

D'un problème de mécanique d'Abel au "problème spectral inverse"

Yves Colin de Verdière
Institut Fourier (Grenoble)

ENS, 21 mai 2008

Qu'est ce qu'un problème spectral inverse ?

Retrouver une matrice (symétrique, finie ou non) à partir de son spectre. On suppose que la matrice fait partie d'un ensemble X de matrices.

Exemple simple à énoncer (l'opérateur de Schrödinger discret) :
soit X l'ensemble des matrices $N \times N$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & a_3 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Est ce que le spectre $\{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N\}$ détermine la suite (a_1, \dots, a_N) (à permutation près $(a_k) \rightarrow (a_{N-k})$) ?

Je ne connais pas la réponse !!

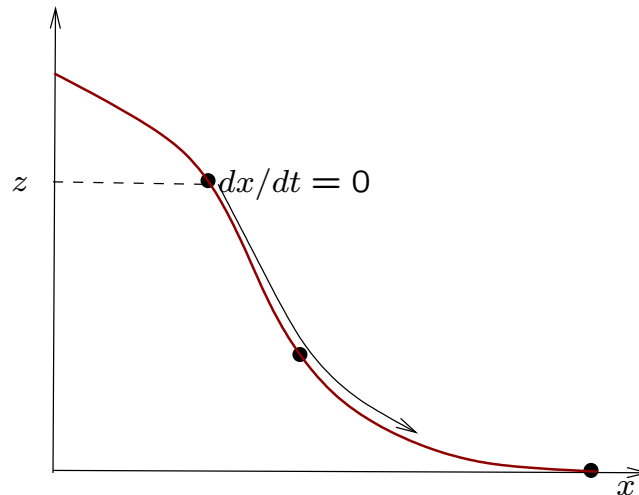
Plan :

1. Le problème du toboggan (Abel 1826)
2. L'équation de Schrödinger et son spectre
3. Autre problème spectral : fréquences propres d'une membrane vibrante (1 tambour)
4. 2 spectres (Borg-Gelfand-Levitan-Marchenko 1950')
5. La limite semi-classique " \hbar tend vers 0"

6. Le problème direct I : la formule de Weyl
7. Le problème direct II : Les conditions de Bohr-Sommerfeld
8. Le théorème principal
9. La preuve
10. Perspectives

I. Le problème inverse d'Abel : *“Auflösung eine mechanischen Aufgabe”* par Niels Abel (1826)

Pb : trouver la forme d'un toboggan connaissant la fonction $\tau(z)$ = temps d'arrivée à la hauteur 0 en partant à vitesse 0 de la hauteur z .



Niels Abel [1802-1829]

IX.

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von Crelle, Bd. 1, Berlin 1828.

Soit $BDMA$ une courbe quelconque. Soit BC une droite horizontale et CA une droite verticale. Supposons qu'un point sollicité par la pesanteur se meuve sur la courbe, un point quelconque D étant son point de départ. Soit τ le temps qui s'est écoulé quand le mobile est parvenu à un point donné A , et soit a la hauteur EA . La quantité τ sera une certaine fonction de a , qui dépendra de la forme de la courbe. Réciproquement la forme de la courbe dépendra de cette fonction. Nous allons examiner comment, à l'aide d'une intégrale définie, on peut trouver l'équation de la courbe pour laquelle τ est une fonction continue donnée de a .

Soit $AM = x$, $AP = x$, et soit t le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc DM . D'après les règles de la mécanique on a $-\frac{dx}{dt} = \sqrt{a-x}$, donc $dt = -\frac{dx}{\sqrt{a-x}}$. Il s'ensuit, lorsqu'on prend l'intégrale depuis $x = a$ jusqu'à $x = 0$,

$$\tau = -\int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}}$$

\int_a^β désignant que les limites de l'intégrale sont $x = a$ et $x = \beta$. Soit maintenant

$$\tau = \varphi(a)$$



Soit $z = V(s)$ la hauteur en fonction de l'abscisse curviligne (supposée monotone) ; on a (avec $V(0) = 0$) et en utilisant la conservation de l'énergie

$$E(t) = \dot{s}^2 + z = z_0 \quad :$$

$$\tau(z_0) = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{z_0 - z}}$$

et si $s = W(z)$ est la fonction inverse de V :

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{W'(u) du}{\sqrt{z - u}} \quad .$$

Problème : retrouver W à partir de la fonction τ .

Solution : Si

$$\mathcal{A}(f)(z) := \int_0^z \frac{f(x)dx}{\sqrt{z-x}} ,$$

on a :

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{A}(f)(z) := \pi \int_0^z f(x)dx .$$

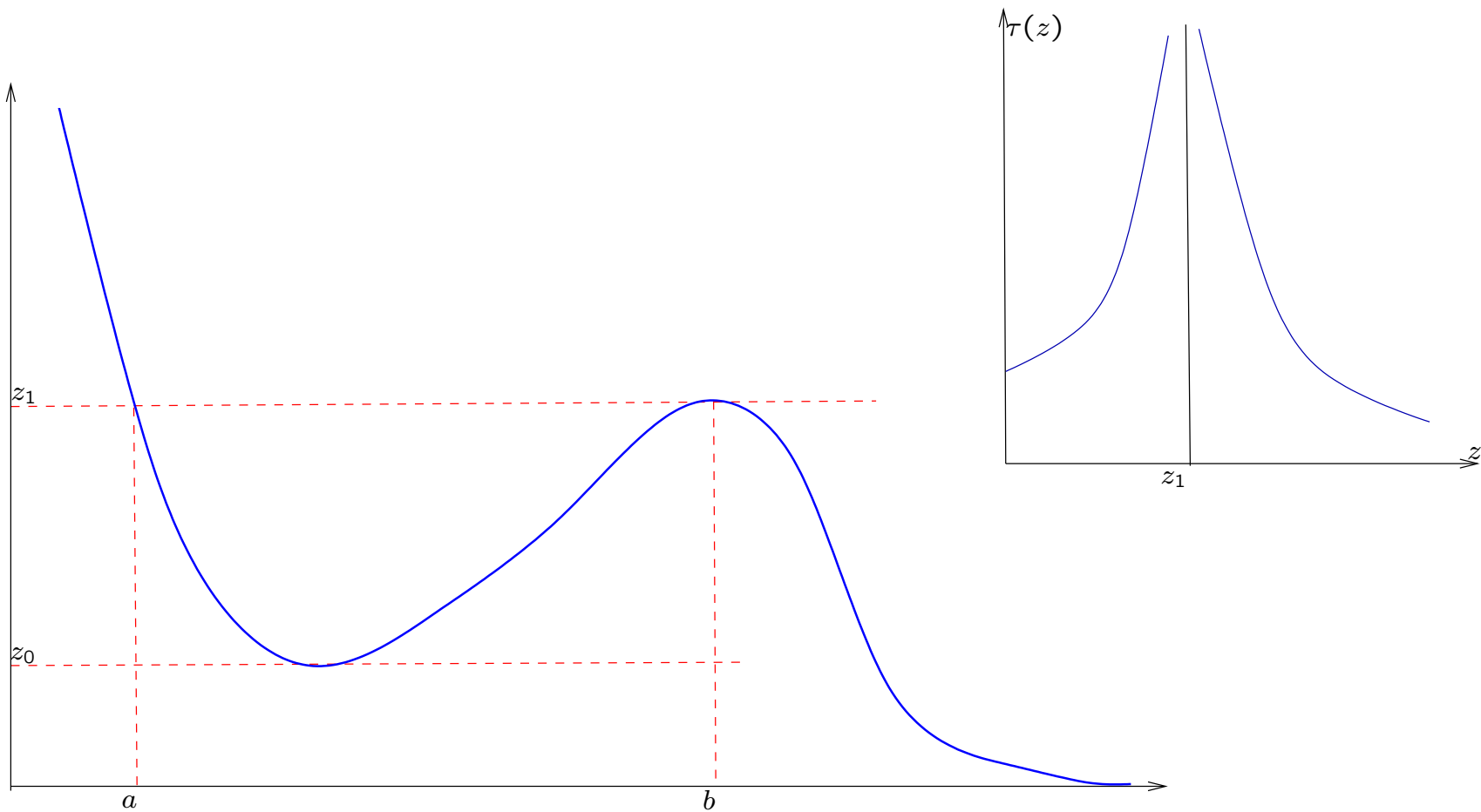
Donc $f = \pi^{-1}(\mathcal{A}^2 f)'$.

Exemple classique : si τ est constante, on trouve une cycloïde !

La fonction période :

Du résultat d'Abel, on déduit que, *si V est paire*, la fonction période $T(z) = 4\tau(z)$ en fonction de l'énergie détermine V . Ce n'est plus vrai si V n'est pas supposée paire, mais cela reste vrai d'un point de vue quantique !

Exercice : toboggan non monotone



Montrer que la forme du toboggan, en dehors du “puits” $]a, b[$, est déterminée par $\tau(z)$ et $T(z)$, ($z_0 < z < z_1$), la période des oscillations près du minimum local de V .

II. L'équation de Schrödinger et son spectre

On considère l'opérateur de Schrödinger $\hat{H}u := -\hbar^2 u'' + V(x)u$ avec $\hbar > 0$ et $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, lisse, et, pour simplifier, $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$. On a le:

Théorème 1 (Théorème spectral) *Il existe une suite*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

tendant vers $+\infty$ et une base orthonormée de fonctions $\phi_n(x)$ de $L^2(\mathbb{R}, dx)$ tels que

$$\hat{H}\phi_n = \lambda_n \phi_n .$$

Ex : l'oscillateur harmonique.

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right) .$$

Son spectre est

$$\sigma = \left\{ \left(n - \frac{1}{2} \right) \hbar \mid n = 1, 2, \dots \right\} ,$$

et les fonctions propres sont de la forme

$$\phi_n(x) = H_n \left(\frac{x}{\sqrt{\hbar}} \right) e^{-x^2/2\hbar}$$

où H_n est un polynôme de degré n , le polynôme d'Hermite.

III. Autre problème spectral : fréquences propres d'une membrane vibrante (1 tambour)

Ω est un domaine borné de \mathbb{R}_x^2 et on considère le problème:

$$(\star) \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Il existe une suite (ϕ_n, λ_n) avec $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$ et ϕ_n solution de (\star) tels que $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une b.o. de $L^2(\Omega, d\mathbf{x})$.

Le cas d'un rectangle (Joseph Fourier [1768-1830]):

Soit $\Omega = [0, l] \times [0, L]$.

$$\sigma = \left\{ 4\pi^2 \left(\left(\frac{m}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{L} \right)^2 \right) \mid m, n = 1, 2, \dots \right\},$$

et

$$\phi_{m,n}(x_1, x_2) = \frac{2}{\sqrt{lL}} \sin \frac{2\pi m x_1}{l} \sin \frac{2\pi n x_2}{L}.$$



Problème spectral inverse de Mark Kac (1966) : “Can one hear the shape of a drum?”

Mark Kac [1914-1984]

CAN ONE HEAR THE SHAPE OF A DRUM?

MARK KAC, The Rockefeller University, New York

To George Eugene Uhlenbeck on the occasion of his sixty-fifth birthday

"La Physique ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes . . . , elle nous fait pressentir la solution." H. POINCARÉ.

Before I explain the title and introduce the theme of the lecture I should like to state that my presentation will be more in the nature of a leisurely excursion than of an organized tour. It will not be my purpose to reach a specified destination at a scheduled time. Rather I should like to allow myself on many occasions the luxury of stopping and looking around. So much effort is being spent on streamlining mathematics and in rendering it more efficient, that a solitary transgression against the trend could perhaps be forgiven.

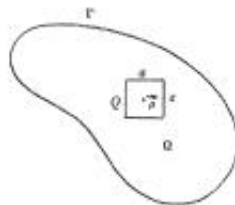


FIG. 1

1. And now to the theme and the title.

It has been known for well over a century that if a membrane Ω , held fixed along its boundary Γ (see Fig. 1), is set in motion its displacement (in the direction perpendicular to its original plane)

$$F(x, y; t) = F(\vec{p}; t)$$

obeys the wave equation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 F,$$

where c is a certain constant depending on the physical properties of the membrane and on the tension under which the membrane is held.

I shall choose units to make $c^2 = \frac{1}{2}$.

1



Autrement dit, est ce que la suite des λ_n détermine Ω ?

Kac a montré que le spectre détermine l'aire et la longueur du bord et introduit la méthode de l'équation de la chaleur :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\lambda_n} = \frac{1}{4\pi t} \left(\text{aire}(\Omega) + \frac{\sqrt{\pi t}}{2} \text{longueur}(\partial\Omega) + o(t) \right) .$$

En particulier, les domaines circulaires sont caractérisés par leur spectre ($A = L^2/4\pi$).

La méthode de l'équation de la chaleur :

Fourier nous a appris comment résoudre l'équation de la chaleur dans une barre 1D ou un rectangle à l'aide de ses séries. La même méthode s'applique pour un domaine quelconque en utilisant la décomposition spectrale de son laplacien :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \text{ avec } u(0) = u_0 ,$$

$$u_0 = \sum a_n \varphi_n, \quad u(t) = \sum a_n e^{-\lambda_n t} \varphi_n .$$

Donc

$$Z(t) = \text{Trace}(e^{t\Delta}) = \sum_n e^{-t\lambda_n} ,$$

et aussi

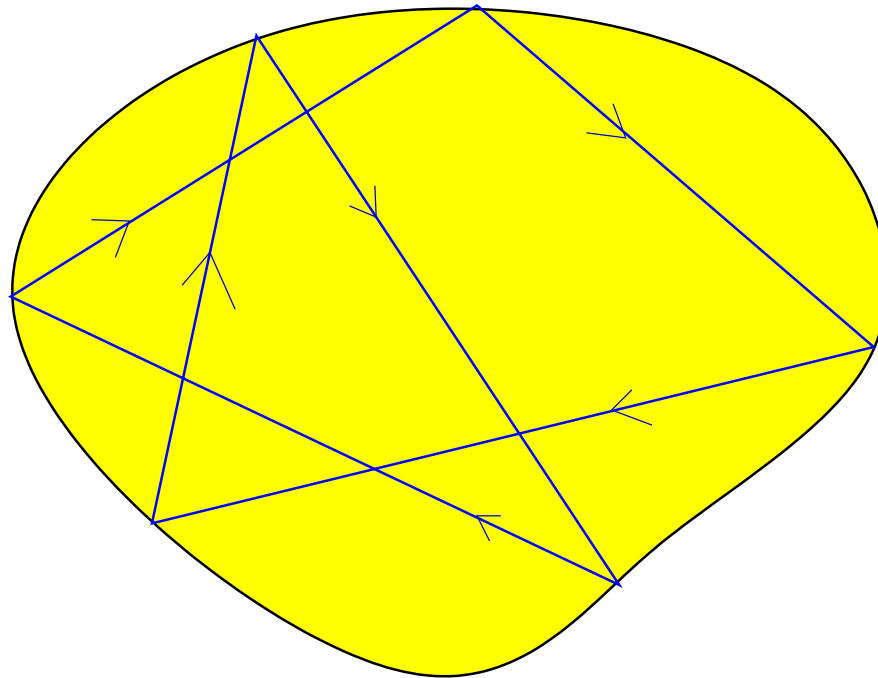
$$[e^{t\Delta}](\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi t} e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2/4t} (a_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots)$$

Puis on calcule la trace $Z(t) = \int_{\Omega} [e^{t\Delta}](\mathbf{x}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$. On trouve le d.a. :

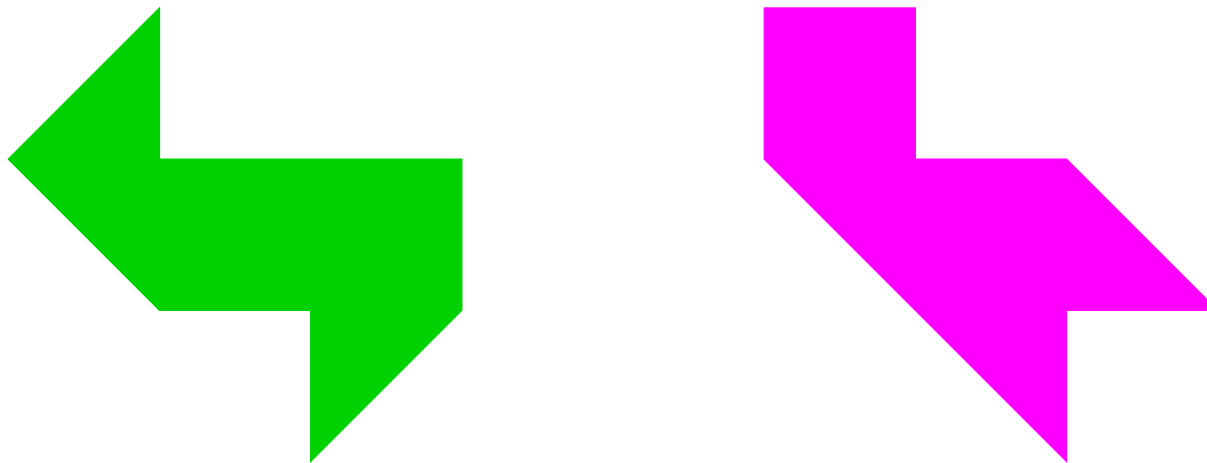
$$Z(t) = \frac{1}{4\pi t} (\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots) ,$$

où les α_j sont déterminés par le spectre.

J'ai montré dans ma thèse (1973), en m'inspirant des travaux des physiciens Balian & Bloch, que le spectre détermine l'ensemble des longueurs des **trajectoires périodiques** du billard associé :



On sait aujourd'hui (Gordon-Webb-Wolpert, 1992) que la réponse à la question de Kac est NON : ces auteurs ont trouvé des contre-exemples où Ω est un polygône non convexe.



Cependant, on ne connaît ni exemples convexes, ni exemples lisses.

IV. Résultats de Borg-Gelfand-Levitan-Marchenko :

Pour l'équation de Schrödinger, avec $\hbar = 1$, sur un intervalle borné $[a, b]$, B-G-L-M ont montré, dans les années 1950, que V est déterminé par la donnée de 2 spectres, par ex:

$$\begin{aligned} (\star_1) : \hat{H}u &= \lambda u, \quad u(a) = 0, \quad u(b) = 0 \\ (\star_2) : \hat{H}u &= \lambda u, \quad u(a) = 0, \quad u'(b) = 0 \end{aligned} \quad .$$

La méthode est assez compliquée.

V. La limite semi-classique \hbar tend vers 0'' :

Le principe dit de correspondance affirme que *la mécanique classique est la limite (en un certain sens) de la mécanique quantique quand $\hbar \rightarrow 0$.*

On va voir que le problème inverse semi-classique conduit à un problème du type de celui résolu par Abel !

Qu'est ce que le pb inverse semi-classique ? On considère les valeurs propres d'un opérateur de Schrödinger comme des fonctions $\hbar \rightarrow \lambda_n(\hbar)$.

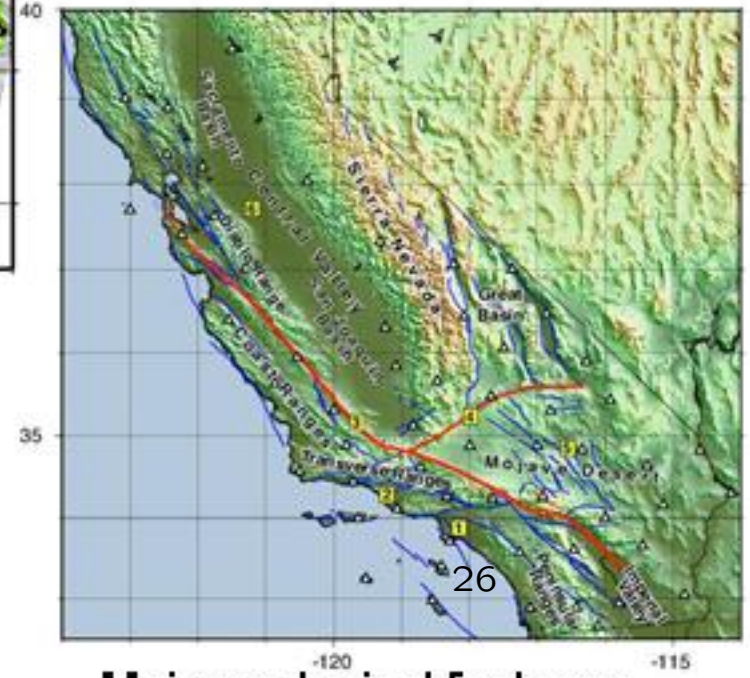
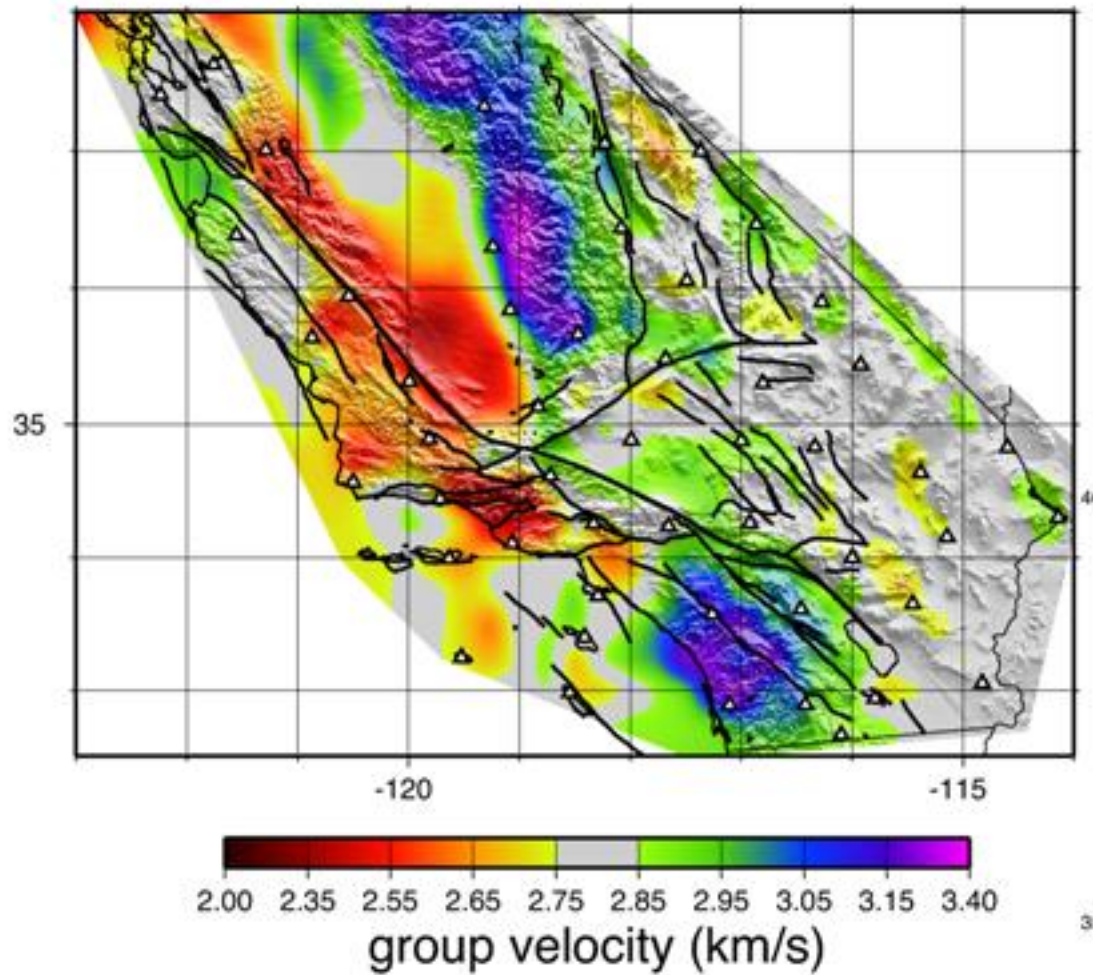
Est ce que $V(x)$ est déterminé par la comportement asymptotique des $\lambda_n(\hbar)$ quand $\hbar \rightarrow 0$?

La réponse est OUI !

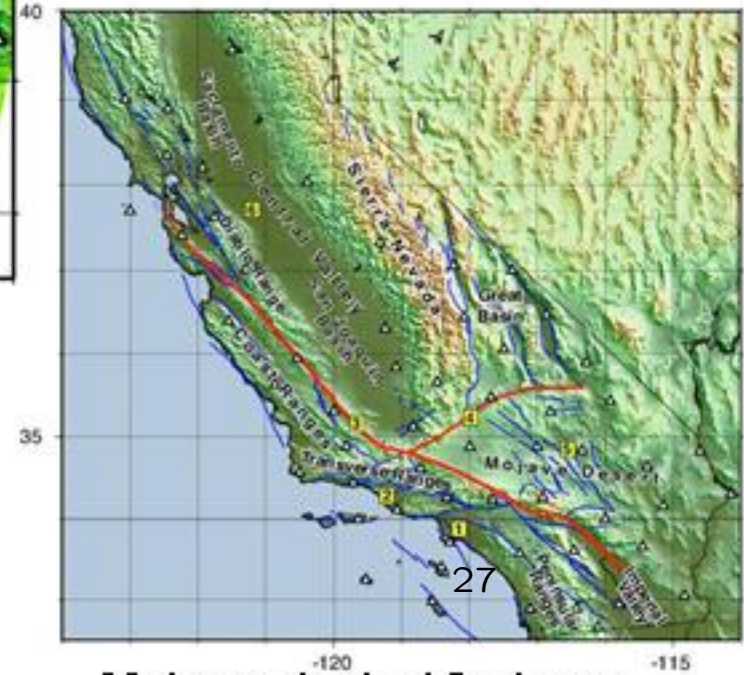
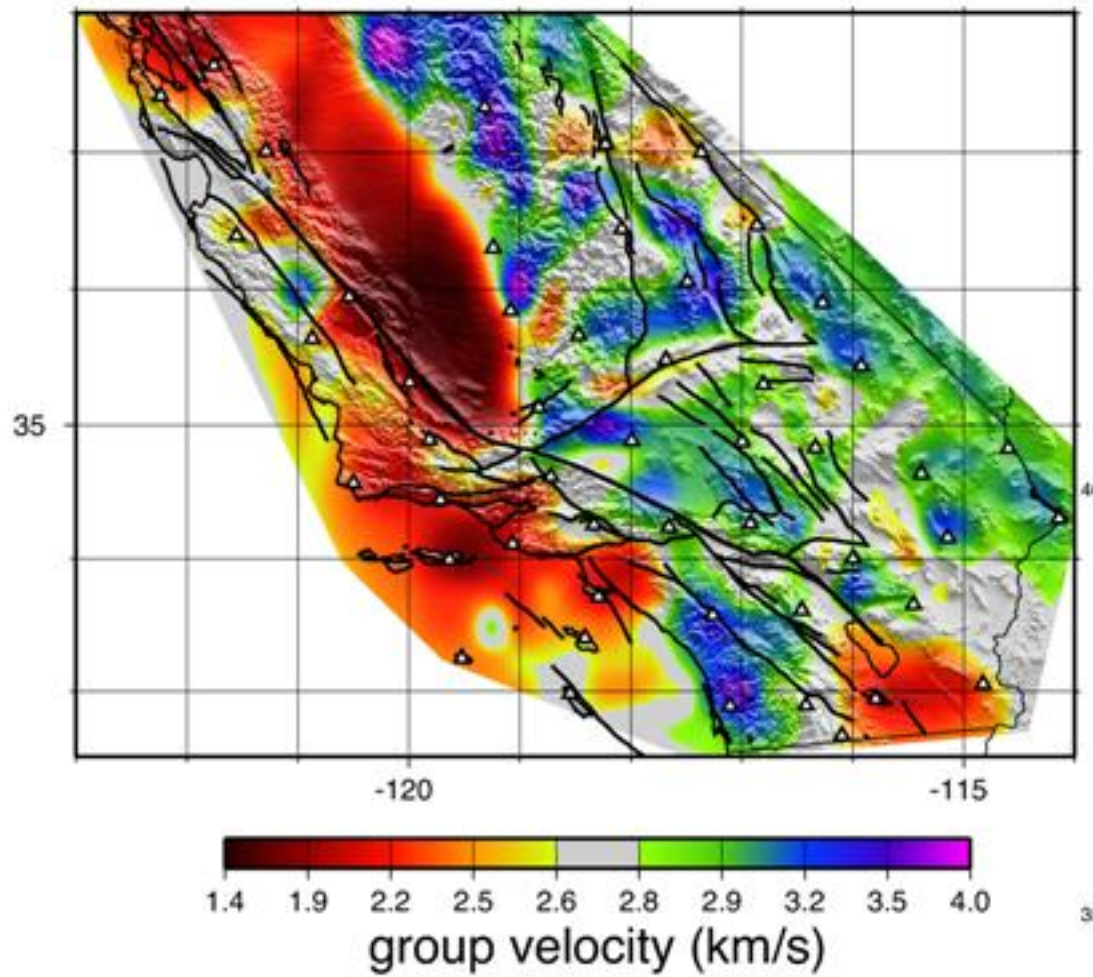
Motivation : méthode d'imagerie passive en sismologie.

La fonction de corrélation $C_{A,B}(T)$ du bruit sismique permet de connaître la vitesse des ondes de surfaces en fonction de leur fréquence. Méthode développée par le groupe de Michel Campillo à Grenoble.

High resolution velocity map obtained from noise (Rayleigh 15 s ~ middle crust)



High resolution velocity map obtained from noise (Rayleigh 7.5 s)



Main geological features

La croûte terrestre agit comme un guide d'ondes, car la vitesse des ondes augmente avec la profondeur. Un modèle académique simple est donné par l'équation des ondes acoustiques

$$u_{tt} - \operatorname{div} N(\mathbf{x}, \frac{z}{\varepsilon}) \operatorname{grad} u = 0 .$$

Si $\lambda_n(x, \xi)$ est une valeur propre de

$$L_{\mathbf{x}, \xi} = -\frac{d}{dZ} N(\mathbf{x}, Z) \frac{d}{dZ} + N(x, Z) \|\xi\|^2$$

la fonction $\lambda_n(\mathbf{x}, \xi)$ est un Hamiltonien effectif pour les ondes de surface de fréquence $\omega = \varepsilon \sqrt{\lambda_n(\mathbf{x}, \xi)}$. $\hbar = \|\xi\|^{-1}$ est une constante de Planck effective et on espère retrouver N par un problème spectral inverse semi-classique.

VI. Le problème direct I : la formule de Weyl

$$\#\{\lambda_n(\hbar) \leq E\} \sim \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Aire}\{\xi^2 + V(x) \leq E\}$$

Chaque état quantique occupe une aire $2\pi\hbar$ dans l'espace des phases.

Si on note $A(E)$ l'aire précédente, on vérifie que $A'(E) = T(E)$ est la période des oscillations d'énergie E . Donc, d'après Abel, si le potentiel est pair, il est déterminé par l'asymptotique de Weyl !

C'est le même argument que celui utilisé par Kac pour déterminer l'aire de Ω .

Dans TOUTE la suite, on suppose pour simplifier que

- V atteint son minimum en un seul point x_0 et $V''(x_0) > 0$
- $V'(x) > 0$ si $x > x_0$
- $V'(x) < 0$ si $x < x_0$

VII. Le problème direct II : Les conditions de Bohr-Sommerfeld

En fait, on peut décrire de façon beaucoup plus précise le c.a. des vp de Schrödinger : ce sont les fameuses règles de quantification de Bohr-Sommerfeld connues par Bohr (même avant l'écriture de l'équation de Schrödinger) pour le spectre de l'atome d'hydrogène.

Ces règles de BS ne s'appliquent qu'aux systèmes dits intégrables, et donc pas au pb de Kac.

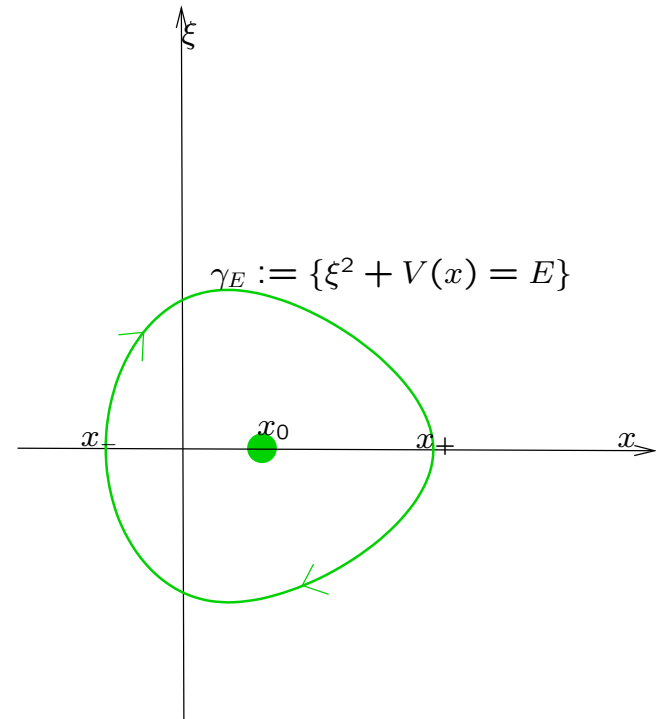
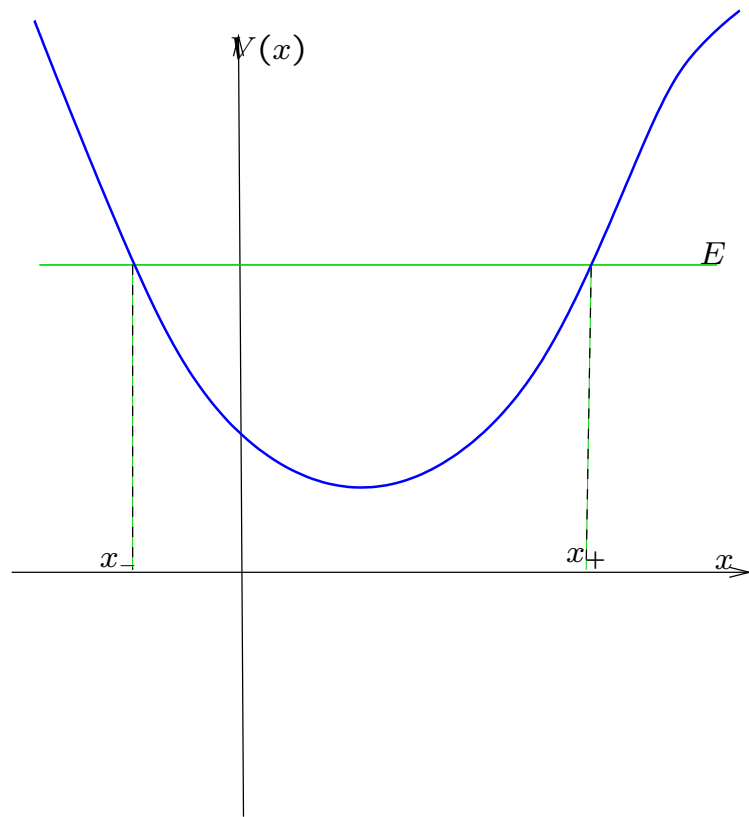
Les conditions de BS et une formule de trace :

l'espace des phases

$$(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 ,$$

l'hamiltonien $H = \xi^2 + V(x)$ et la dynamique

$$X_H = 2\xi \frac{\partial}{\partial x} - V'(x) \frac{\partial}{\partial \xi} .$$



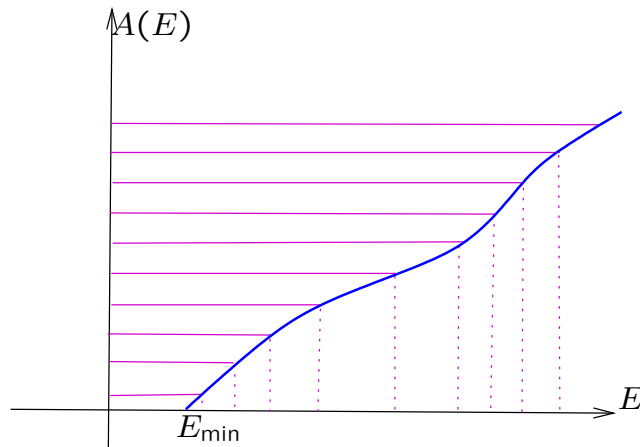
Les conditions de BS usuelles s'écrivent

$$A(E_n^0) = \int_{\gamma_{E_n^0}} \xi dx = 2\pi\hbar \left(n - \frac{1}{2} \right)$$

et

$$\lambda_n = E_n^0 + O(\hbar^2) .$$

Pour l'oscillateur harmonique, cela donne les valeurs propres exactes.



En fait on peut avoir le développement asymptotique à tous les ordres : il existe une série formelle

$$S(E) \equiv A(E) + \hbar\pi + \sum_{j=1}^{\infty} S_j(E)\hbar^{2j}$$

telle que, si E_n^∞ est définie par

$$S(E_n^\infty) = 2\pi\hbar n ,$$

on ait

$$\lambda_n = E_n^\infty + O(\hbar^\infty) .$$

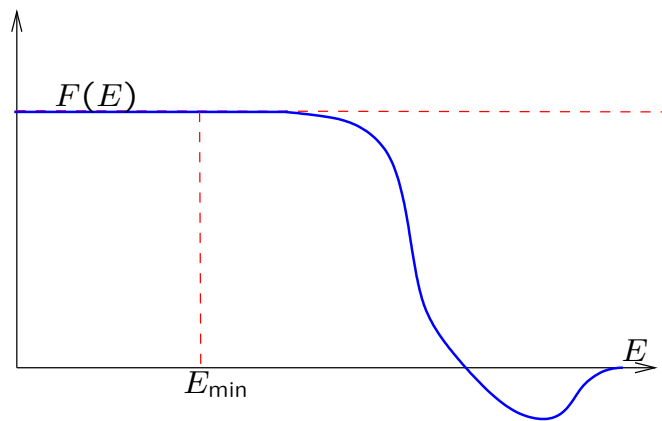
De plus

$$(\star) S_1(E) = -\frac{1}{12} \frac{d}{dE} \int_{\gamma_E} V'' |dt| .$$

Comment le spectre détermine-t'il les S_j ? On utilise une formule de trace (analogue de la méthode de l'équation de la chaleur) qui permet de lire clairement les S_j et aussi de les calculer (formule (\star)).

Soit $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} F(E) = F(E_{\min}) \text{ si } E < E_{\min} + \varepsilon \\ F(E) = 0 \text{ si } E \text{ est assez grand.} \end{cases}$$



Le formule de trace (T) :

$$\text{Trace} \left(F(\hat{H}) \right) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} F(H) dx d\xi - \hbar^2 \int_{\mathbb{R}} F'(E) S_1(E) dE + \hbar^4 \dots \right)$$

Preuve de la formule (T) :

On utilise le calcul pseudo-différentiel :

- Quantification de Weyl
- Formule de Moyal
- Calcul fonctionnel

Quantification de Weyl :

Formellement, un *opérateur pseudo-différentiel operator* (ΨDO) dans \mathbb{R}^d est donné par la formule (Weyl) :

$$\text{Op}_{\text{Weyl}}(a)(u)(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \iint e^{i\langle x-y|\xi\rangle/\hbar} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) |dyd\xi| ,$$

où a est le *symbole de Weyl* de $A = \text{Op}_{\text{Weyl}}(a)$. On note $a_W = \text{Op}_{\text{Weyl}}(a)$.

Exemples:

- $(x\xi)_{\mathcal{W}} = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \right)$
- $(\|\xi\|^2 + V(x))_{\mathcal{W}} = -\hbar^2 \Delta + V(x)$

Formule de Moyal

$$a_W \circ b_W = (a \star b)_W$$

où $a \star b$ est donné par la formule de *Moyal* :

$$a \star b \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{\hbar}{2i} \right)^j a \left(\sum_{p=1}^d \overleftarrow{\partial}_{\xi_p} \overrightarrow{\partial}_{x_p} - \overleftarrow{\partial}_{x_p} \overrightarrow{\partial}_{\xi_p} \right)^j b$$

$$a \star b = ab + \frac{\hbar}{2i} \{a, b\} + \dots .$$

Calcul fonctionnel

Si $F \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ $\hat{H} = H_W$, on a : $F(\hat{H}) = F^*(H)_W$ avec

$$F^*(H)(z_0) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(F^{(k)}(H(z_0))(H - H(z_0))^{*k} \right) (z_0) ,$$

$$F^*(H) = F(H) - \frac{\hbar^2}{8} \left(F''(H) \det(H'') + \frac{1}{3} F'''(H) H''(X_H, X_H) \right) + O(\hbar^4) ,$$

avec $\omega(X_H, \cdot) = -dH$.

$F^*(H)$ ne contient que des puissances paires de \hbar .

VIII. Le théorème principal.

Théorème 2 (CdV, 2007) *Sous les hypothèses précédentes et hypothèse (S), la donnée des valeurs propres $\lambda_n(\hbar)$ modulo $o(\hbar^2)$ dans l'intervalle $] -\infty, E_0]$ détermine $V(x)$ dans $\{x | V(x) \leq E_0\}$ à changement $V(x) \rightarrow V(\pm x + C)$ près.*

Hypothèse (S) : défaut de parité

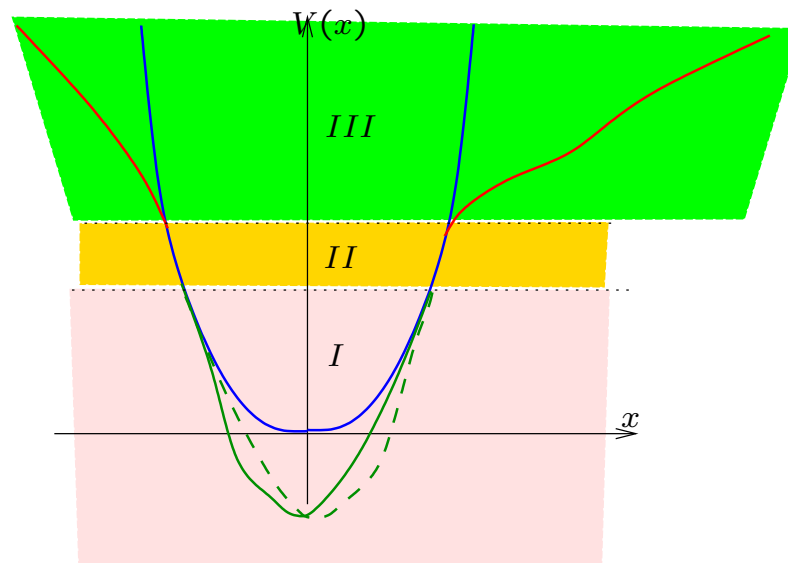
Si $x_- < x_+$ satisfont

$$\forall k = 0, 1, \dots, V^{(k)}(x_-) = (-1)^k V^{(k)}(x_+)$$

alors V est pair par rapport à $x_+ + x_-/2$.

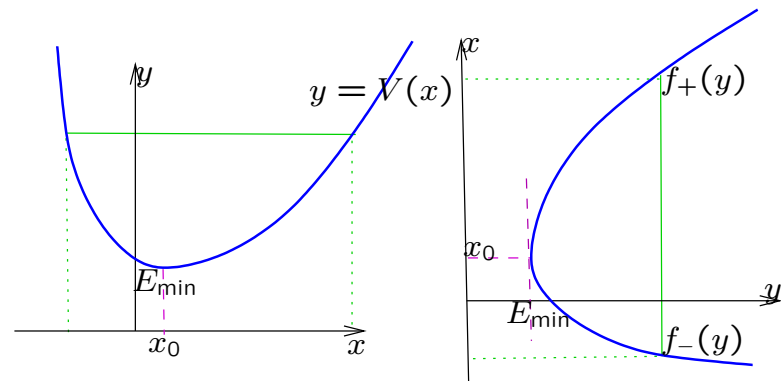
(Vrai si V analytique)

2 potentiels avec le même spectre semi-classique à tous les ordres



IX. La preuve.

- L'asymptotique de Weyl détermine $A(E)$ et donc $T(E) = A'(E)$ ainsi que $E_{\min} := V(x_0)$ et $V''(x_0)$ par $A(E) \sim \sqrt{\frac{2}{V''(x_0)}} \pi E$ quand $E \rightarrow E_{\min}^+$.
- Le 2ème terme dans BS détermine l'information manquante, via la transformation d'Abel, sous l'hypothèse (S).



Soit $F = \frac{1}{2}(f_+ + f_-)$, $G = \frac{1}{2}(f_+ - f_-)$ (V est pair par rapport à x_0 ssi $F' \equiv 0$). Exprimons $S_0(E)$ et $S_1(E)$ en fonction de F et G .

$$T(E) = \frac{d}{dE} S_0(E) = \int_{f_-(E)}^{f_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

$$S_1(E) = \frac{-1}{12} \frac{d}{dE} \int_{f_-(E)}^{f_+(E)} \frac{V''(x) dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \frac{-1}{12} \frac{d}{dE} U(E)$$

Utilisant

$$\lim_{y \rightarrow E_{\min}^+} \int_{\gamma_y} V'' dt = \pi \sqrt{2V''(x_0)},$$

on déduit $U(E)$ de $S_1(E)$.

On réécrit T et U à l'aide des changements de variables $x = f_{\pm}(y)$, soit:

$$T(E) = 2 \int_{E_{\min}}^E \frac{G'(y)dy}{\sqrt{E-y}}$$

$$U(E) = -2 \int_{E_{\min}}^E \frac{d}{dy} \left(\frac{G'}{G'^2 - F'^2} \right) (y) \frac{dy}{\sqrt{E-y}} .$$

On utilise le résultat d'Abel :

de la 1ère equation, on tire G' , puis de la 2ème F'^2 en remarquant que

$$\lim_{y \rightarrow E_{\min}^+} \left(\frac{G'}{G'^2 - F'^2} \right) (y) = 0 .$$

Avec l'hypothèse (S), on tire G ($G(E_{\min}) = 0$) et F au signe et à une constante près. Cela détermine V à des changements évidents près (translation et symétrie).

X. Perspectives :

- J'ai étendu le résultat précédent au cas d'un potentiel à plusieurs puits : pour cela, il faut séparer les spectres semi-classiques associés aux différents puits et utiliser des formules de trace plus compliquées.
- Qu'en est-il à plusieurs degrés de liberté ? Le cas 1D est dit *intégrable*, ce qui se traduit par l'existence des conditions de BS. Pour $D > 1$, on n'a plus intégrabilité, mais intégrabilité approchée (Birkhoff). On peut espérer trouver le développement de Taylor de V près du minimum.

Quelques références ::

1. Sean Bates & Alan Weinstein, Lectures on the Geometry of Quantization. *AMS, Berkeley LN 8 (1997)*.
2. CdV, Bohr Sommerfeld Rules to all orders. *AHP 6:925–936 (2005)*.
3. CdV, Inverse semi-classical problem II: Reconstruction of the potential. *ArXiv 2008*.
4. Dimassi & Sjöstrand, Spectral Asymptotics in the semi-classical limit. *London Math. Soc. LN, 268 (1999)*.

5. Evans & Zworski, Lectures on Semi-classical Analysis.

<http://math.berkeley.edu/~zworski/semiclassical.pdf>.

6. San Vũ Ngọc, Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global. *SMF, Panoramas et synthèses no22* (2006).