik Abel*, mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance, Kristiania : Dybwad, 1902.
- [11] Hermann WEYL, *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung)*, Math. Ann. **71**, 441–479, 1912.
- [12] Laurence C. YOUNG, *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Chelsea Pub. Co., New York, 1980.