FRANCIS SERGERAERT

Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 5, nº 4 (1972), p. 599-660.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1972_4_5_4_599_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 5, 1972, p. 599 à 660.

UN THÉORÈME DE FONCTIONS IMPLICITES SUR CERTAINS ESPACES DE FRÉCHET ET QUELQUES APPLICATIONS (*)

PAR FRANCIS SERGERAERT

Je remercie vivement M. Jean Cerf, instigateur de ce travail, qui a bien voulu avoir confiance en les méthodes que j'avais envisagées au début de ces recherches, et qui m'a encouragé avec assez de conviction pour que celles-ci aboutissent.

Mes remerciements vont aussi à B. Morin qui a vu naître les premiers résultats, certainement en partie grâce à ses incitations, et aussi à B. Malgrange qui m'a donné beaucoup de conseils utiles, et qui a accepté d'être rapporteur de cette thèse.

Je remercie M. Cartan qui a bien voulu présider le jury de cette thèse' M. Thom qui a accepté de se joindre au jury, et M. Raynaud qui a dirigé le deuxième sujet.

Je remercie aussi mes amis du département de Mathématique d'Orsay : A. Chenciner, J. Bochnak, G. Lassalle, H. Hendriks, M. Herman pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir ensemble.

Mes remerciements s'adressent aussi à Mmes Dannenmuller, Launay et Zielinski qui ont assuré la préparation de la première version dactylographiée de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1 : *Introduction* 600
1.1. Notations 600
1.2. Introduction 601

CHAPITRE 2. : *La catégorie* $\mathcal{L}$ 603
2.1. Les objets de $\mathcal{L}$ 603

(*) Thèse, Orsay, 1972.

2.2. Inégalités de convexité 604
2.3. Morphismes de $\mathcal{L}$ 605
2.4. $\mathcal{L}$-notions 609

CHAPITRE 3 : *Exemples de $\mathcal{L}$-objets et de $\mathcal{L}$-morphismes* 610
3.1. Ouverts de sections d'un fibré vectoriel 610
3.2. Ouverts d'espaces d'applications 611
3.3. Le-$\mathcal{L}$-morphisme « composition » 612
3.4. Le $\mathcal{L}$-groupe des difféomorphismes 616

CHAPITRE 4 : *Théorème des fonctions implicites* 619
4.1. Le théorème des fonctions implicites 619
4.2. Le cas des actions de groupe 628
4.3. Applications simples du théorème 4.2.6 631

CHAPITRE 5 : $\mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{T}^n)$ 632
5.1. Introduction et notations 632
5.2. Le théorème de conjugaison 633

CHAPITRE 6 : *Théorèmes de division* 635
6.1. Division à une variable 635
6.2. Division à plusieurs variables 642

CHAPITRE 7 : *Codimension d'une fonction* 644
7.1. Codimension d'une fonction 644
7.2. Fonctions de codimension finie 644
7.3. Existence d'une section de D 647

CHAPITRE 8 : *Action de* $\mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{M}) \times \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{R})$ *sur* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ 649
8.1. Énoncé 649
8.2. Existence de s_1 650
8.3. Existence de s_2 652

CHAPITRE 9 : *Stratification de* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ 654
9.1. Espace à opérateurs stratifié 654
9.2. Stratification naturelle de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ 656

BIBLIOGRAPHIE 659

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. NOTATIONS. — Soient M, N et P trois variétés différentiables de classe C^∞, éventuellement à bord. $\mathrm{C}^r(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ est l'espace des applications de classe C^r de source M et de but N $(0 \leqq r \leqq +\infty)$. Si $\mathrm{N} = \mathbf{R}$, on note simplement $\mathrm{C}^r(\mathrm{M}, \mathbf{R}) = \mathrm{C}^r(\mathrm{M})$. Si $0 \leqq r \leqq +\infty$, $\mathrm{Diff}^r(\mathrm{M})$ est l'espace des C^r-difféomorphismes de M.

Si $\pi : E \to M$ est un fibré vectoriel de classe C^∞, de fibre un espace de Banach, $\Gamma^r(\pi)$ est l'espace des sections de classe C^r de π. TM ou T (M) notent le fibré tangent de M, et on notera souvent $\Gamma^r(M)$ au lieu de $\Gamma^r(TM)$.

Tous ces espaces sont munis de leur topologie habituelle. La variété source sera toujours compacte, ce qui dispense de choisir entre topologies C^r ou $\mathcal{C}^r$.

Si M′ est une partie de M, $C^r_{M'}(M)$ désigne le sous-espace de $C^r(M)$ constitué des fonctions nulles dans le complémentaire de M′. On interprète de même $\Gamma^r_{M'}(\pi)$, si π est un fibré vectoriel sur M (sections nulles dans le complémentaire de M′) et $\mathrm{Diff}^r_{M'}(M)$ (difféomorphismes induisant l'identité sur le complémentaire de M′).

Une inégalité écrite $f(a, b) \underset{b}{\leqslant} g(a, b)$ signifie que pour tout b il existe une constante C_b telle que, pour tout a, $f(a, b) \leqslant C_b\, g(a, b)$. Par exemple, si $a, n \in \mathbf{N}$, on pourra écrire $(1+a)^n \underset{n}{\leqslant} 1 + a^n$. Cette convention permettra de ne pas écrire les très nombreuses constantes intervenant dans ce travail. Pour éviter toute ambiguïté, si la constante ne dépend d'aucune lettre, on écrira $\underset{*}{\leqslant}$ pour signaler qu'on utilise cette convention. Ainsi $f(a, b) \underset{*}{\leqslant} 1$ signifie simplement que la quantité $f(a, b)$ est bornée.

Dans un texte, la lettre e désigne l'élément neutre d'un groupe; si plusieurs groupes sont en jeu, le contexte permet de savoir de quel groupe e est élément neutre.

On utilisera souvent la notation $\hat{x}, \hat{y}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \ldots$; le chapeau signifie qu'il s'agit d'un « accroissement » ou d'un « vecteur tangent » sur lequel opère une application dérivée, ou un opérateur différentiel, ou une application tangente, ... Ainsi, à la notation classique $dy = f'(x)\,dx$, préférons-nous $\hat{y} = f'(x).\hat{x}$, plus légère quand le nombre de ces « accroissements » devient élevé.

On sait décrire l'isomorphisme canonique, qui définit le premier membre :

$$C^r(M, C^r(N, P)) \approx C^r(M \times N, P).$$

Si $f \in C^r(M, C^r(N, P))$, ou si $f \in C^r(M \times N, P)$ ceci permettra sans autre explication de noter indifféremment $f(m)(n)$ ou $f(m, n)$; on utilise l'une ou l'autre notation selon les besoins; dans un texte, on peut passer sans précision de l'une à l'autre. Par exemple, si $\hat{\xi}$ est un vecteur tangent en $x \in M$, et si $f \in C^r(M, N)$, alors on peut écrire

$$f'(x).\hat{\xi} = f'(x, \hat{\xi}).$$

1.2. Introduction. — L'origine de ce travail est la recherche d'une démonstration du théorème 9.2.4 affirmant la locale trivialité de la stratification « naturelle » de l'espace $C^\infty(M)$ des fonctions numériques différentiables définies sur une variété M.

Si on traduit analytiquement ce problème, on voit que la solution peut relever de théorèmes de fonctions implicites du type inventé par Nash [22] pour traiter du plongement euclidien des variétés riemanniennes. Des généralisations ou améliorations du théorème de Nash dans diverses directions ont été données par J. Schwartz ([24], [25]), Moser ([20], [21]), Arnold [3], Kolmogorov [13], Steinberg [30], Antoine [2], Hamilton [8], Jacobowitz et Greene ([7], [12]). Les améliorations données ici concernent le « cas C^∞ » (qui a aussi été traité indépendamment et d'une autre façon par Hamilton [8], et Jacobowitz et Greene [7], [12]), et surtout la dépendance des paramètres. On peut résumer cette amélioration en disant que si les données sont C^∞, la fonction implicite trouvée est C^∞ (cas $\rho = \infty$ dans 4.1.1).

Pour expliquer la nature de ce théorème de fonctions implicites, supposons qu'on ait une application $\Phi : C^\infty(M) \to C^\infty(N)$ qui en un sens raisonnable soit de classe C^1, et telle que $\Phi'(0)$ [application linéaire de source $C^\infty(M)$ et de but $C^\infty(N)$] soit surjective et admette une section $L : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$. On espère alors que Φ admet aussi une section locale. Si on veut appliquer le théorème des fonctions implicites classique, il faut une majoration du type $\| L(f) \|_i \underset{i}{\leq} \| f \|_i$. Or dans le problème envisagé ici, et dans bien d'autres, on dispose seulement d'une majoration du type $\| L(f) \|_i \underset{i}{\leq} \| f \|_{i+\alpha}$ où α est une constante entière appelée « perte de différentiabilité ». Il faut alors avoir recours à un procédé techniquement assez fin inventé par Nash et rendu nettement plus utilisable par Moser par l'usage de la « méthode de Newton ». La démonstration du théorème de fonctions implicites que nous voulons utiliser occupe le chapitre 4.

On voit que ce théorème fonctionne dans une catégorie baptisée catégorie $\mathcal{L}$ dont la description occupe le chapitre 2. Le fait que le composé de deux morphismes soit un morphisme (2.3.7) est non trivial et cache beaucoup d'informations (voir par exemple la démonstration du théorème 4.2.5).

Les conditions exigées pour être un objet ou un morphisme de $\mathcal{L}$ sont assez contraignantes. Le but du chapitre 3 est de montrer que les espaces et applications qui nous occupent sont bien des éléments de $\mathcal{L}$. Le lecteur pressé peut se contenter de cette constatation.

Dans le chapitre 5 on applique le théorème de fonctions implicites (4.1.1) à l'étude de la locale trivialité de l'action de conjugaison de $\mathrm{Diff}^\infty(T^n)$ sur lui-même. Cette application me fut proposée par Herman qui sut déduire du résultat la simplicité de la composante connexe de l'élément neutre de Diff$^\infty$ (T^n) [9].

Le chapitre 6 est occupé par la démonstration d'un théorème de « préparation » (6.2.1) très voisin d'un cas particulier du théorème maintenant classique de Malgrange-Mather ([15], [17]). La précision concerne la différentiabilité des coefficients $Q_i(f)$ et $H_j(f)$ (*cf.* énoncé du théorème 6.2.1). Ce résultat est utilisé au cours du chapitre 8.

Dans les chapitres 7, 8 et 9, on étudie la stratification « naturelle » de $C^\infty(M)$. Dans le chapitre 7 on définit la codimension d'une fonction, et on donne quelques propriétés des fonctions de codimension finie; dans le chapitre 8 on étudie l'action du groupe Diff$^\infty$ (source) $\times$ Diff$^\infty$ (but) sur les fonctions de codimension finie, et au chapitre 9 on déduit la locale trivialité de la stratification naturelle de $C^\infty(M)$.

Des démonstrations résumées de ces résultats ont fait l'objet de trois Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ([27], [28] et [10]), dont l'une en collaboration avec Herman.

On doit noter que G. Lassalle a présenté au Colloque international de Strasbourg de juin 1972 une démonstration plus simple du théorème 9.2.4 n'utilisant pas le théorème de fonctions implicites 4.1.1.

CHAPITRE 2

La catégorie $\mathcal{L}$

Le but de cette section est de définir la catégorie où fonctionne le théorème de fonctions implicites qui fera l'objet de la section 4.

2.1. Les objets de $\mathcal{L}$. — *Un objet de* $\mathcal{L}$ est un quadruplet $(B, E, \mathcal{N}, \mathcal{S})$ où :

(*a*) E est un espace de Fréchet;

(*b*) $\mathcal{N} = (|\ .\ |_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante de normes définissant la topologie de E;

(*c*) $\mathcal{S} = (S(t))_{t\in\mathbf{R}_*^+}$ est une famille à un paramètre d'opérateurs « d'approximation » : $S(t) : E \to E$, $(t \in]0, \infty[= \mathbf{R}_*^+)$, telle que

$$(2.1.2)\qquad |S(t)\,x|_{i+k} \underset{(i,k)}{\leq} t^k\,|x|_i \qquad (i, k\in\mathbf{N},\ t\in\mathbf{R}_*^+,\ x\in E),$$

$$(2.1.3)\qquad |S(t)\,x - x|_i \underset{(i,k)}{\leq} t^{-k}\,|x|_{i+k} \qquad (i, k\in\mathbf{N},\ t\in\mathbf{R}_*^+,\ x\in E).$$

(*d*) B est un ouvert de E où E est muni de la topologie définie par l'une des normes $|\ .\ |_i$. On notera $\omega(B)$ l'indice de cette norme (qui fait partie de la donnée du $\mathcal{L}$-objet).

Quelques commentaires pour éclairer cette définition. Notons E_i l'espace de Banach obtenu en complétant E relativement à la norme $| \, . \, |_i$. Le fait que la suite $\mathcal{N}$ soit croissante implique que si $i \leqq j$, l'application identique $E \to E$ se prolonge en une application continue $\rho_{j,i} : E_j \to E_i$ qui sera souvent une injection. Dire que la topologie de E est définie par la suite $\mathcal{N}$, c'est dire que E s'identifie à la limite projective

$$\varprojlim (E_i, \rho_{j,i})_{\mathbf{N}}.$$

On peut justifier maintenant le nom d'opérateur d'approximation donné à S (t); les inégalités (2.1.2) montrent que S (t) se prolonge en S $(t) : E_0 \to E$ continue : S (t) « approche » un élément de E_0 par un élément de E; les inégalités (2.1.3) expriment la qualité de l'approximation (bonne si t est grand), et les inégalités (2.1.2) la « grandeur » de l'approximation (élevée si l'approximation est bonne).

On peut résumer ceci en disant qu'un $\mathcal{L}$-objet est *un ouvert d'un espace de Fréchet muni de bons opérateurs d'approximation.*

2.1.4. Définition. — Soient $(B, E, \mathcal{N}, \mathcal{S})$ et $(B', E', \mathcal{N}', \mathcal{S}')$ deux $\mathcal{L}$-objets.

L'objet $(B'', E'', \mathcal{N}'', \mathcal{S}'')$ où :

(*a*) $B'' = B \times B'$;

(*b*) $E'' = E \times E'$;

(*c*) $| (x, y) |''_i = | x |_i + | y |'_i$;

(*d*) $S''(t)(x, y) = (S(t)\, x, \ S'(t)\, y)$

est, comme on peut le vérifier immédiatement, un $\mathcal{L}$-objet qu'on appelle *produit* des deux $\mathcal{L}$-objets $(B, E, \mathcal{N}, \mathcal{S})$ et $(B', E', \mathcal{N}', \mathcal{S}')$.

2.1.5. Définition. — Un $\mathcal{L}$-objet $(B, E, \mathcal{N}, \mathcal{S})$ est *i-borné* $(i \in \mathbf{N})$ si B est borné dans E pour $| \, . \, |_i$.

Au lieu du $\mathcal{L}$-objet $(B, E, \mathcal{N}, \mathcal{S})$, on parlera souvent par abus de langage du $\mathcal{L}$-objet B, les termes E, $\mathcal{N}$, $\mathcal{S}$ étant clairement définis par le contexte.

2.1.6. Définition. — Un triplet $(E, \mathcal{N}, \mathcal{S})$ est un *$\mathcal{L}$-espace de Fréchet* si le quadruplet $(E, E, \mathcal{N}, \mathcal{S})$ est un $\mathcal{L}$-objet.

2.2. Inégalités de convexité.

2.2.2. Théorème. — *Soit* $(E, \mathcal{N}, \mathcal{S})$ *un $\mathcal{L}$-espace de Fréchet. Si* $x \in E$, *si* p, q, $r \in \mathbf{N}$ *avec* $p \leqq q \leqq r$, *alors*

$$| x |_q \underset{(p,q,r)}{\leqq} | x |_p^{\frac{r-q}{r-p}} \, | x |_r^{\frac{q-p}{r-p}}. \tag{2.2.2}$$

Démonstration. — D'après (2.1.2) et (2.1.3), on a pour tout $t \in \mathbf{R}_*^+$:

$$|x|_q \leq |S(t)x|_q + |x - S(t)x|_q \underset{(p,q,r)}{\leq} t^{q-p}|x|_p + t^{q-r}|x|_r.$$

Si on fixe x, la fonction de t figurant au troisième membre atteint son minimum pour

$$t_0 = \left[\frac{r-q}{q-p}\,\frac{|x|_r}{|x|_p}\right]^{\frac{1}{r-p}}.$$

La valeur de cette fonction en t_0 est

$$\left[\left(\frac{r-q}{q-p}\right)^{\frac{q-p}{r-p}} + \left(\frac{q-p}{r-q}\right)^{\frac{r-q}{r-p}}\right]|x|_p^{\frac{r-q}{r-p}}|x|_r^{\frac{q-p}{r-p}}.$$

D'où l'inégalité (2.2.2). ■

Le théorème 2.2.1 établit un lien entre l'existence de « bons » opérateurs d'approximation, et l'existence de relations de convexité entre les normes $|\,.\,|_i$. L'inégalité (2.2.2) [dite d'Hadamard si $E = C^\infty(M)$] sera constamment utilisée dans la suite.

2.3. Morphismes de $\mathcal{L}$. — On notera toujours $|\,.\,|_i$ la $i^{\text{ième}}$ norme figurant dans la donnée d'un $\mathcal{L}$-objet, norme définissant partiellement la topologie de l'espace de Fréchet dont l'objet est ouvert.

Soient B un $\mathcal{L}$-objet, E le $\mathcal{L}$-espace de Fréchet correspondant, $F_1, \ldots, F_q$, G d'autres $\mathcal{L}$-espaces de Fréchet. Soit

$$f:\quad B \to L(F_1 \times \ldots \times F_q,\ G)$$

une application. On note encore

$$f:\quad B \times F_1 \times \ldots \times F_q \to G$$

l'application (linéaire en chacune des q dernières variables) définie par f.

2.3.1. Définition. — f est un *q-$\mathcal{L}$-morphisme de classe* C^r $(0 \leq r \leq \infty)$, si f vérifie les conditions (a) et (b) ci-dessous :

(a) pour tout k $(0 \leq k < r+1)$ on peut trouver un entier positif $d_k \geq \omega(B)$ tel que, pour tout $i \in \mathbf{N}$,

$$f:\quad (B \times F_1 \times \ldots \times F_q, |\,.\,|_{i+d_k}) \to (G, |\,.\,|_i)$$

soit de classe C^k. Ceci signifie que f est de classe C^k comme application de $B \times F_1 \times \ldots \times F_q$. ouvert de l'espace vectoriel $E \times F_1 \times \ldots \times F_q$ normé par $|\,.\,|_{i+d_k}$ dans l'espace vectoriel G normé par $|\,.\,|_i$. On utilisera souvent cette notation.

Si $l < r+1$, la différentielle $d^l f$ ne dépend pas du choix de $k \geq l$, ni du choix de i; on peut donc parler de la différentielle $d^l f$. En fait, comme f est linéaire en les q dernières variables, les dérivées par rapport à ces variables ne présentent pas d'intérêt. *Aussi notera-t-on toujours $d^l f$ la dérivée partielle d'ordre l par rapport à la première variable. Ainsi*

$$d^l f : \quad B\times F_1\times\ldots\times F_q\times E^l \to G.$$

On demande alors :

(b) pour tout $k < r+1$, l'application

$$d^k f : \quad B\times F_1\times\ldots\times F_q\times E^k \to G$$

vérifie

$$(2.3.2) \quad \begin{aligned} &| d^k f(x; y_1, \ldots, y_q; \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k) |_i \\ &\underset{(i,k)}{\leqq} (1 + | x |_{i+d_k}) | y_1 |_0 \ldots | y_q |_0 | \hat{x}_1 |_0 \ldots | \hat{x}_k |_0 \\ &\quad + \sum_{l=1}^{q} | y_1 |_0 \ldots | y_{l-1} |_0 | y_l |_{i+d_k} | y_{l+1} |_0 \ldots | y_q |_0 | \hat{x}_1 |_0 \ldots | \hat{x}_k |_0 \\ &\quad + \sum_{l=1}^{k} | y_1 |_0 \ldots | y_q |_0 | \hat{x}_1 |_0 \ldots | \hat{x}_{l-1} |_0 | \hat{x}_l |_{i+d_k} | \hat{x}_{l+1} |_0 \ldots | \hat{x}_k |_0, \end{aligned}$$

si $x \in B$, si $y_l \in F_l$ $(1 \leqq l \leqq q)$, et si $\hat{x}_l \in E$ $(1 \leqq l \leqq k)$.

2.3.3. Définition. — Une suite $(d_k)_{0\leqq k<r+1}$ vérifiant (a) et (b) de 2.3.1 est une *suite associée à f*. Si, pour $k < r+1$, $d'_k \geqq d_k$, alors $(d'_k)_{0\leqq k<r+1}$ est aussi une suite associée à f.

2.3.4. Remarque. — Si f est un q-$\mathcal{L}$-morphisme de classe C^r, alors $d^k f$ est un $(q+k)$-$\mathcal{L}$-morphisme de classe C^{r-k} si $k < r+1$ et réciproquement, si f est un p-$\mathcal{L}$-morphisme de classe C^r, et que $d^r f$ est un $(p+r)$-$\mathcal{L}$-morphisme de classe C^s, alors f est un p-$\mathcal{L}$-morphisme de classe C^{r+s}. Cette remarque est à la base de nombreuses démonstrations par récurrence dans la suite.

2.3.5. Remarque. — Si, dans les mêmes conditions qu'en 2.3.1, le $\mathcal{L}$-objet B est un produit $B_1\times\ldots\times B_p$ de $\mathcal{L}$-objets, et si on fixe p' variables parmi les p premières, et q' variables parmi les q dernières, la « section » de f ainsi obtenue est un $(q-q')$-$\mathcal{L}$-morphisme de classe C^r de source $(B_{p'+1}\times\ldots\times B_p)\times F_{q'+1}\times\ldots\times F_q$, par exemple.

Souvent dans la suite, q sera égal à 0. On parlera alors simplement de *$\mathcal{L}$-morphisme de classe* C^r.

2.3.6. Définition. — Supposons que dans la définition (2.3.1), on permette à l'entier d_k de dépendre non seulement de k, mais aussi de i, de sorte qu'il faudra écrire par exemple :

$$f : \quad (B\times F_1\times\ldots\times F_q, |\,.\,|_{i+d_{k,i}}) \to (G, |\,.\,|_i)$$

est de classe C^k pour $k < r+1$.

On suppose en outre qu'on n'exige plus de f le (b) de la définition (2.3.1). On dira alors que f est un *q-$\mathcal{L}$-morphisme faible* de classe C^r.

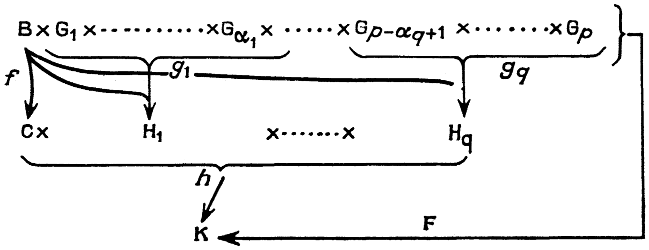
Cette définition peut paraître artificielle; elle sera justifiée par l'énoncé du théorème 4.1.1.

2.3.7. Théorème. — *Soient* B, C *des $\mathcal{L}$-objets*, E, F *les $\mathcal{L}$-espaces de Fréchet correspondants. Soient* $G_1, \ldots, G_p, H_1, \ldots, H_q$, K, *d'autres $\mathcal{L}$-espaces de Fréchet. On suppose* B 0-*borné* (*cf.* définition 2.1.5). *Soient* $f : B \to C$ *un $\mathcal{L}$-morphisme de classe* C^r, $g_i : B\times G_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1}\times\ldots\times G_{\alpha_1+\ldots+\alpha_i} \to H_i$ *des α_i-$\mathcal{L}$-morphismes de classe* C^r ($1 \leqq i \leqq q$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ *étant des entiers de somme* p), *et* $h : C\times H_1\times\ldots\times H_q \to K$ *un q-$\mathcal{L}$-morphisme de classe* C^r.

Soit $F : B\times G_1\times\ldots\times G_q \to K$ *l'application définie par*

$$F(x, y_1, \ldots, y_p) = h(f(x); g_1(x; y_1, \ldots, y_{\alpha_1}), \ldots, g_q(x; \ldots, y_p)).$$

Alors F *est un p-$\mathcal{L}$-morphisme de classe* C^r.



Nous aurons besoin pour la démonstration de deux lemmes.

2.3.8. Lemme. — *Si* $a_1, \ldots, a_p, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbf{R}^+$, *et si* $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = 1$, *alors*

$$a_1^{\alpha_1}\ldots a_p^{\alpha_p} \underset{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)}{\leqq} a_1+\ldots+a_p. \tag{2.3.9}$$

Démonstration. — Exercice.

2.3.10. Lemme. — *Si* $a', b_1, \ldots, b_q, b'_1, \ldots, b'_q, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbf{R}^+$, *si* $r \geqq \alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_q$, *et si* $b_i \leqq b'_i$ ($1 \leqq i \leqq q$), *alors*

$$(1+a')^{\frac{\alpha}{r}}\, b_1^{\frac{r-\beta_1}{r}}\, b_1'^{\frac{\beta_1}{r}} \ldots b_q^{\frac{r-\beta_q}{r}}\, b_q'^{\frac{\beta_q}{r}} \tag{2.3.11}$$

$$\underset{(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_q,r)}{\leqq} (1+a')\, b_1\ldots b_q + \sum_{l=1}^{q} b_1\ldots b_{l-1}\, b'_l\, b_{l+1}\ldots b_q.$$

Démonstration. — Supposons d'abord $a' \geqq 1$. Alors le premier membre de (2.3.11) est majoré par

$$2\, a'^{\frac{\alpha}{r}}\, b_1^{\frac{r-\beta_1}{r}}\, b_1'^{\frac{\beta_1}{r}} \ldots b_q^{\frac{r-\beta_q}{r}}\, b_q'^{\frac{\beta_q}{r}}. \tag{2.3.12}$$

Soit

$$r' = \alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_q \leqq r.$$

Comme $a' \geqq 1$, on a $a'^{\frac{\alpha}{r}} \leqq a'^{\frac{\alpha}{r'}}$, et comme $b_i \leqq b_i'$, on a

$$b_i^{\frac{r-\beta_i}{r}}\, b_i'^{\frac{\beta_i}{r}} \leqq b_i^{\frac{r'-\beta_i}{r'}}\, b_i'^{\frac{\beta_i}{r'}}.$$

Donc le premier membre de (2.3.11) est majoré par

$$2\, a'^{\frac{\alpha}{r'}}\, b_1^{\frac{r'-\beta_1}{r'}}\, b_1'^{\frac{\beta_1}{r'}} \ldots b_q^{\frac{r'-\beta_q}{r'}}\, b_q'^{\frac{\beta_q}{r'}}$$
$$= 2\, b_1 \ldots b_q \left[a'^{\frac{\alpha}{r'}} \left(\frac{b_1'}{b_1}\right)^{\frac{\beta_1}{r'}} \cdots \left(\frac{b_q'}{b_q}\right)^{\frac{\beta_q}{r'}} \right] \leqq 2\, b_1 \ldots b_q \left[a' + \frac{b_1'}{b_1} + \ldots + \frac{b_q'}{b_q} \right],$$

d'où la majoration (2.3.11).

Si $a' \leqq 1$ on remplace α par 0 dans la démonstration ci-dessus, et on aboutit à la même conclusion.

Démonstration du théorème 2.3.7. — On montre d'abord le théorème pour $r = 1$.

D'abord :

$$dF(x, y_1, \ldots, y_q, \hat{x}) = dh(f(x); g_1, \ldots, g_q, df(x, \hat{x}))$$
$$+ \sum_{l=1}^{q} h(f(x); g_1, \ldots, g_{l-1}, dg_l(x, y_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{l-1}+1}, \ldots, y_{\alpha_1+\ldots+\alpha_l}, \hat{x}), g_{l+1}, \ldots, g_q).$$

Donc en utilisant que h est un q-$\mathcal{L}$-morphisme de classe C^1, on peut trouver un entier d tel que

$$| dF(x, y_1, \ldots, y_q, \hat{x}) |_i \underset{i}{\leqq} (1 + | f(x) |_{i+d}) \, | g_1 |_0 \ldots | g_q |_0 \, | df |_0$$
$$+ \sum_{l=1}^{q} | g_1 |_0 \ldots | g_l |_{i+d} \ldots | g_q |_0 \, | df |_0 + | g_1 |_0 \ldots | g_q |_0 \, | df |_{i+d}$$
$$+ \sum_{l=1}^{q} (1 + | f(x) |_{i+d}) \, | g_1 |_0 \ldots | dg_l |_0 \ldots | g_q |_0$$
$$+ \sum_{\substack{l,m=1 \\ l \neq m}}^{q} | g_1 |_0 \ldots | g_m |_{i+d} \ldots | dg_l |_0 \ldots | g_q |_0 + \sum_{l=1}^{q} | g_1 |_0 \ldots | dg_l |_{i+d} \ldots | g_q |_0.$$

En utilisant maintenant le fait que f, g_1, ..., g_q sont des $\mathcal{L}$-morphismes de classe C^1, on obtient une majoration de $A = | dF(x, y_1, \ldots, y_q, \hat{x}) |_i$ par une somme de termes de la forme

$$A \underset{i}{\leqq} \sum (1 + |x|_d)^\alpha (1 + |x|_{i+2d}) |y_1|_{r_1} \ldots |y_q|_{r_q} |\hat{x}|_\Theta,$$

où

$$\alpha d + (i + 2d) + r_1 + \ldots + r_q + \Theta \leqq i + 2d + (q+1)d = i + \delta_1.$$

Soit $s = i + \delta_1$; alors en utilisant les inégalités de convexité (2.2.2) et en se souvenant que B est 0-borné, il vient

$$A \underset{i}{\leqq} \sum (1 + |x|_s)^{\frac{\alpha d}{s}} (1 + |x|_s)^{\frac{i+2d}{s}} |y_1|_0^{\frac{s-r_1}{s}} |y_1|_s^{\frac{r_1}{s}} \ldots |y_q|_0^{\frac{s-r_q}{s}} |y_q|_s^{\frac{r_q}{s}} |\hat{x}|_0^{\frac{s-\Theta}{s}} |\hat{x}|_s^{\frac{\Theta}{s}}$$

$$\underset{i}{\leqq} \sum (1 + |x|_s)^{\frac{\alpha d + i + 2d}{s}} |y_1|_0^{\frac{s-r_1}{s}} \ldots |x|^{\frac{\Theta}{s}}.$$

Le lemme 2.3.10 permet alors d'affirmer :

$$A \underset{i}{\leqq} (1 + |x|_s) |y_1|_0 \ldots |y_q|_0 |\hat{x}|_0$$
$$+ \sum_{l=1}^{q} |y_1|_0 \ldots |y_{l-1}|_0 |y_l|_s |y_{l+1}|_0 \ldots |y_q|_0 |\hat{x}|_0 + |y_1|_0 \ldots |y_q|_0 |\hat{x}|_s.$$

Un calcul analogue montre l'existence d'un δ_0 tel que

$$| F(x, y_1, \ldots, y_q) |_i \underset{i}{\leqq} (1 + |x|_{i+\delta_0}) |y_1|_0 \ldots |y_q|_0 + \sum_{l=1}^{q} |y_1|_0 \ldots |y_l|_{i+\delta_0} \ldots |y_q|_0.$$

Ceci montre le théorème 2.3.7 pour $r = 0, 1$. Supposons celui-ci démontré pour $r - 1$; et démontrons-le pour r. On sait que F est un q-$\mathcal{L}$-morphisme de classe C^1; il suffit de montrer que dF est un $q+1$-$\mathcal{L}$-morphisme de classe C^{r-1}. Or

$$dF = dh(f; g_1, \ldots, g_q, df) + \sum_{l=1}^{q} h(f; g_1, \ldots, g_{l-1}, dg_l, g_{l+1}, \ldots, g_q).$$

L'hypothèse de récurrence, montre, par des substitutions convenables, que chacun des $q + 1$ termes constituant dF est de classe C^{r-1}. Donc F est de classe C^r.

Le théorème 2.3.7 est démontré. ■

2.4. $\mathcal{L}$-NOTIONS. — On peut définir dans la catégorie $\mathcal{L}$ beaucoup de « $\mathcal{L}$-notions », par des procédés de construction analogues à ceux utilisés dans d'autres catégories. On expose maintenant les $\mathcal{L}$-notions utilisées dans la suite de ce travail.

2.4.1. *$\mathcal{L}$-variétés de classe* C^r. — Soit V un espace topologique; une *structure de $\mathcal{L}$-variété de classe* C^r sur V est une famille $(O_i, \varphi_i)_{i \in I}$ où :

(*a*) $(O_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de E;

(*b*) pour tout i, $\varphi_i : O_i \to B_i$ est un homéomorphisme de O_i sur un ouvert 0-*borné* B_i d'un $\mathcal{L}$-espace de Fréchet;

(*c*) pour tous i, j, l'application de « changement de carte »

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \quad \varphi_i(O_i \cap O_j) \to \varphi_j(O_i \cap O_j)$$

est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^r.

2.4.2. *$\mathcal{L}$-morphismes de $\mathcal{L}$-variétés.* — Soient V, W des $\mathcal{L}$-variétés de classe C^r, $E_1, \ldots, E_m$, F des $\mathcal{L}$-espaces de Fréchet. On définit sans difficulté la notion de *$\mathcal{L}$-morphisme de classe* C^r de source V et de but W, ainsi que celle de m-$\mathcal{L}$-morphisme de classe C^r de source $V \times E_1 \times \ldots \times E_m$ et de but F. La précision que B_i est 0-borné en 2.4.1 (*b*), et le théorème 2.3.7 assurent la cohérence de ces définitions.

2.4.3. *$\mathcal{L}$-groupes. — Un $\mathcal{L}$-groupe de classe* C^r est une $\mathcal{L}$-variété de classe C^r, G, munie d'une structure de groupe $\varphi : G \times G \to G$ telle que :

(*a*) $\varphi : G \times G \to G$ est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^r;

(*b*) $\iota : G \to G$ définie par $\iota(x) = x^{-1}$ est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^r.

2.4.4. *$\mathcal{L}$-actions de $\mathcal{L}$-groupes.* — Soient G un $\mathcal{L}$-groupe de classe C^r et V une $\mathcal{L}$-variété de classe C^r. Une application $\Phi : G \times V \to V$ est une *$\mathcal{L}$-action de groupe* si :

(*a*) Φ est une action de groupe;

(*b*) Φ est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^r.

CHAPITRE 3

Exemples de $\mathcal{L}$-objets et de $\mathcal{L}$-morphismes

3.1. Ouverts de sections d'un fibré vectoriel. — Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel réel de dimension finie sur la variété différentiable compacte M.

On sait munir $\Gamma^\infty(\pi)$ de normes $|\ .\ |_i$ ($i \in \mathbf{N}$) qui font de $\Gamma^\infty(\pi)$ un espace de Fréchet (*cf.* par exemple Abraham [1], chapitre 2).

D'autre part on peut construire (Nash [22], J. Schwartz [24], [25], Moser [20]) une famille à un paramètre d'opérateur d'approximation

$S(t) : \Gamma^0(\pi) \to \Gamma^\infty(\pi)$ $(t \in \mathbf{R}_*^+)$ qui vérifie les inégalités suivantes :

(3.1.1) $$|S(t)x|_{i+k} \underset{(i,k)}{\leqq} t^k |x|_i \qquad [i, k \in \mathbf{N}, x \in \Gamma^i(\pi), t \in \mathbf{R}_*^+],$$

(3.1.2) $$|x - S(t)x|_i \underset{(i,k)}{\leqq} t^{-k} |x|_{i+k} \qquad [i, k \in \mathbf{N}, x \in \Gamma^{i+k}(\pi), t \in \mathbf{R}_*^+],$$

(3.1.3) $$\lim_{t \to \infty} |x - S(t)x|_i = 0 \qquad [i \in \mathbf{N}, x \in \Gamma^i(\pi)].$$

Ainsi, si B est un ouvert de $\Gamma^\infty(\pi)$, le quadruplet $(B, \Gamma^\infty(\pi), (|\,.\,|_i)_{i\in\mathbf{N}}, S)$ est un $\mathcal{L}$-objet.

3.2. Ouverts d'espaces d'applications. — Soient M et N deux variétés différentiables C^∞, M compacte; soit $C^\infty(M, N)$ l'espace des applications C^∞ de M dans N.

On munit N d'une métrique riemannienne $\mathcal{M}$, complète et de classe C^∞. $\mathcal{M}$ définit une application « exponentielle »

$$e : T(N) \to N$$

définie par :

Si $\xi \in T(N)$, *si* $e_\xi : \mathbf{R} \to N$ *est définie par* $e_\xi(t) = e(t\xi)$, *alors* e_ξ *est une géodésique et* $\frac{de_\xi}{dt}(0) = \xi$.

Soit $\tilde{e} : T(N) \to N \times N$ définie par $\tilde{e} = \pi \times e$ ou $\pi : T(N) \to N$ est la projection canonique $\pi : T(N) \to N$. On sait que $\tilde{e}$ est un C^∞-difféomorphisme d'un voisinage V de la section nulle de T (N) sur un voisinage W de la diagonale de $N \times N$. On suppose que V est localement borné, c'est-à-dire qu'au-dessus d'un compact de N, la norme d'un élément de V est bornée.

Si $\xi \in V$, on note

$$e(\xi) = \pi(\xi) + \xi$$

et si $(x, y) \in \mathcal{W}$, on écrit

$$\tilde{e}^{-1}(x, y) = y - x \in \pi^{-1}(x).$$

Soient $f \in C^\infty(M, N)$ et $\rho : E \to M$ le fibré image réciproque de $\pi : TN \to N$ par f. On sait que les sections C^∞ du fibré ρ s'identifient aux applications C^∞, $\gamma : M \to TN$ telles que $\pi \circ \gamma = f$ (sections « au-dessus » de f); on notera donc $\Gamma^\infty(\rho)$ l'espace de ces applications.

On va établir un homéomorphisme Φ_f entre :

(*a*) $\mathcal{W}_f$, ensemble des $g \in C^\infty(M, N)$ telles que pour tout x de M, $(f(x), g(x)) \in W$; et :

(*b*) $\mathcal{V}_f$, ensemble des sections $\gamma \in \Gamma^\infty(\rho)$ au-dessus de f telles que, pour tout x de M, $\rho(x) \in V$.

Il suffit de définir $\Phi_f : \mathcal{W}_f \to \mathcal{V}_f$ par

$$\Phi_f(g)(x) = g(x) - f(x) \qquad (\text{si } g \in \mathcal{W}_f).$$

Alors

$$\Phi_f^{-1}(\gamma)(x) = f(x) + \gamma(x) \qquad (\text{si } \gamma \in \mathcal{V}_f).$$

Par transport de la structure de $\mathcal{V}_f$, $\mathcal{W}_f$ est ainsi muni d'une structure de $\mathcal{L}$-objet. On verra au paragraphe suivant que, moyennant une correction minime, si $\mathcal{W}_f \cap \mathcal{W}_g \neq \emptyset$, l'application de « changement de carte » $\Phi_g \circ \Phi_f^{-1} : \Phi_f(\mathcal{W}_f \cap \mathcal{W}_g) \to \Phi_g(\mathcal{W}_f \cap \mathcal{W}_g)$ est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞.

Ainsi $C^\infty(M, N)$ est muni canoniquement (la structure obtenue ne dépend pas du choix de $\mathcal{M}$ et du choix pour chaque f de V) d'une structure de *$\mathcal{L}$-variété de classe* C^∞.

3.3. Le $\mathcal{L}$-morphisme « composition ».

3.3.1. Théorème. — *Soient* K *et* L *des domaines compacts à bord lisse de* $\mathbf{R}^m$ *et* $\mathbf{R}^n$ *respectivement. Soit* $B \subset C^\infty(K, \mathbf{R}^n)$ *un ouvert tel que* :

(*a*) B *est* 1-*borné* [pour les normes habituelles de $C^\infty(K, \mathbf{R}^n)$];

(*b*) *si* $f \in B$, *l'image de* f *est incluse dans* L.

Soit $\Phi : B \times C^\infty(L, \mathbf{R}^n)$ *définie par*

$$\Phi(f, g) = g \circ f.$$

Alors Φ *est un* 1-*$\mathcal{L}$-morphisme de classe* C^∞ (on remarque que Φ est linéaire en g).

3.3.2. Théorème. — *Soit* K *un domaine compact à bord lisse de* $\mathbf{R}^m$, *et soit* $L^q((\mathbf{R}^n)^q, \mathbf{R}^n)$ *l'espace vectoriel des applications q-linéaires de source* $(\mathbf{R}^n)^q$ *et de but* $\mathbf{R}^p$. *Soit*

$$\Psi : \quad [(C^\infty(K, \mathbf{R}^n))]^q \times C^\infty(K, L^q((\mathbf{R}^n)^q, \mathbf{R}^p)) \to C^\infty(K, \mathbf{R}^n)$$

l'application définie par

$$\Psi(f_1, \ldots, f_q; g)(x) = g(x)(f_1(x), \ldots, f_q(x)).$$

Alors Ψ *est un* $(q+1)$-*$\mathcal{L}$-morphisme de classe* C^∞ (on remarque que Ψ est linéaire en chacune des variables $f_1, \ldots, f_q, g$).

On remarque qu'il suffit de montrer que Ψ est un morphisme de classe C^0, car Ψ est linéaire par rapport à toutes ses variables.

Démonstration du théorème 3.3.2. — On établit par récurrence sur r la « formule de Leibniz » :

$$d^r(\Psi(f_1, \ldots, f_q, g)) = \sum_{\substack{i_0, \ldots, i_q \geq 0 \\ i_0 + \ldots + i_q = r}} \sigma_{i_0, \ldots, i_q}\, g^{(i_0)}.(f_1^{(i_1)}, \ldots, f_q^{(i_q)})$$

pour des coefficients $\sigma_{i_0,\ldots,i_q}$ convenables. Donc

$$
\begin{aligned}
|d^r(\Psi(f_1,\ldots,f_q,g))| &\underset{r}{\leq}\sum |g|_{i_0}|f_1|_{i_1}\ldots|f_q|_{i_q}\\
&\leq \sum |g|_0^{\frac{r-i_0}{r}}|g|_r^{\frac{i_0}{r}}|f_1|_0^{\frac{r-i_1}{r}}|f_1|_r^{\frac{i_1}{r}}\ldots|f_q|_0^{\frac{r-i_q}{r}}|f_q|_r^{\frac{i_q}{r}}\\
&\leq |g|_r|f_1|_0\ldots|f_q|_0+\sum_{l=1}^{q}|g|_0|f_1|_0\ldots|f_{l-1}|_0|f_l|_r|f_{l+1}|_0\ldots|f_q|_0
\end{aligned}
$$

par application du lemme 2.3.10.

Ainsi Ψ est un morphisme de classe C^∞ avec pour suite associée (2.3.3) la suite identiquement nulle. ■

Démonstration du théorème 3.3.1. — On établit d'abord que Φ est un morphisme de classe C^0. D'après la formule de Faa-di-Bruno (*cf.* Abraham [1], p. 3) :

$$
d^r(g\circ f)=\sum_{q=1}^{r}\ \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_q\geq 1\\ i_1+\ldots+i_q=r}}\sigma_{i_1,\ldots,i_q}(d^q g\circ f).(d^{i_1}f,\ldots,d^{i_q}f).
$$

Donc

$$
|d^r(g\circ f)|\underset{r}{\leq}\sum|g|_q|f|_{i_1}\ldots|f|_{i_q}\leq\sum|g|_0^{\frac{r-q}{r}}|g|_r^{\frac{q}{r}}|f|_1^{\frac{r-i_1+1}{r}}|f|_{r+1}^{\frac{i_1-1}{r}}\ldots|f|_1^{\frac{r-i_q+1}{r}}|f|_{r+1}^{\frac{i_q-1}{r}}
$$

et se souvenant que $|f|_1\underset{*}{\leq}1$:

$$
\underset{r}{\leq}\sum|g|_0^{\frac{r-q}{r}}|g|_r^{\frac{q}{r}}|f|_{r+1}^{\frac{r-q}{r}}\underset{r}{\leq}|f|_{r+1}|g|_0+|g|_r\leq(1+|f|_{r+1})|g|_0+|g|_{r+1}.
$$

Ceci montre que Φ est de classe C^0.

Ensuite, d'après Dieudonné [6], VIII.12, problème 9 :

$$
d\Phi(f,g,\hat{f})=(dg\circ f).\hat{f}.
$$

Montrons que cette application $(f,g,\hat{f})\mapsto d\Phi(f,g,\hat{f})$ est un morphisme de classe C^0, ce qui montrera que Φ est de classe C^1.

Il est clair que $g\mapsto dg$ est de classe C^∞; donc (2.3.7), $(f,g)\mapsto dg\circ f$ est de classe C^0, et (2.3.7) et (3.3.2), $d\Phi$ est de classe C^0.

Supposons maintenant par récurrence qu'on ait démontré que Φ est de classe C^{r-1}. Alors on sait montrer que $(f,g)\mapsto dg\circ f$ est de classe C^{r-1}, et, (2.3.7) et (3.3.2), que $d\Phi$ est de classe C^{r-1}. Donc Φ est de classe C^r. La récurrence peut se poursuivre. Φ est donc de classe C^r pour tout r, c'est-à-dire Φ est classe C^∞. ■

3.3.3. Proposition. — *Soient* M *une variété* C^∞ *compacte,* $\pi : E \to M$ *et* $\rho : F \to M$ *deux fibrés vectoriels de dimension finie et de classe* C^∞. *Soient* O *un ouvert de* E, K *un compact de* O, $\alpha : O \to F$ *une application fibrée de classe* C^∞ (i. e. $\rho \circ \alpha = \pi$). *Soit* $B \subset \Gamma^\infty(\pi)$ *tel que* :

(1) B *est* 1-*borné.*

(2) *Si* $\gamma \in B$, $\operatorname{Im} \gamma \subset K$.

Alors $\alpha_* : B \to \Gamma^\infty(\rho)$ *défini par* $\alpha_*(\gamma) = \alpha \circ \gamma$ *est un* $\mathcal{L}$-*morphisme de classe* C^∞.

Démonstration. — Étant donné la définition des normes $|\,.\,|_i$ sur $\Gamma^\infty(\rho)$ et $\Gamma^\infty(\pi)$ (*cf.* 3.1), on peut supposer que M est un compact de $\mathbf{R}^p$, que $E = M \times \mathbf{R}^m$ et $F = M \times \mathbf{R}^n$, π et ρ étant les projections canoniques. K est un compact de $M \times \mathbf{R}^n$. $\Gamma^\infty(\rho)$ et $\Gamma^\infty(\pi)$ s'identifient alors respectivement à $C^\infty(M, \mathbf{R}^m)$ et $C^\infty(M, \mathbf{R}^n)$.

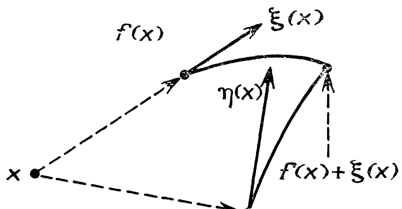
On sait (3.3.1) que l'application $(f, g) \mapsto g \circ f$ de source

$$C^\infty(M, K) \times C^\infty(K, \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n)$$

et de but $C^\infty(M, \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n)$ est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞. En particulier, si on fait correspondre à $\gamma : M \to \mathbf{R}^m$ l'application $\delta : M \to \mathbf{R}^n$ définie par $\delta(x) = p_2 \circ \alpha(x, \gamma(x))$, où p_2 désigne la projection $M \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, alors l'application $\gamma \mapsto \delta$ est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞ (2.3.5 et 3.3.1). C'est précisément ce qu'il faut montrer. ■

3.3.4. Proposition. — *Soient* M, N, $C^\infty(M, N)$ *comme en* 3.2. *Soit* $(\mathcal{W}'_f)_{f \in C^\infty(M,N)}$ *le recouvrement ouvert de* $C^\infty(M, N)$ *obtenu en remplaçant* $\mathcal{W}_f$ (construit en 3.2) par $\mathcal{W}'_f = \Phi_f^{-1}(\mathcal{V}'_f)$ *où* $\mathcal{V}'_f$ *est un voisinage* 1-*borné de* O (section nulle) *dans* $\mathcal{V}_f$. *Alors* $(\mathcal{W}'_f, \Phi_f)_{f \in C^\infty(M,N)}$ *est une structure de* $\mathcal{L}$-*variété de classe* C^∞.

Démonstration. — Soient f et $g \in C^\infty(M, N)$ tels que $\mathcal{W}'_f \cap \mathcal{W}'_g \neq \emptyset$.



L'application de « changement de carte » γ de $\mathcal{V}'_f$ dans $\mathcal{V}'_g$ est définie par

$$\gamma(\xi)(x) = \eta(x) = [f(x) + \xi(x)] - g(x).$$

Or cette application est définie par l'application fibrée

$$\alpha : \quad f^* (\mathrm{TN}) \supset \mathrm{V}' \to g^* (\mathrm{TN}),$$

où V′ est un ouvert de V défini en 3.2, et où

$$\alpha (\xi) = (f (p\, \xi) + \xi) - g (p\, \xi)$$

si on désigne par p la projection canonique du fibré f^* TN. [Comme en 3.2, on identifie un élément de f^* TN au-dessus de x à un élément de TN au-dessus de $f(x)$].

D'après (3.3.3), γ est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞ (car $\mathcal{V}'_f$ est 1-borné). Ceci démontre la proposition 3.3.4. ■

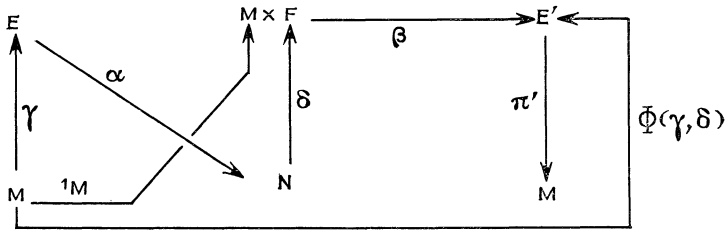
On se donne maintenant M et N deux variétés compactes; $\pi : E \to M$, $\pi' : E' \to M$, $\rho : F \to N$ des fibrés vectoriels de dimension finie et de classe C^∞; O et O′ des ouverts de E, $M \times F$ respectivement; K, K′ des compacts respectifs de O, O′; $\alpha : O \to N$, $\beta : O' \to E'$ des applications C^∞ telles que si $(x, y) \in O'$, $(\pi' \circ \beta)(x, y) = x$; des ouverts B et C de $\Gamma^\infty(\pi)$ et $\Gamma^\infty(\rho)$ respectivement tels que B et C sont 1-bornés, et, si $\gamma \in B$, $\delta \in C$, alors $\operatorname{Im} \gamma \subset K$ et si $x \in M$, $(x, (\delta \circ \alpha \circ \gamma)(x)) \in K'$.

Ceci étant, soit $\Phi : B \times C \to \Gamma^\infty(\pi')$ définie par

$$\Phi(\gamma, \delta)(x) = \beta(x, (\delta \circ \alpha \circ \gamma)(x)).$$

Alors :

3.3.5. Proposition. — Φ est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞.



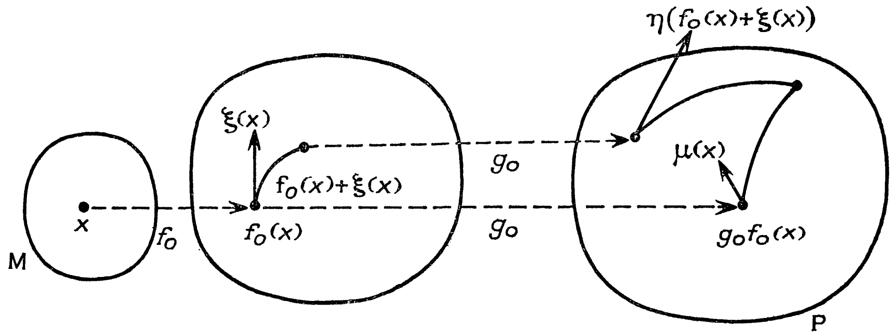
Démonstration. — Étant donné la définition des normes de $\Gamma^\infty(\pi)$, $\Gamma^\infty(\rho)$, $\Gamma^\infty(\pi')$, on peut supposer que M est un compact de $\mathbf{R}^p$, N un compact de $\mathbf{R}^q$, $E = M \times \mathbf{R}^m$, $E' = M \times \mathbf{R}^{m'}$, $F = N \times \mathbf{R}^n$. Comme dans la démonstration de la proposition 3.3.3, on remarque que l'application $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \beta(\,.\,, \delta \circ \alpha \circ \gamma)$ est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞ (après en avoir convenablement défini la source et le but). On conclut comme en 3.3.3.

3.3.6. Théorème. — *Soient* M, N, P *trois variétés différentiables de classe* C^∞, M *et* N *étant compactes. Alors*

$$\Phi: \quad C^\infty(M, N) \times C^\infty(N, P) \to C^\infty(M, P)$$

définie par $\Phi(f, g) = g \circ f$ *est un* $\mathcal{L}$*-morphisme de classe* C^∞.

Démonstration. — Plaçons-nous au voisinage d'un point (f_0, g_0) de $C^\infty(M, N) \times C^\infty(N, P)$. Exprimons l'application Φ à l'aide des « cartes » $\mathcal{V}'_{f_0}$ et $\mathcal{V}'_{g_0}$ (3.2 et 3.3.4). On trouve



$$\Phi(\xi, \eta)(x) = \mu(x) = [g_0(f_0(x) + \xi(x)) + \eta(f_0(x) + \xi(x))] - g_0 f_0(x).$$

Or, soient $\alpha: f_0^* TN \to N$ définie par

$$\alpha(\xi) = f_0(p\,\xi) + \xi$$

(où p désigne la projection du fibré $f_0^* TN$, et où on fait la même identification que pour définir l'application α de 3.3.4) et

$$\beta: M \times g_0^* TP \to (g_0 \circ f_0)^* TP$$

définie par

$$\beta(x, \eta) = [g_0(p'\eta) + \eta] - (g_0 \circ f_0)(x)$$

(où cette fois p' est la projection du fibré $g_0^* TP$). On note que β n'est définie que pour η assez petit et $p'\eta$ assez proche de $f_0(x)$.

On remarque alors que Φ est définie à partir de α et β comme dans 3.3.5. Le théorème en résulte.

3.4. Le $\mathcal{L}$-groupe des difféomorphismes. — Soit M une variété différentiable compacte. Le groupe $\text{Diff}^\infty(M)$ des difféomorphismes C^∞ de M est un ouvert de $C^\infty(M, N)$ et est donc muni d'une structure induite de $\mathcal{L}$-variété de classe C^∞, dite « canonique ».

3.4.1. Théorème. — *Pour sa structure canonique de* $\mathcal{L}$*-variété*, $\text{Diff}^\infty(M)$ *est un* $\mathcal{L}$*-groupe de classe* C^∞.

Démonstration. — On sait déjà que la loi de composition est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞ (3.3.6). Il reste à montrer que l'opération d'inversion $\theta : \varphi \mapsto \varphi^{-1}$ est aussi un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞.

On étudie d'abord un cas particulier : M est un domaine compact de $\mathbf{R}^n$, M′ un domaine compact inclus dans l'intérieur de M. On se donne un réel assez petit ε, et on note B l'ensemble des applications ξ de classe C^∞ de source M et de but $\mathbf{R}^n$ telles que :

(*a*) $|\xi(x)| < \varepsilon$;

(*b*) $|d\xi(x)| < \frac{1}{3}$.

Si ε est assez petit, $1 + \xi$ est un difféomorphisme sur son image qui contient M′. On peut ainsi définir

$$(1+\xi)^{-1} = 1 + \mu,$$

où $\mu \in C^\infty(M', \mathbf{R}^n)$. Si $\xi = 0$, alors $\mu = 0$. On montre que $\Phi : B \to C^\infty(M', \mathbf{R}^n)$ définie par $\Phi(\xi) = \mu$ est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞.

Montrons d'abord que Φ est de classe C^0. Il est clair que $|\mu|_0 \leqq |\xi|_0$. Puis

$$1 + d\mu(x) = [1 + d\xi(1 + \mu(x))]^{-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}|d\mu(x)| &= |[1 + d\xi(1+\mu(x))]^{-1} - 1| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i (d\xi(1+\mu(x)))^i\right| \leqq |d\xi(1+\mu(x))| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^{i-1}} \leqq \frac{3}{2}|\xi|_1.\end{aligned}$$

On a donc $|\mu|_1 \leqq \frac{3}{2}|\xi_1| \underset{*}{\leqq} 1$.

Soit $\Delta : GL(n, \mathbf{R}) \to GL(n, \mathbf{R})$ l'application d'inversion; on sait que Δ est classe C^∞, et que

$$d^r \Delta(L; L_1, \ldots, L_r) = (-1)^r \sum_{\sigma \in P_r} L^{-1}.L_{\sigma(1)}.L^{-1}\ldots L^{-1} L_{\sigma(r)} L^{-1},$$

où P_r est l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, r\}$. On a alors :

$$d\mu = [\Delta \circ (1 + d\xi) \circ (1 + \mu)] - 1.$$

Supposons par récurrence qu'on ait montré $|\mu|_i \underset{i}{\leqq} |\xi|_i$ pour $0 \leqq i \leqq r-1$. Montrons la même relation pour $i = r$. Soit

$$\eta = (1 + d\xi) \circ (1 + \mu).$$

Alors

$$d^r \mu = \sum_{q=1} \sum_{i_1+\ldots+i_q=1-r} \sigma_{i_1,\ldots,i_q} d^q \Delta(\eta).(d^{i_1}\eta, \ldots, d^{i_q}\eta).$$

(*cf.* démonstration du théorème 3.3.1). De même

$$d^i \eta = \sum_{j=1}^{i} \sum_{k_1+\ldots+k_j=i} d^{j+1} \xi_{0(1+\mu)} . (d^{k_1} \mu, \ldots, d^{k_j} \mu).$$

Ainsi, si $i \leqq r-1$, on sait calculer

$$|\eta|_i \underset{i}{\leqq} \sum |\xi|_{j+1} |\mu|_{k_1} \ldots |\mu|_{k_j} \underset{i}{\leqq} \sum |\xi|_{j+1} |\xi|_{k_1} \ldots |\xi|_{k_j}$$

$$\underset{i}{\leqq} \sum |\xi|_{i+1}^{\frac{j}{i}} |\xi|_{i+1}^{\frac{k_1-1}{i}} \ldots |\xi|_{i+1}^{\frac{k_j-1}{i}} \underset{i}{\leqq} |\xi|_{i+1}.$$

Puis

$$|\mu|_r \underset{r}{\leqq} \sum |\eta|_{i_1} \ldots |\eta|_{i_q} \underset{r}{\leqq} \sum |\xi|_{i_1+1} \ldots |\xi|_{i_q+1} \underset{r}{\leqq} \sum |\xi|_r^{\frac{i_1}{r-1}} \ldots |\xi|_r^{\frac{i_q}{r-1}} \underset{r}{\leqq} |\xi|_r.$$

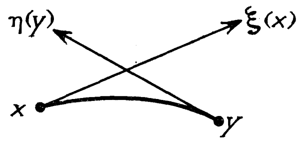
Ceci montre que Φ est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞.

Ensuite la relation $(1+\mu) \circ (1+\xi) = 1$ implique, par différentiation par rapport à ξ que

$$d\Phi(\xi, \hat{\xi}) = \frac{\partial \mu}{\partial \xi} . \hat{\xi} = -(1 + d\mu) . \hat{\xi} \circ (1+\mu).$$

Alors si par récurrence on suppose que Φ est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^r, les théorèmes 3.3.1 et 3.3.2 permettent d'affirmer que $d\Phi$ est de classe C^r, et donc Φ de classe C^{r+1}. Ainsi Φ est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞.

Revenons maintenant au cas général. On étudie l'application θ au voisinage de $\varphi_0 = \mathrm{id}(M)$. Si on exprime θ dans la carte $\mathcal{V}'_{\varphi_0} \subset \Gamma^\infty(TM)$, on

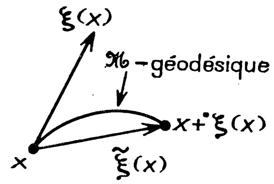


trouve que $\theta(\xi)$ est le champ de vecteur η tel que si $y = x + \xi(x)$, $\eta(y)$ est l'opposé du vecteur obtenu en transportant parallèlement $\xi(x)$ le long de la géodésique joignant x à y. Ainsi, si on regarde l'application $\xi \mapsto \eta$ au-dessus d'une carte de M, on peut supposer que M est comme dans notre cas particulier étudié ci-dessus, et que l'application $\xi \mapsto \eta$ est défini par le même procédé du transport parallèle, pour une métrique riemannienne non standard $\mathcal{M}$ de $\mathbf{R}^n$.

Soit $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ l'application défini par

$$\tilde{\xi}(x) = (x \dotplus \xi(x)) - x,$$

où $\dot{+}$ désigne l'application déduite de l'application exponentielle pour la métrique $\mathfrak{M}$ (autrement dit ξ représente le difféomorphisme $1 \dot{+} \xi$ pour la représentation définie par la métrique $\mathfrak{M}$).



Il résulte de la proposition 3.3.3 que $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ et $\tilde{\xi} \mapsto \xi$ sont des $\mathcal{L}$-morphismes de classe C^∞. Or $\xi \mapsto \eta$ peut se factoriser en

$$\xi \mapsto \tilde{\xi} \mapsto \Phi(\tilde{\xi}) = \tilde{\eta} \mapsto \eta.$$

Ainsi $\xi \mapsto \eta$ est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞. Ceci montre que θ est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞ au voisinage de l'élément neutre de $\mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{M})$. Montrons maintenant la même chose au voisinage de $\varphi \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{M})$. L'application $\psi \mapsto \psi^{-1}$ peut se factoriser ainsi :

$$\psi \xmapsto{\varphi^{-1}\circ .} \varphi^{-1} \circ \psi \xmapsto{\theta} \psi^{-1} \circ \varphi \xmapsto{.\circ \varphi^{-1}} \psi^{-1}.$$

On sait que chacune des trois flèches est un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞. On a terminé la démonstration du théorème 3.4.1. ∎

On déduit immédiatement de 3.3.6 et de 3.4.1 le :

3.4.2. Théorème. — *Soient* M, N *deux variétés compactes* C^∞. *L'opération*

$$\Phi : \quad \mathrm{Diff}^\infty \mathrm{M} \times \mathrm{Diff}^\infty \mathrm{N} \times C^\infty(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \to C^\infty(\mathrm{M}, \mathrm{N})$$

définie par

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, f) = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$$

est une $\mathcal{L}$-action de groupe.

CHAPITRE 4

Théorème des fonctions implicites

4.1. Le théorème des fonctions implicites.

4.1.1. Théorème. — *Soient* E *et* F *deux $\mathcal{L}$-espaces de Fréchet,* $\mathrm{B} \subset \mathrm{E}$ *un $\mathcal{L}$-objet,* $f : \mathrm{B} \to \mathrm{F}$ *un $\mathcal{L}$-morphisme de classe* C^r $(2 \leq r \leq \infty)$. *Soient* $x_0 \in \mathrm{B}$ *et* $y_0 = f(x_0)$.

On suppose qu'il existe un 1-$\mathcal{L}$*-morphisme de classe* C^{ρ} $(0 \leqq \rho \leqq r-1)$:

$$L: \ B \times F \to E$$

tel que, si $x \in B$ *et* $y \in F$, *alors*

$$df(x, L(x, y)) = y.$$

Alors il existe un $\mathcal{L}$*-objet* C, *voisinage de* y_0 *dans* F *et un* $\mathcal{L}$*-morphisme faible* $s : C \to B$, *de classe* C^{ρ}, *tel que*

$$f \circ s = 1_C.$$

On peut considérer $L(x)$, section de $df(x)$ (pour $x \in B$), comme section infinitésimale de f. Ainsi, le théorème 4.1.1 peut se résumer en disant que si f admet une section infinitésimale L, alors f admet une vraie section s.

Démonstration. — On donne d'abord la démonstration pour $\rho = 0$, puis pour $\rho = 1$, et enfin pour ρ quelconque.

A. $\rho = 0$. On suppose pour simplifier que :

(a) $x_0 = y_0 = 0$;

(b) B est la boule centrée à l'origine de rayon $\varepsilon > 0$ pour la norme $|\,.\,|_1$ de E, et que, si $x \in B$, $\hat{x}$, $\hat{x}'$, $\in E$, $y \in F$:

(c) $|df(x, \hat{x})|_1 \underset{*}{\leqq} |\hat{x}|_1$, $|d^2 f(x;\ \hat{x},\ \hat{x}')|_1 \underset{*}{\leqq} |\hat{x}|_1 \, |\hat{x}'|_1$;

(d) $|L(x,\ y)|_{i-1} \underset{(i)}{\leqq} (1 + |x|_i)\,|y|_i$;

(e) $|L(x,\ f(x))|_{i-1} \underset{(i)}{\leqq} (1 + |x|_i)$.

Ces suppositions sont légitimes : on s'y ramène par un changement (affine) de numérotation des normes de E et F. En ce qui concerne (d), par exemple, le fait que L soit 1-$\mathcal{L}$-morphisme implique que

$$|L(x, y)|_{i-1} \underset{(i)}{\leqq} (1 + |x|_i)\,|y|_0 + |y|_i.$$

Cette relation implique (d). La relation (c) se déduit du fait que B est 1-borné. La relation (e) du fait que $x \mapsto L(x, f(x))$ est un 0-$\mathcal{L}$-morphisme de classe C^{ρ} (2.3.7).

On reproduit d'abord, pour la préciser, une démonstration partielle figurant dans J. Schwartz [25].

Soit M une constante telle que

$$\left\{\begin{array}{c} |\,\mathrm{S}(t)\,x\,|_1 \leqq \mathrm{M}\,t\,|\,x\,|_0, \\ |\,\mathrm{S}\,!(t)\,x\,|_{10} \leqq \mathrm{M}\,t\,|\,x\,|_9, \\ |\,(1-\mathrm{S}(t))\,x\,|_1 \leqq \mathrm{M}\,t^{-8}\,|\,x\,|_9, \\ |\,df(x, \hat{x})\,|_1 \leqq \mathrm{M}\,|\,\hat{x}\,|_1, \\ |\,d^2 f(x, \hat{x}_1, \hat{x}_2)\,|_1 \leqq \mathrm{M}\,|\,\hat{x}_1\,|_1\,|\,\hat{x}_2\,|_1, \\ |\,\mathrm{L}(x, y)\,|_0 \leqq \mathrm{M}\,|\,y\,|_1, \\ |\,\mathrm{L}(x), f(x)\,|_9 \leqq \mathrm{M}(1 + |\,x\,|_{10}), \\ |\,\mathrm{L}(x)\,y\,|_9 \leqq \mathrm{M}(1 + |\,x\,|_{10})\,|\,y\,|_{10} \end{array}\right.$$

pour $x \in \mathrm{B}$, $\hat{x}$, $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2 \in \mathrm{E}$, $y \in \mathrm{F}$, $t \in \mathbf{R}_*^+$; S désigne, comme en 2.1, la famille à un paramètre d'opérateurs d'approximation sur E.

Constantes. — On pose $\mathrm{K} = 4/3$, $\beta_1 = 7/4$, $\beta_2 = 7/2$. γ est un réel positif assez grand, $\eta < 1$ est un réel positif assez petit; γ et η seront précisés par la suite.

Procédé de récurrence. — On pose, si $y \in \mathrm{F}$, $|\,y\,|_1 < \eta$ et $|\,y\,|_{10} < \eta$:

$$\left\{\begin{array}{c} t_n = e^{\gamma \mathrm{K}^n} \qquad (n \in \mathbf{N}), \\ s_0(y) = 0, \\ s_{n+1}(y) = s_n(y) - \mathrm{S}(t_n)\,\mathrm{L}(s_n(y), f s_n(y) - y) \qquad (n \in \mathbf{N}). \end{array}\right.$$

Pour l'interprétation concrète de cette relation de récurrence, qui est essentiellement la méthode de Newton « avec lissage à chaque étape », *voir* par exemple [30].

4.1.2. Lemme. — *Quels que soient les réels* $\mu_i > 0$ $(0 \leqq i \leqq p)$ et ν_i $(0 \leqq i \leqq p)$ *tels que* $\max\limits_{1 \leqq i \leqq p} \nu_i < \nu_0$, *si* γ *est assez grand, on a pour tout* $n \geqq 0$:

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i\, e^{\nu_i \gamma \mathrm{K}^n} < \mu_0\, e^{\nu_0 \gamma \mathrm{K}^n}.$$

Démonstration. — C'est évident.

Considérons les relations

$$\left\{\begin{array}{lll} (1,\ n): & |\,s_{n-1}(y)\,|_1 \leqq \varepsilon & (n \geqq 1), \\ (2,\ n): & |\,s_{n-1}(y) - s_{n-1}(y)\,|_1 \leqq e^{-\beta_1 \gamma \mathrm{K}^n} & (n \geqq 1), \\ (3,\ n): & 1 + |\,s_n(y)\,|_{10} \leqq e^{\beta_2 \gamma \mathrm{K}^n} & (n \geqq 0). \end{array}\right.$$

4.1.3. Lemme. — (3, 0) $\wedge$ (1, 1) $\wedge$ (2, 1) $\wedge$ (3, 1) ($\wedge$ pour conjonction logique).

Démonstration. — (3, 0) et (1, 1) sont évidents.

On a

$$s_1(y) = S(t_0)\, L(0, y).$$

Donc

$$|\, s_1(y) - s_0(y)\,|_1 = |\, S(t_0)\, L(0, y)\,|_1 \leqq M\, e^{\gamma}\, |\, L(0, y)\,|_0 \leqq M^2\, e^{\gamma}\, |\, y\,|_1 \leqq M^2\, e^{\gamma}\, \eta,$$

γ étant donné, η assez petit implique (2.1).

D'autre part :

$$1 + |\, s_1(y)\,|_{10} \leqq 1 + M^2\, e^{\gamma}\, \eta \leqq 1 + M^2\, e^{\gamma}.$$

Mais γ assez grand implique

$$1 + M^2\, e^{\gamma} < e^{\beta_2 \gamma K},$$

ce qui donne (3.1).

4.1.4. Lemme : $\bigwedge\limits_{k=1}^{n} (2,\ k) \Rightarrow (1,\ n+1)$.

Démonstration :

$$|\, s_n(y)\,|_1 \leqq \sum_{k=1}^{n} |\, s_k(y) - s_{k-1}(y)\,|_1 \leqq \sum_{k=1}^{n} e^{-\beta_1 \gamma K^k} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta_1 \gamma K^k},$$

là encore, γ assez grand implique le lemme 4.1.4.

On note que lemme 4.1.4 justifie la définition par récurrence de s_{n+1}.

4.1.5. Lemme :

$$f s_n(y) - y = df\,[s_{n-1}(y),\, (1 - S(t_{n-1}))\, L(s_{n-1}(y),\, f s_{n-1}(y) - y)]$$
$$+ \int_0^1 (1 - \xi)\, d^2 f\,(s_{n-1}(y) + \xi\,(s_n(y) - s_{n-1}(y))).(s_n(y) - s_{n-1}(y))^{\times 2}\, d\xi.$$

Démonstration. — On applique la formule deTaylor avec reste de Lagrange à l'ordre 2, et on se souvient de $df(x,\ L(x,\ y)) = y$:

$$\begin{aligned} f s_n(y) - y &= f s_{n-1}(y) - y + df\,(s_{n-1}(y),\, s_n(y) - s_{n-1}(y)) \\ &\quad + \int_0^1 (1 - \xi)\, d^2 f\,(s_{n-1})\, y) + \xi\,(s_n(y) - s_{n-1}(y))).(s_n(y) - s_{n-1}(y))^{\times 2}\, d\xi \\ &= df\,(s_{n-1}(y),\, L(s_{n-1}(y),\, f s_{n-1}(y) - y)) \\ &\quad + df\,(s_{n-1}(y),\, - S(t_{n-1})\, L(s_{n-1}(y),\, f s_{n-1}(y) - y)) + \int_0^1 \ldots . \end{aligned}$$

4.1.6. Lemme : $(2,\ n) \wedge (3,\ n-1) \Rightarrow (2,\ n+1)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} |s_{n+1}(y) - s_n(y)|_1 &= |S(t_n) L(s_n(y), fs_n(y) - y)|_1 \\ &\leqq M e^{\gamma K^n} |L(s_n(y), fs_n(y) - y)|_0 \leqq M^2 e^{\gamma K^n} |fs_n(y) - y|_1. \end{aligned}$$

Dans le lemme 4.1.5, on a décomposé $fs_n(y) - y$ en deux termes qui peuvent être majorés en $|\,.\,|_1$, le deuxième par

$$M e^{-2\beta_1 \gamma K^n}$$

et le premier par

$$\begin{aligned} & M |(1 - S(t_{n-1})) L(s_{n-1}(y), fs_{n-1}(y) - y)|_1 \\ & \leqq M^2 e^{-8\gamma K^{n-1}} |L(s_{n-1}(y), fs_{n-1}(y) - y)|_9 \\ & \leqq M^3 e^{-8\gamma K^{n-1}} (1 + |y|_{10})(1 + |s_{n-1}(y)|_{10}) \leqq 2 M^3 e^{-8\gamma K^{n-1}} e^{\beta_2 \gamma K^{n-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$|s_{n+1}(y) - s_n(y)|_1 \leqq M^3 e^{(1-2\beta_1)\gamma K^n} + 2 M^6 e^{(K-8+\beta_2)\gamma K^{n-1}}.$$

On remarque que $1 - 2\beta_1 < -\beta_1 K$ et $K - 8 + \beta_2 < -\beta_1 K^2$.

En vertu du lemme 4.1.2, γ assez grand implique le lemme 4.1.6.

4.1.7. Lemme : $(3, n) \Rightarrow (3, n+1)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} 1 + |s_{n+1}(y)|_{10} &\leqq 1 + |s_n(y)|_{10} + |s_{n+1}(y) - s_n(y)|_{10} \\ &\leqq e^{\beta_2 \gamma K^n} + |S(t_n) L(s_n(y), fs_n(y) - y)|_{10} \\ &\leqq e^{\beta_2 \gamma K^n} + M^2 e^{\gamma K^n} (1 + |y|_{10})(1 + |s_n(y)|_{10}) \\ &\leqq e^{\beta_2 \gamma K^n} + 2 M^2 e^{\gamma K^n}. \end{aligned}$$

On remarque que $\beta_2 < \beta_2 K$ et $1 + \beta_2 < \beta_2 K$. En vertu du lemme 4.1.2, γ assez grand implique le lemme 4.1.7.

Ainsi, si γ et η sont bien choisis, $(1, n)$, $(2, n)$ et $(3, n)$ *sont montrés pour tout n.*

Soit C le voisinage de O dans F défini par $|y|_1, |y|_{10} < \eta$. Alors $s_n : C \to B$ est une suite de fonctions continues convergeant uniformément pour $|\,.\,|_1$ vers $s : C \to B_1$, où B_1 est le complété de B pour $|\,.\,|_1$.

Le lemme 4.1.6 implique

$$M^2 e^{\gamma K^n} |fs_n(y) - y|_1 \leqq e^{-\beta_1 \gamma K^{n+1}}$$

et donc

$$|fs_n(y) - y|_1 \leqq M^{-2} e^{-\gamma K^n} e^{-\beta_1 \gamma K^{n+1}}$$

de sorte que si on sait montrer qu'en fait l'image de s est dans B, c'est-à-dire que la suite s_n est convergente pour toute norme $| \,.\, |_i$ de B, on aura terminé.

Nous sommes ici où était arrivé, par exemple, J. Schwartz dans [25], avec une perte « d'indices » supérieure (10 au lieu de 9) due au choix de $K = 3/2$. Par « pertes d'indices » on désigne la différence entre l'indice de la norme servant à majorer y, ici 10 ($| y |_{10} < \eta$) et l'indice de la norme pour laquelle converge s_n, ici 1.

4.1.8. Lemme. — *Il existe des fonctions* $\delta_j : \mathrm{C} \to \mathbf{R}^+$ *telles que*

$$(\star) \qquad 1 + | s_n(y) |_j \leqq \delta_j(y)\, e^{\gamma\beta_2 \mathrm{K}^n} \qquad (j \geqq 10,\ y \in \mathrm{C}).$$

Démonstration. — Si $j \geqq 11$, soit M_j une constante telle que

$$\begin{cases} | \mathrm{S}(t)\, x |_j \leqq \mathrm{M}_j\, t\, | x |_{j-1}, \\ | \mathrm{L}(x, y) |_{j-1} \leqq \mathrm{M}_j (1 + | x |_j)\, | y |_j, \\ | \mathrm{L}(x, f(x)) |_{j-1} \leqq \mathrm{M}_j (1 + | x |_j) \end{cases}$$

si $x \in \mathrm{B}$, $y \in \mathrm{F}$, $j \geqq 10$.

$\delta_j \geqq 1$ implique $(\star)$ pour $n = 0$. Ensuite, par récurrence :

$$\begin{aligned} 1 + | s_{n+1}(y) |_j &\leqq 1 + | s_n(y) |_j + | \mathrm{S}(t_n)\, \mathrm{L}(s_n(y), f s_n(y) - y) |_j \\ &\leqq 1 + | s_n(y) |_j + \mathrm{M}_j\, e^{\gamma \mathrm{K}^n}\, | \mathrm{L}(s_n(y), f s_n(y) - y) |_{j-1} \\ &\leqq [1 + (1 + | y |_j)\, \mathrm{M}_j^2\, e^{\gamma \mathrm{K}^n}]\, \delta_j(y)\, e^{\beta_2 \gamma \mathrm{K}^n}. \end{aligned}$$

On cherche $n_j(y) \in \mathbf{N}$ et $\delta_j(y)$ de façon que :

1° $n \leqq n_j(y)$ implique $1 + | s_n(y) |_j \leqq \delta_j(y)\, e^{\beta_2 \gamma \mathrm{K}^n}$;

2° $n \geqq n_j(y)$ implique

$$[1 + (1 + | y |_j)\, \mathrm{M}_j^2\, e^{\gamma \mathrm{K}^n}]\, e^{\beta_2 \gamma \mathrm{K}^n} \leqq e^{\beta_2 \gamma \mathrm{K}^{n}}.$$

L'inégalité 2° donne $n_j(y)$, car $1 + \beta_2 < \beta_2 \mathrm{K}$, et quel que soit $| y |_j$, cette inégalité est vérifiée pour n assez grand. Ensuite on choisit $\delta_j(y)$ assez grand pour que 1° soit vérifié.

Le lemme 4.1.8 résulte alors de 1° et 2°.

Fin de la démonstration du cas $\rho = 0$. — Il faut montrer que la suite $s_n : \mathrm{C} \to \mathrm{B}$ est convergente pour toute norme $| \,.\, |_i$ de B.

Soit donc i un entier $\geqq 1$, et posons $j = 3\,i - 1$. Alors, en utilisant l'inégalité de convexité 2.2.1 et le lemme 4.1.8, il vient

$$\begin{aligned} | s_n(y) - s_{n-1}(y) |_i &\underset{(i)}{\leqq} | s_n(y) - s_{n-1}(y) |_1^{\frac{j-i}{j-1}} \times | s_n(y) - s_{n-1}(y) |_j^{\frac{i-1}{j-1}} \\ &\underset{(j,y)}{\leqq} e^{-\frac{j-i}{j-1} \beta_1 \gamma \mathrm{K}^n}\, e^{\frac{i-1}{j-1} \beta_2 \gamma \mathrm{K}^n} = e^{-[(j-i)\beta_1 - (i-1)\beta_2] \frac{\gamma \mathrm{K}^n}{j-1}}. \end{aligned}$$

Or $j = 3\,i - 1$ implique $(j - i)\,\beta_1 - (i - 1)\,\beta_2 > 0$.

D'où le résultat. Le fait que $s : \mathrm{C} \to \mathrm{B}$ soit continue résulte de ce que, dans le lemme 4.1.8, on peut choisir $\delta_j(y)$ localement bornée; la convergence $s_n \to s$ est donc localement uniforme. Ainsi, $s : (\mathrm{C}, |\,.\,|_j) \to (\mathrm{B}, |\,.\,|_i)$ est continue, et s est donc bien un $\mathcal{L}$-morphisme faible de classe C^0.

Le théorème 4.1.1 est donc démontré pour $\rho = 0$.

B. On suppose maintenant que $\rho = 1$. Soient i et j deux entiers $\geqq 1$. Étant donné les hypothèses et la construction de s_n, on peut affirmer que $s_n : (\mathrm{C}, |\,.\,|_j) \to (\mathrm{B}, |\,.\,|_i)$ est de classe C^1. On obtient la formule de récurrence suivante exprimant $ds_{n+1}(y, \hat{y})$ en fonction de ds_n :

$$
\begin{aligned}
(4.1.9) \qquad ds_{n+1}(y, \hat{y}) = {} & ds_n(y, \hat{y}) - \mathrm{S}(t_n)\, d\mathrm{L}(s_n(y), fs_n(y) - y, ds_n(y, \hat{y})) \\
& - \mathrm{S}(t_n)\, \mathrm{L}(s_n(y), df(s_n(y), ds_n(y, \hat{y})) - \hat{y}).
\end{aligned}
$$

Pour la concision, on notera $\varepsilon_n(y) = fs_n(y) - y$; donc

$$d\varepsilon_n(y, \hat{y}) = df(s_n(y), ds_n(y, \hat{y})) - \hat{y}.$$

On va montrer que $d\varepsilon_n(y, \hat{y})$ tend vers zéro (pour une norme convenable) quand n tend vers l'infini.

Pour ce faire, on note que

$$df(x + \Delta x, \hat{x}) = df(x, \hat{x}) + \int_0^1 d^2 f(x + \xi\,\Delta x; \Delta x, \hat{x})\, d\xi.$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
(4.1.10) \quad d\varepsilon_{n+1}(y, \hat{y}) = {} & d\varepsilon_n(y, \hat{y}) - df(s_n(y), \mathrm{S}(t_n)\, d\mathrm{L}(s_n(y), \varepsilon_n(y), ds_n(y, \hat{y}))) \\
& - df(s_n(y), \mathrm{S}(t_n)\, \mathrm{L}(s_n(y), d\varepsilon_n(y, \hat{y}))) \\
& - \int_0^1 d^2 f(s_n(y) + \xi(s_{n+1}(y) - s_n(y)), \\
& \qquad s_{n+1}(y) - s_n(y), ds_{n+1}(y, \hat{y}))\, d\xi, \\
= {} & df(s_n(y), (1 - \mathrm{S}(t_n))\, \mathrm{L}(s_n(y), d\varepsilon_n(y, \hat{y}))) \\
& - df(s_n(y), \mathrm{S}(t_n)\, d\mathrm{L}(s_n(y), \varepsilon_n(y), ds_n(y, \hat{y}))) \\
& - \int_0^1 d^2 f\{s_n(y) + \xi(s_{n+1}(y) - s_n(y)); s_{n+1}(y) - s_n(y), \\
& \qquad ds_n(y, \hat{y}) - \mathrm{S}(t_n)\, d\mathrm{L}(s_n(y), \varepsilon_n(y), ds_n(y, \hat{y})) \\
& \qquad\qquad - \mathrm{S}(t_n)\, \mathrm{L}(s_n(y), d\varepsilon_n(y, \hat{y}))\}\, d\xi.
\end{aligned}
$$

Dans la démonstration du théorème 4.1.1, dans le cas $\rho = 0$, on a utilisé une majoration de $|fs_n(y) - y|_1$ en fonction de $1 + |s_{n-1}(y)|_{10}$ (*cf.* 4.1.6). L'indice 10 pourrait être remplacé par tout indice plus grand, sans modifier autrement cette démonstration. Aussi pouvons-nous supposer que dans celle-ci, 10 est remplacé par 54 et donc 8 par 52, et 9 par 53.

On considère les relations

$$
(\star)\quad \left\{\begin{array}{lll}
(4, n): & |ds_{n-1}(y, \hat{y})|_1 \leqq \alpha_3 \, |y|_{54} & (n \geqq 1), \\
(5, n): & |ds_n(y, \hat{y})|_{54} \leqq e^{\beta_4 \gamma K^n} \, |y|_{54} & (n \geqq 0), \\
(6, n): & |ds_n(y, \hat{y}) - ds_{n-1}(y, \hat{y})|_1 \leqq \alpha_5 \, e^{-\beta_5 \gamma K^n} \, |\hat{y}|_{54} & (n \geqq 1), \\
(7, n): & |d\varepsilon_n(y, \hat{y})|_1 \leqq \alpha_6 \, e^{-\beta_6 \gamma K^n} \, |\hat{y}|_{54} & (n \geqq 0), \\
(8, n): & |d\varepsilon_n(y, \hat{y})|_{54} \leqq e^{\beta_7 \gamma K^n} \, |y|_{54} & (n \geqq 0),
\end{array}\right.
$$

où $\beta_4 = 38$, $\beta_5 = 1/8$, $\beta_6 = 5/4$, $\beta_7 = 46$.

Des hypothèses du théorème pour $\rho = 1$, on déduit qu'en prenant M assez grand, on a

$$
\begin{gathered}
|f(x)|_{54} \leqq \mathrm{M}\,|x|_{54}, \\
|df(x, \hat{x})|_{54} \leqq \mathrm{M}(1 + |x|_{54})\,|\hat{x}|_{54}, \\
|d^2 f(x, \hat{x}_1, \hat{x}_2)|_{54} \leqq \mathrm{M}(1 + |x|_{54})\,|\hat{x}_1|_{54}\,|\hat{x}_2|_{54}, \\
|d\mathrm{L}(x, y, \hat{x})|_{53} \leqq \mathrm{M}(1 + |x|_{54})\,|\hat{x}|_{54}\,|y|_{54}
\end{gathered}
$$

(en changeant au besoin la numérotation des normes de E et F).

On note qu'on a déjà montré (4.1.6) :

$$
|\varepsilon_n(y)|_1 \leqq \mathrm{M}^{-2} \, e^{-\beta_8 \gamma K^n} \qquad \text{où} \quad \beta_8 = 10/3
$$

(en supposant η assez petit pour que ce soit vrai pour $n = 0$), et que compte tenu de $|f(x)|_{54} < \mathrm{M}\,|x|_{54}$:

$$
|\varepsilon_n(y)|_{54} \leqq 1 + \mathrm{M}\, e^{\beta_2 \gamma K^n}.
$$

Des raisonnements analogues à ceux figurant dans la démonstration du cas $\rho = 0$, et utilisant les formules (4.1.9) et (4.1.10) permettent de montrer, en supposant par récurrence les relations $(\star)$ de 0 jusqu'à n, les relations suivantes :

$$
(\alpha) \qquad |ds_n(y, \hat{y})|_1 \leqq \alpha_5 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta_5 \gamma K^n} \, |\hat{y}|_{54},
$$

$$
(\beta) \quad |ds_{n+1}(y, \hat{y})|_{54} \leqq [e^{\beta_4 \gamma K^n} + \mathrm{M}^2 e^{(1+\beta_2+\beta_7)\gamma K^n} + \mathrm{M}^2 e^{(1+\beta_2+\beta_4)\gamma K^n}(1 + \mathrm{M}\, e^{\beta_2 \gamma K^n})]\,|\hat{y}|_{54},
$$

$$
(\gamma) \qquad |ds_{n+1}(y, \hat{y}) - ds_n(y, \hat{y})|_1 \leqq [\alpha_3 \, e^{(1-\beta_8)\gamma K^n} + \alpha_6 \, e^{(1-\beta_6)\gamma K^n}]\,|\hat{y}|_{54},
$$

$$
\begin{aligned}
(\delta) \qquad |d\varepsilon_{n+1}(y, \hat{y})|_1 \leqq {} & [\mathrm{M}^3 e^{(-52+\beta_2+\beta_7)\gamma K^n} + \alpha_3 \, \mathrm{M}\, e^{(1-\beta_8)\gamma K^n} \\
& + \mathrm{M}\, e^{-\beta_1 \gamma K^n}(\alpha_3 + \alpha_3 \, e^{(1-\beta_8)\gamma K^n} + \alpha_6 \, \mathrm{M}^2 e^{(1-\beta_6)\gamma K^n})]\,|\hat{y}|_{54},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon) \qquad |d\varepsilon_{n+1}(y, \hat{y})|_{54} \leqq {} & [e^{\beta_7 \gamma K^n} + \mathrm{M}^3 e^{(1+2\beta_2+\beta_7)\gamma K^n} \\
& + 2\,\mathrm{M}\, e^{(2\beta_2+\beta_4)\gamma K^{n+1}} + \mathrm{M}^3 e^{(1+2\beta_2+\beta_4)\gamma K^n}(1 + \mathrm{M}\, e^{\beta_2 \gamma K^n})\,|\hat{y}|_{54}.
\end{aligned}
$$

On pose $\alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_6 = 2\, e^{\beta_6 \gamma}$. Alors (5, 0), (7, 0) et (8, 0) sont vérifiés. Le choix des β_i et le lemme 4.1.2, montrent que, si η est assez petit, et γ assez grand, les relations $(4, n)$ à $(8, n)$ sont vrais pour tout n.

La relation (6, n) vraie pour tout n, implique que $s : (\mathrm{C}, |\,.\,|_{54}) \to (\mathrm{B}, |\,.\,|_1)$ est de classe C^1.

On applique ensuite le même procédé que dans le lemme 4.1.8 pour obtenir : si $j \geqq 54$, il existe une fonction $\delta_j(y)$ définie sur C, telle que

$$|\, ds_n(y, \hat{y})\,|_j \leqq \delta_j(y)\, e^{\beta_4 \gamma \mathrm{K}^n}\, |\,\hat{y}\,|_j.$$

Puis, si $i \geqq 4$, et si $j = 305\,(i-1) + 2$, alors

$$ds_n : \quad (\mathrm{C} \times \mathrm{F}, |\,.\,|_j) \to (\mathrm{E}, |\,.\,|_i)$$

est localement uniformément convergente; ceci implique que

$$s : \quad (\mathrm{C}, |\,.\,|_j) \to (\mathrm{B}, |\,.\,|_i)$$

est de classe C^1. Comme ceci a lieu pour tout i, $s : \mathrm{C} \to \mathrm{B}$ est un $\mathcal{L}$-morphisme faible de classe C^1.

C. Il reste à démontrer le théorème 4.1.1 dans le cas où ρ est quelconque. Supposons celui-ci montré pour $\rho - 1$, avec $\rho \geqq 2$. Et montrons-le pour ρ. On suppose aussi, par récurrence qu'on a montré que $d^l \varepsilon_n \to 0$ pour $0 \leqq l \leqq \rho - 1$;

On a montré ceci pour $l = 1$ [*cf.* la relation (7, n) parmi les relations ($\star$)].

On peut écrire les formules suivantes pour des coefficients σ et τ convenables :

$$\text{(4.1.11)} \quad d^\rho s_{n+1}(y) = d^\rho s_n(y) - \mathrm{S}(t_n) \sum_{q=0}^{\rho} \sum_{i_1, \ldots, i_q, j} \sigma_{i_1, \ldots, i_q, j}\, d^q \mathrm{L}\,(s_n(y);$$
$$d^j \varepsilon_n(y);\ d^{i_1} s_n(y), \ldots, d^{i_q} s_n(y)),$$

$$\text{(4.1.12)} \quad d^\rho \varepsilon_{n+1}(y) = \sum_{q=1}^{\rho} \sum_{i_1, \ldots, i_q} \tau_{i_1, \ldots, i_q}\, d^q f\,(s_{n+1}(y);\ d^{i_1} s_{n+1}(y), \ldots, d^{i_q} s_{n+1}(y)).$$

Dans 4.1.11, on prend $j \geqq 0$, $i_1, \ldots, i_q \geqq 1$ et $i_1 + \ldots + i_q + j = \rho$.

Dans 4.1.12, on prend $i_1, \ldots i_q \geqq 1$ et $i_1 + \ldots + i_q = \rho$.

On se propose de montrer que $d^\rho \varepsilon^n(y)$ tend vers zéro (tendre vers zéro signifie tendre vers zéro aussi vite que $e^{-\beta\gamma\mathrm{K}^n}$ pour β convenable). Il en résultera, par 4.1.11 que la suite $d^\rho s_n$ est convergente.

Dans (4.1.12) on exprime $d^q f\,(s_{n+1}(y))$ en fonction de $d^q f(s_n(y))$:

$$d^\rho \varepsilon_{n+1}(y) = \sum_{q=1}^{k} \sum_{i_1, \ldots, i_q} \tau_i\, d^q f\,(s_n(y), d^{i_1} s_{n+1}(y), \ldots, d^{i_1} s_{n+1}(y))$$
$$+ \int_0^1 \sum_{q=1}^{k} \sum \tau_i\, d^{q+1} f\,(s_n(y) + \xi\,(s_{n+1}(y) - s_n(y));$$
$$d^{i_1} s_{n+1}(y), \ldots, d^{i_q} s_{n+1}(y), s_{n+1}(y) - s_n(y))\, d\xi.$$

Le terme sous signe $\int_0^1$ va tendre vers zéro, ceci en raison de la présence du terme $s_{n+1}(y) - s_n(y)$ dont il dépend linéairement. On peut faire comme si

$$d^\rho \varepsilon_{n+1}(y) = \sum_{q=1}^{k} \sum_{i_1, \ldots, i_q} \tau_i \, d^q f(s_n, (y), d^{i_1} s_{n+1}(y), \ldots, d^{i_q} s_{n+1}(y)).$$

On remplace dans cette dernière expression $d^{i_1} s_{n+1}(y), \ldots, d^{i_q} s_{n+1}(y)$ par leur valeur déduite de 4.1.11, en y remplaçant successivement ρ par $i_1, \ldots, i_q$. Tenant compte de la linéarité de $d^q f(x, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_q)$ en les q dernières variables, on peut développer chacun des termes $d^q f(\ldots)$ pour obtenir une somme de nombreux termes. On obtient des termes de trois sortes :

1° des termes où figure $d^l \varepsilon_n$ pour $l < \rho$. Tous ces termes tendent vers zéro, grâce à l'hypothèse de récurrence;

2° des termes où ne figure pas de ε; la somme de ces termes-là est

$$\sum_{q=1}^{\rho} \sum \tau_i \, d^q f(s_n(y), \; d^{i_1} s_n(y), \ldots, d^{i_q} s_n(y)).$$

Or cette quantité n'est autre que $d^\rho \varepsilon_n(y)$;

3° des termes où figure $d^\rho \varepsilon_n(y)$; or les conditions sur les familles d'indices $i, j, \ldots$ ne permettent de trouver qu'un seul tel terme; c'est

$$df(s_n(y), -S(t_n) L(s_n(y), d^\rho \varepsilon_n(y))).$$

Autrement dit on peut faire comme si

$$\begin{aligned} d^\rho \varepsilon_{n+1}(y) &= d^\rho \varepsilon_n(y) + df(s_n(y), -S(t_n) L(s_n(y), d^\rho \varepsilon_n(y))) \\ &= df(s_n(y), (1 - S(t_n)) L(s_n(y), \; d^\rho \varepsilon_n(y))). \end{aligned}$$

Or ce terme tend aussi vers zéro, ceci en raison de la présence de $1 - S(t_n)$.

On sait ainsi montrer la convergence de $d^\rho \varepsilon_n$ vers zéro, et donc celle de $d^\rho s_n(y)$. Les détails (mise en place des indices) sont tout à fait analogues à ceux du cas $\rho = 1$, qui en fait a été démontré de la même façon.

Le théorème 4.1.1 est complètement démontré. ∎

4.2. Le cas des actions de groupe.

Notations. — Dans ce paragraphe, G et H désignent des $\mathcal{L}$-groupes de classe C^r, V une $\mathcal{L}$-variété de classe C^r $(r \geq 2)$. $\alpha : G \times G \to G$,

$\beta : H \times H \to H$ sont les lois de composition respectives de G et de H. $\Phi : G \times V \to V$, $\Psi : H \times V \to V$ sont des $\mathcal{L}$-actions de groupe de classe C^r. Les notations $d_1 \alpha$, $d_2 \alpha$, $d_1 \Phi$, ... désignent les diverses dérivées partielles premières; et chaque fois qu'on écrit $d_1 \alpha (g, h, \hat{g})$ [resp. $d_2 \alpha (g, \hat{h}, h)$, ...], il est entendu que $\hat{g} \in T_g (G)$, espace tangent à G en g [resp. $\hat{h} \in T_h (V)$, ...]. Un espace tangent à une $\mathcal{L}$-variété est défini de façon standard; l'espace tangent en un point est un $\mathcal{L}$-espace de Fréchet.

Soit $\chi : G \times H \times V \to V$ l'« action » définie par

$$\chi (g, h, x) = \Phi (g, \Psi (h, x)).$$

La différentielle de χ par rapport aux deux premières variables est donnée par

$$d\chi (g, h, x, \hat{g}, \hat{h}) = d_1 \Phi (g, \Psi (h, x)\, \hat{g}) + d_2 \Phi (g, \Psi (h, x), d_1 \Psi (h, x, \hat{h})).$$

Soit $x_0 \in V$. En utilisant la structure localement triviale du fibré tangent à V, on peut, si x est assez voisin de x_0, identifier $T_x (V)$ à $T_{x_0} (V)$ qu'on notera T dans ce qui suit. De la même façon, pour $g \in G$ (resp. $h \in H$) voisin de e, on identifie $T_g (G)$ [resp. $T_h (H)$] à $T_e (G) = T'$ [resp. $T_e = T''$].

4.2.1. Lemme. — On a, pour $x \in V$, et $g \in G$:

(4.2.2) $$d_1 \Phi (e, \Phi (g, x), \hat{g}) = d_1 \Phi (g, x, d_1 \alpha (e, g, \hat{g})),$$

(4.2.3) $$d_2 \Phi (g, x, d_1 \Phi (e, x, \hat{g})) = d_1 \Phi (g, x, d_2 \alpha (g, e, \hat{g})),$$

(4.2.4) $$d_2 \Phi (g^{-1}, \Phi (g, x), d_2 \Phi (g, x, \hat{x})) = \hat{x}.$$

Démonstration. — On écrit que Φ est une action de groupe :

$$\Phi (g, \Phi (h, x)) = \Phi (\alpha (g, h), x),$$

où $g, h \in G$, $x \in V$. On dérive par rapport à g :

$$d_1 \Phi (g, \Phi (h, x), \hat{g}) = d_1 \Phi (\alpha (g, h), x, d_1 \alpha (g, h, \hat{g})).$$

On peut aussi dériver par rapport à h :

$$d_2 \Phi (g, \Phi (h, x), d_1 \Phi (h, x, \hat{h})) = d_1 \Phi (\alpha (g, h), x, d_2 \alpha (g, h, \hat{h})).$$

Par des substitutions convenables faciles à trouver, on trouve les formules (4.2.2) et (4.2.3).

Pour trouver (4.2.4), on dérive par rapport à x les deux membres de $\Phi (g^{-1}, \Phi (g, x)) = x$.

Remarque. — Pour utiliser ces formules, on devra y faire certaines substitutions qu'on n'indiquera pas; on donnera seulement le numéro de référence.

4.2.5. Théorème. — *Soient* G, H, V, Φ, Ψ, α, β, x_0 *comme ci-dessus. On suppose qu'il existe un* 1-$\mathcal{L}$-*morphisme de classe* C^{r-1}.

$$L : \mathcal{U}' \times T \to T' \times T'',$$

où $\mathcal{U}'$ *est un voisinage de* e *dans* H, *tel que, si* $L(h, x) = (\hat{g}, \hat{h})$, *alors*

$$d\chi(e, e, \Psi(h, x), \hat{g}, \hat{h}) = \hat{x}.$$

Alors on peut trouver un voisinage $\mathcal{V}$ *de* x_0 *dans* V *et un* $\mathcal{L}$-*morphisme faible de classe* C^{r-1} $s : \mathcal{V} \to G \times H$ *tel que si* $s(x) = (g, h)$, alors $\chi(g, h, x_0) = x$.

Remarque. — On peut interpréter l'existence de L comme celle d'une section infinitésimale de l'action de $G \times H$ le long de l'orbite de H.

Démonstration. — On cherche à appliquer le théorème 4.1.1. Il faut résoudre en $\hat{g}$, $\hat{h}$ l'équation

$$d\chi(g, h, x_0, \hat{g}, \hat{h}) = \hat{x}$$

ou

$$d_1 \Phi(g, \Psi(h, x), g) + d_2 \Phi(g, \Psi(h, x), d_1 \Psi(h, x, \hat{h})) = \hat{x}.$$

Cherchons $\hat{g}$ sous la forme

$$\hat{g} = d_2 \alpha(e, g, \hat{g}'),$$

où $\hat{g}'$ est une nouvelle inconnue, de sorte qu'il vient

$$d_1 \Phi(g, \Psi(h, x), d_2 \alpha(e, g, \hat{g}')) + d_2 \Phi(g, \Psi(h, x), d_1 \Psi(h, x, \hat{h})) = \hat{x}.$$

Mais d'après (4.2.3), ceci peut aussi s'écrire

$$d_2 \Phi(g, \Psi(h, x), d_1 \Phi(e, \Psi(h, x), \hat{g}')) + d_2 \Phi(g, \Psi(h, x), d_1 \Psi(h, x, \hat{h})) = \hat{x}.$$

Appliquons aux deux membres l'opérateur $d_2 \Phi(g^{-1}, \Phi(g, \Psi(h, x)))$, on trouve (4.2.4) :

$$d_1 \Phi(e, \Psi(h, x), \hat{g}') + d_1 \Psi(h, x, \hat{h}) = d_2 \Phi(g^{-1}, \chi(g, h, x), \hat{x}).$$

Posons maintenant

$$\hat{h} = d_1 \beta(e, h, \hat{h}'),$$

de sorte que (4.2.2) :

$$d_1 \Psi(h, x, \hat{h}) = d_1 \Psi(e, \Psi(h, x), \hat{h}).$$

L'équation à résoudre s'écrit donc maintenant

$$d_1 \Phi(e, \Psi(h, x), \hat{g}') + d_1 \Psi(e, \Psi(h, x), \hat{h}') = d_2 \Phi(g^{-1}, \chi(g, h, x), \hat{x})$$

ou

$$d\chi(e, e, \Psi(h, x), \hat{g}', \hat{h}') = d_2 \Phi(g^{-1}, \chi(g, h, x), \hat{x})$$

qui admet la solution

$$(\hat{g}', \hat{h}') = \mathrm{L}\,(h, d_2\,\Phi\,(g^{-1}, \chi\,(g, h, x), x)).$$

Si on note L_1 et L_2 les deux composantes de L, on trouve ainsi

$$\hat{g} = d_2\,\alpha\,(e, g, \mathrm{L}_1\,(h, d_2\,\Phi\,(g^{-1}, \chi\,(g, h, x), \hat{x}))),$$
$$\hat{h} = d_1\,\beta\,(e, h, \mathrm{L}_2\,(h, d_2\,\Phi\,(g^{-1}, \chi\,(g, h, x), \hat{x}))).$$

Notons $\mathrm{M} : \mathrm{G}\times\mathrm{H}\times\mathrm{T} \to \mathrm{T}'\times\mathrm{T}''$ l'application $(g, h, \hat{x}) \mapsto (\hat{g}, \hat{h})$ ainsi construite. Il résulte du théorème 2.3.7 que M est un 1-$\mathcal{L}$-morphisme de classe C^{r-1}. On peut apprécier ici la généralité de l'énoncé du théorème 2.3.7. On peut appliquer le théorème 4.1.1 et conclure.

4.2.6. Corrollaire. — *Soient* G, V, α, Φ, $x_0 \in \mathrm{V}$ *comme ci-dessus.*

On suppose qu'il existe un 1-$\mathcal{L}$-*morphisme* :

$$\mathrm{L} : \mathrm{T}_{x_0}(\mathrm{V}) \to \mathrm{T}_e(\mathrm{G}).$$

tel que

$$d_1\,\Phi\,(e, x_0) \circ \mathrm{L} = \mathrm{id}\,(\mathrm{T}_{x_0}(\mathrm{V})).$$

Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ *de* x_0 *dans* V, *et un* $\mathcal{L}$-*morphisme faible de classe* C^{r-1}, $s : \mathcal{V} \to \mathrm{G}$, *tels que si* $x \in \mathcal{V}$:

$$\Phi\,(s\,(x), x_0) = x.$$

C'est simplement l'énoncé 4.2.5 où l'on suppose que H est le groupe nul.

4.3. Applications simples du corollaire 4.2.6. — On peut déduire immédiatement du corollaire 4.2.5 la plupart des théorèmes de fibration concernant les espaces d'applications C^∞. On donne ici un exemple typique.

4.3.1. Proposition. — *Soient* M *et* N *deux variétés* C^∞, M *compacte, et* M′ *une sous-variété fermée de* M (*éventuellement à bord, et même à coins*).

Alors l'application

$$\mathrm{F} : \mathrm{Pl}^\infty(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \to \mathrm{Pl}^\infty(\mathrm{M}', \mathrm{N})$$

entre espaces de plongements définie par restriction à M′ *est une fibration localement triviale.*

On sait (Cerf [4]) qu'il suffit de trouver un groupe G opérant simultanément sur $\mathrm{Pl}^\infty(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ et $\mathrm{Pl}^\infty(\mathrm{M}', \mathrm{N})$, de façon compatible avec F, et de façon que l'action sur $\mathrm{Pl}^\infty(\mathrm{M}', \mathrm{N})$ admette des sections locales :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G}\times\mathrm{Pl}^\infty(\mathrm{M}, \mathrm{N}) & \longrightarrow & \mathrm{Pl}^\infty(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}(\mathrm{G})\times\mathrm{F}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}} \\ \mathrm{G}\times\mathrm{Pl}^\infty(\mathrm{M}', \mathrm{N}) & \longrightarrow & \mathrm{Pl}^\infty(\mathrm{M}', \mathrm{N}) \end{array}$$

Prenons $G = \mathrm{Diff}^\infty(N)$. Alors G est un $\mathcal{L}$-groupe de classe C^∞ (3.4.1), et $\mathrm{Pl}^\infty(M, N)$ qui est ouvert dans $C^\infty(M', N)$ est une $\mathcal{L}$-variété de classe C^∞ (3.3.4). L'action $\Phi : G \times \mathrm{Pl}^\infty(M', N) \to \mathrm{Pl}^\infty(M', N)$ définie par composition au but est une $\mathcal{L}$-action de classe C^∞ (3.4.2). Il suffit donc (4.2.5) de trouver une section infinitésimale de Φ. Ici, en reprenant les notations de 4.2 :

$$d_1 \Phi(\mathrm{id}(N), f, \xi) = \xi \circ f,$$

où

$$\mathrm{id}(N) \in G; \qquad f \in \mathrm{Pl}^\infty(M', N); \qquad \xi \in \Gamma^\infty(TN) = T_{\mathrm{id}(N)} G;$$
$$\xi \circ f \in \Gamma^\infty(f^* TN) = T_f \mathrm{Pl}^\infty(M', N).$$

Le problème de la recherche d'une section de $d_1 \Phi$ est donc celui du prolongement à N d'un champ de vecteurs tangents à N défini sur la sous-variété image $f(M')$. Il est toujours possible de trouver un tel opérateur de prolongement qui soit un 1-$\mathcal{L}$-morphisme (voir en particulier Seeley [26]). ∎

CHAPITRE 5

$\mathrm{Diff}^\infty(T^n)$

5.1 INTRODUCTION ET NOTATIONS. — On donne dans ce chapitre une application du théorème 4.2.5 au groupe $\mathrm{Diff}^\infty(T^n)$, T^n étant le n-tore $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$.

Quelques notations : si $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$, on pose $|k| = \sum_{i=1}^{n} |k_i|$.

Si $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in T^n$, on pose $k\gamma = \sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i \in T^1$, et si

$$\delta \in T^1, \ |\delta| = d(\delta, \mathbf{Z}) = \inf(\bar{\delta}, 1 - \bar{\delta})$$

où $\bar{\delta}$ est un représentant de δ appartenant à l'intervalle [0, 1]. T^n est muni de sa structure de groupe habituelle; si $\gamma \in T^n$, $R_\gamma \in \mathrm{Diff}^\infty(T^n)$ est la translation par γ.

On démontre dans ce chapitre un énoncé expliquant dans quelle mesure l'action de conjugaison de $\mathrm{Diff}^\infty(T^n)$ sur lui-même est localement triviale. Ce résultat généralise légèrement un résultat d'Arnold, Kolmogorov et Moser, en ce qu'on peut faire $k = l = \infty$ dans l'énoncé du théorème 5.1 de Sternberg [30], p. 35. Comme il a été expliqué dans l'introduction, Herman [9] a su déduire du théorème 5.2.1 la simplicité du groupe $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$, en désignant ainsi la composante connexe de l'élément neutre de $\mathrm{Diff}^\infty(T^n)$.

5.2. LE THÉORÈME DE CONJUGAISON.

5.2.1. THÉORÈME. — *Soit* $\gamma \in \mathrm{T}^n$ *tel que, pour tout* $k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$, *on ait*

$$|k\gamma| \geq \frac{\mathrm{C}}{|k|^\alpha}$$

pour un $\mathrm{C} > 0$ *et un* $\alpha > 0$. *Alors il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* R_γ *dans* $\mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{T}^n)$ *et un* $\mathcal{L}$*-morphisme faible de classe* C^∞ :

$$s : \quad \mathcal{V} \to \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{T}^n) \times \mathrm{T}^n$$

tel que si $s(\varphi) = (\psi, \lambda)$, *alors*

$$\varphi = \mathrm{R}_\lambda \circ \psi^{-1} \circ \mathrm{R}_\gamma \circ \psi$$

(autrement dit, à la « petite » rotation R_λ près, φ est conjugué de R_λ).

Démonstration. — Soient $\mathrm{G} = \mathrm{T}^n$, et $\mathrm{H} = \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{T}^n)$ muni de la structure de groupe opposée de la structure ordinaire. On définit une action de G et de H sur $\mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{T}^n)$ par

$$\Phi(\lambda, \chi) = \mathrm{R}_\lambda \circ \chi \qquad [\text{si } \lambda \in \mathrm{T}^n, \chi \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{T}^n)],$$
$$\Psi(\psi, \chi) = \psi^{-1} \circ \chi \circ \psi \qquad [\text{si } \psi, \ \chi \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{T}^n)].$$

G et H sont des $\mathcal{L}$-groupes de classe C^∞ (3.4.1); Φ et Ψ sont des $\mathcal{L}$-actions de classe C^∞ (3.4.1 et 3.4.2). On va appliquer le théorème 4.2.5.

Soit Δ : $\mathrm{G} \times \mathrm{H} \times \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{T}^n) \to \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{T}^n)$ définie par

$$\Delta(\lambda, \psi, \chi) = \Phi(\lambda, \Psi(\psi, \chi)) = \mathrm{R}_\lambda \circ \psi^{-1} \circ \mathrm{R}_\gamma \circ \psi.$$

Pour appliquer le théorème 4.2.5, il faut calculer la dérivée de Δ par rapport aux deux premières variables, au point (e, e, χ) (e est l'élément neutre de G ou de H). On trouve facilement (*cf.* Dieudonné [6], VIII.12, problème 9) :

$$d\Delta(e, e, \chi, \hat\lambda, \hat\psi) = \hat\lambda + d\chi.\hat\psi - \hat\psi \circ \chi,$$

où $\hat\lambda \in \mathbf{R}^n = \mathrm{T}_e(\mathrm{T}^n)$,

$$\hat\psi \in \Gamma^\infty(\mathrm{T}^n) = \mathrm{T}_e(\mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{T}^n)) \qquad \text{et} \qquad d\Delta(e, e, \chi, \hat\lambda, \hat\psi) \in \Gamma^\infty(\chi^* \mathrm{T}(\mathrm{T}^n))$$

($\hat\lambda$ désigne alors un champ de vecteurs constant).

Considérons l'équation

$$\hat\lambda + d(\psi^{-1} \circ \mathrm{R}_\gamma \circ \psi).\hat\psi - \hat\psi \circ (\psi^{-1} \circ \mathrm{R}_\gamma \circ \psi) = \hat\eta$$

à résoudre en $\hat\lambda$ et $\hat\psi$, les termes $\psi \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{T}^n)$ et $\hat\eta \in \Gamma^\infty((\psi^{-1} \circ \mathrm{R}_\gamma \circ \psi)^* \mathrm{T}(\mathrm{T}^n))$ étant donnés.

Ici la notation des applications tangentes est plus commode; τf notera l'application tangente à f; l'équation à résoudre s'écrit maintenant

$$\tau\psi^{-1} \circ \tau \mathrm{R}_\lambda \circ \tau\psi \circ \hat{\psi} - \hat{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \mathrm{R}_\gamma \circ \psi = \hat{\eta} - \hat{\lambda}.$$

On pose $\hat{\psi}' = \tau\psi \circ \hat{\psi} \circ \psi^{-1}$, on compose à gauche avec $\tau\psi$, et à droite avec ψ^{-1} pour obtenir

$$\tau \mathrm{R}_\gamma \circ \hat{\psi}' - \hat{\psi}' \circ \mathrm{R}_\gamma = (\tau\psi) \circ (\hat{\eta} - \hat{\lambda}) \circ \psi^{-1}.$$

Si on identifie l'espace tangent en tout point de T^n à $\mathbf{R}^n$, alors $\hat{\psi}'$, $\hat{\eta}$, $\hat{\lambda}$ apparaissent comme des fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^n$; $\tau \mathrm{R}_\gamma$ est alors l'application identique de $\mathbf{R}^n$. Il vient alors

$$(\star) \qquad \hat{\psi}' - \hat{\psi}' \circ \mathrm{R}_\gamma = \tau\psi \circ (\hat{\eta} - \hat{\lambda}) \circ \psi^{-1}.$$

On va choisir $\hat{\lambda}$ de façon que l'intégrale du deuxième membre (pour la mesure de Haar dx de masse totale 1 de T^n) soit nulle, ce qui est une condition nécessaire pour trouver $\hat{\psi}'$. Si on décompose composante par composante, il vient

$$\int_{\mathrm{T}^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\psi_i}{\partial x_j} (\psi^{-1}(x)).[\hat{\eta}_j(\psi^{-1}(x)) - \hat{\lambda}_j]\, dx = 0$$

pour $1 \leq i \leq n$, $x_1, \ldots, x_n$ étant les coordonnées ordinaires de T^n, définies modulo $\mathbf{Z}$; ceci s'écrit encore en posant $a_{ij}(\psi) = \int_{\mathrm{T}^n} \frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}(\psi^{-1}(x))\, dx$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\psi)\, \hat{\lambda}_j = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathrm{T}^n} \frac{\partial\psi_i}{\partial x_j} (\psi^{-1}(x))\, (\hat{\eta}_j(\psi^{-1}(x))\, dx.$$

Pour $\psi = e \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{T}^n)$, $a_{ij}(\psi) = \delta_{ij}$. Donc, si ψ est voisin de e, la matrice $(a_{ij}(\psi))$ est inversible; soit $b_{ij}(\psi)$ son inverse. On peut prendre alors

$$\hat{\lambda}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\psi) \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathrm{T}^n} \frac{\partial\psi_j}{\partial x_k} (\psi^{-1}(x))\, \hat{\eta}_k(\psi^{-1}(x))\, dx.$$

On a ainsi déterminé $\hat{\lambda}$.

Pour calculer $\hat{\psi}'$, on cherche son développement de Fourier

$$\sum_{p \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} a_p\, e^{2i\pi px} \; (a_p \in \mathbf{R}^n)$$

connaissant le développement $\sum_{p \in \mathbf{Z}^n} b_p e^{2i\pi px}$ $(b_p \in \mathbf{R}^n)$ du second membre de ($\star$), bien déterminé dès qu'on connaît $\hat{\lambda}$; le choix de $\hat{\lambda}$ donne $b_0 = 0$. L'identification des coefficients de Fourier des deux membres de ($\star$) donne alors

$$a_p = \frac{b_p}{1 - e^{2i\pi p\gamma}}.$$

La condition diophantienne sur γ, $|k\gamma| \geqq \frac{C}{k^\alpha}$ donne alors une majoration du type

$$|a_p| \leqq b_p |p|^\alpha,$$

d'où on déduit l'existence d'une constante entière β (dépendant de α et de n) telle que si $\sum b_p e^{2i\pi px}$ est de classe C^r, alors $\sum a_p e^{2i\pi px}$ est de classe $C^{r-\beta}$. Autrement dit la correspondance

$$\sum b_p e^{2i\pi px} \mapsto \sum a_p e^{2i\pi px}$$

est un 1-$\mathcal{L}$-morphisme. On détermine ainsi $\hat{\psi}' = \sum_{p \neq 0} a_p e^{2i\pi px}$.

On pose enfin $\hat{\psi} = \tau\psi^{-1} \circ \hat{\psi}' \circ \psi$. Il résulte des théorèmes 2.3.7 et 3.3.6 que le morphisme $(\psi, \hat{\eta}) \mapsto (\hat{\lambda}, \hat{\psi})$ ainsi déterminé est un 1-$\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞. Ainsi, on peut appliquer le théorème 4.2.5 et affirmer l'existence du $\mathcal{L}$-morphisme faible s. La démonstration est terminée. ■

CHAPITRE 6

Théorèmes de division

On montre dans ce chapitre un théorème de « préparation » (6.2.1) qui sera fondamental dans la démonstration de l'existence de déploiements universels pour les fonctions de codimension finie.

6.1. Division a une variable. — L'énoncé du théorème 6.1.1 est une variante du théorème de division de Mather [16]; il précise la dérivabilité du quotient en fonction de celle du dividende. Ce résultat est très voisin, de façon précise, un peu plus faible, qu'un résultat de Lassalle [14] obtenu par un tout autre procédé.

Notations. — Soient E, F, G trois espaces de Banach, Ω un ouvert de $E \times F$, et K un compact de Ω. On dit que $f : \Omega \to G$ est de classe $C^{r,k}$ si les dérivées partielles $\frac{\partial^{s+l} f}{\partial t^s \, \partial u^l}(t, u)$ sont définies et continues pour $(t, u) \in \Omega$

et pour $s \leq r$, $l \leq k$. Si c'est le cas, on pose

$$\| f \|_{r,k,X} = \sum_{s=0}^{r} \sum_{l=0}^{k} \sup_{(t,u) \in K} \left| \frac{\partial^{s+l} f}{\partial t^s \, \partial u^l} (t, u) \right|.$$

R : $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ est défini par

$$R(t, u_1, \ldots, u_p) = \sum_{i=1}^{p} u_i \, t^{p-i}$$

et $\Gamma_p : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ par

$$\Gamma_p(t, u) = t^p + \sum_{i=1}^{p} u_i \, t^{p-i}.$$

Si $f : A \times B \to C$ est une application, et si $a \in A$, $f_a : B \to C$ est définie par $f_a(b) = f(a, b)$. De même pour un nombre supérieur de variables.

6.1.1. Théorème. — *Il existe deux applications linéaires continues*

$$Q : \quad C^\infty(\mathbf{R}) \to C^{\infty,\infty}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p),$$
$$H : \quad C^\infty(\mathbf{R}) \to C^{\infty,\infty}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p)$$

telles que, si $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, $t \in \mathbf{R}$, $u \in \mathbf{R}^p$,

$$f(t) = \Gamma_p(t, u) \, Q(f)(t, u) + R(t, H(f)(u)).$$

et telles que, si X *est un compact de* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p$ (*resp.* $\mathbf{R}^p$), *il existe* X′ *compact de* $\mathbf{R}$ *tel que*

$$\| Q(f) \|_{r,k,X} \underset{r,k,X}{\leq} \| f \|_{r+(4p-1)k+p+4,X'}$$
$$\left[\text{resp} : \| H(f) \|_{k,X} \underset{k,X}{\leq} \| f \|_{(4p-1)k+p+4,X'}\right].$$

Remarques 1. — Lassalle [14] trouve par sa méthode $r + pk + p + 1$ au lieu de $r + (4p - 1)k + p + 4$ dans la majoration de $\| Q(f) \|_{r,k,X}$ et $p(k + 1)$ au lieu de $(4p - 1)k + p + 4$ dans celle de $\| H(f) \|_{k,X}$.

2. Si on fixe k, et qu'on considère Q comme application de source $C^\infty(\mathbf{R})$, et de but $C^{\infty,k}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p)$, alors Q est un 1-$\mathcal{L}$-morphisme (en un sens que le lecteur n'aura pas de mal à préciser pour tenir compte de la non-compacité de $\mathbf{R}$). Par contre, pour les semi-normes standards, $Q : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p)$ n'est qu'un 1-$\mathcal{L}$-morphisme faible, car la « perte de différentiabilité » :

$$(r + (4p - 1)k + p + 4) - (r + k) = (4p - 2)k + p + 4$$

n'est pas bornée.

Démonstration. — On utilisera exactement la même méthode que Mather [16], qu'on va seulement préciser.

On utilisera le :

6.1.2. LEMME. — *Il existe des applications* C^∞ : $\overline{Q} : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ et $\overline{\overline{H}} : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ *telles que :*

(*a*) *si* $\tau \in \mathbf{R}^+$, $x \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}$, $u \in \mathbf{R}^p$:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \cos \tau (x - t) = \Gamma_p (t, u) \overline{Q} (\tau, x, t, u) + R\left(t, \overline{\overline{H}} (\tau, x, u)\right), \\ \text{(ii)} & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{Q} (\tau, x, t, u) = - \tau^2 \overline{Q} (\tau, x, t, u), \\ \text{(iii)} & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{\overline{H}} (\tau, x, u) = - \tau^2 \overline{\overline{H}} (\tau, x, u); \end{cases}$$

(*b*) *si* X *est un compact de* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p$, *alors*

$$\| \overline{Q}_{\tau, x} \|_{r, k, X} \underset{r, k, X}{\lesssim} 1 + \tau^{r + (4p-1)k + p + 1} ;$$

(*c*) *si* Y *est un compact de* $\mathbf{R}^p$, *alors*

$$\| \overline{\overline{H}}_{\tau, x} \|_{k, Y} \underset{k, Y}{\lesssim} 1 + \tau^{(4p-1)k + p + 1}.$$

Démonstration de « lemme 6.1.2 $\Rightarrow$ *théorème* 6.1.1.». — Soit $Z = \Gamma_p^{-1}(0)$. Soit $\varepsilon : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ une fonction C^∞, identiquement égale à 1 dans un voisinage de Z, et telle que :

π_2 : Support (ε) $(\hookrightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}^p) \to \mathbf{R}^p$ (deuxième projection) soit une application propre.

Si $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, on pose

$$Q(f)(t, u) = (1 - \varepsilon(t, u)) \frac{f(t)}{\Gamma_p(t, u)} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\tau\, f_Q(\tau, t, u),$$

$$H(f)(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\tau\, f_H(\tau, u),$$

où

$$f_Q(\tau, t, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varepsilon(x, u) f(x) \overline{Q}(\tau, x, t, u),$$

$$f_H(\tau, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varepsilon(x, u) f(x) \overline{\overline{H}}(\tau, x, u).$$

Soient r, $k \in \mathbf{N}$; soit alors K le plus petit entier pair supérieur ou égal à $r + (4p - 1)k + p + 3$. Compte tenu de (*a*) (ii) et (iii) du lemme 6.1.2, une intégration par parties donne

$$f_Q(\tau, t, u) = (-1)^{\frac{K}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\partial^K}{\partial x^K} (\varepsilon(x, u) f(x)) \frac{\overline{Q}(\tau, x, t, u)}{\tau^K}.$$

Alors, si $r' \leqq r$, $k' \leqq k$:

$$\frac{\partial^{r'+k'} f_Q}{\partial t^{r'}\,\partial u^{k'}}(\tau, t, u) = \sum_{l=0}^{k'} \sum_{L=0}^{K} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\tau^K}\, \varepsilon_{L,l}(x, u)\, \frac{\partial^L f}{\partial x^L}(x)\, \frac{\partial^{r'+l} Q}{\partial t^{r'}\,\partial u^l}(\tau, x, t, u),$$

où les ε_L sont des fonctions C^∞ dont le support est inclus dans celui de ε.

Soit X une partie compacte de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^p$. L'assertion (*b*) du lemme 6.1.2 donne alors l'inégalité

$$\| f_{Q,\tau} \|_{r,k,X} \underset{r,k,X}{\leqq} \| f \|_{K,X'} \frac{1 + \tau^{r+(4p-1)k+p+1}}{\tau^K},$$

où $X' = \pi_1[\pi_2^{-1}\,\pi_2(X) \cap \text{Support}\ (\varepsilon)]$ (π_i : $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^p$ est la $i^{\text{ième}}$ projection).

On montre d'autre part sans difficulté que, pour $\tau \leqq 1$, on a

$$\| f_{Q,\tau} \|_{r,k,X} \underset{r,k,X}{\leqq} \| f \|_{0,X'}.$$

Les deux dernières relations donnent la suivante :

$$\| f_{Q,\tau} \|_{r,k,X} \underset{r,k,X}{\leqq} \| f \|_{K,X'} \frac{1}{1+\tau^2}$$

et donc

$$\| Q(f) \|_{r,k,X} \underset{r,k,X}{<} \| f \|_{K,X'}$$

mais $K \leqq r + (4p-1)k + p + 4$. On montre de la même façon :

$$\| H(f) \|_{k,X} \underset{k,X}{\leqq} \| f \|_{(4p-1)k+p+4,X'}$$

où $X' = \pi_1[(\pi_2^{-1} X) \cap \text{Support}\ (\varepsilon)]$.

Que $H(f)$ et $Q(f)$ vérifient les conditions du théorème 6.1.1 résulte de ce qui précède et de la formule d'inversion de Fourier :

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cos \tau (x-t)\, f(x). \quad \blacksquare$$

Démonstration du lemme 6.1.2. — Les fonctions $\overline{Q}$ et $\overline{H}$ sont celles qui sont construites dans Mather [16]. Rappelons cette construction.

Mather démontre l'existence d'une fonction C^∞ :

$$\rho : \quad \mathbf{R}^+\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$$

et d'une suite croissante d'entiers $n_0 \leqq n_1 \leqq \ldots$, telles que

$$(\alpha) \qquad \int_{\frac{1}{2(1+\tau)}}^{\frac{1}{1+\tau}} d\lambda\, \rho(\tau, \lambda, u) = 1 \qquad (\tau \in \mathbf{R}^+,\ u \in \mathbf{R}^p);$$

(β) si X est un compact de $\mathbf{R}^p$:

$$\| \rho_{\tau,\lambda} \|_{k,\mathrm{X}} \underset{\mathrm{X}}{\leqq} 1 + \tau^{n_k}.$$

(γ) si $\delta(\lambda, u)$ désigne la distance dans le plan complexe de la droite $\operatorname{Im} z = \lambda$ à l'ensemble des zéros de $\Gamma_p(z, u)$, alors

$$\rho(\tau, \lambda, u) = 0 \qquad \text{si} \quad \delta(\lambda, u) \leqq \frac{1}{8\,p^3\,(1+\tau)}.$$

Soit $\mathrm{Z}(u) \subset \mathbf{C}$ l'ensemble des racines de $\Gamma_p(z, u) = 0$. Posons

$$a(\lambda, t, u) = 2\Big[1 + \sup_{z \in \mathrm{Z}(u)} |\operatorname{Re} z| + \delta(\lambda, u) + |t| + |\lambda|\Big]$$

et

$$a(\lambda, u) = 2\Big[1 + \sup_{z \in \mathrm{Z}(u)} |\operatorname{Re} z| + \delta(\lambda, u) + |\lambda|\Big].$$

On désigne par $\mathrm{C}_{a,|\lambda|}$ le bord du rectangle du plan complexe de sommets $\pm a \pm i|\lambda|$.

Posons alors ($\lambda \in \mathbf{R}$, $\tau \in \mathbf{R}^+$, $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$, $u \in \mathbf{R}^p$) :

$$\mathrm{Q}^*(\lambda, \tau, t, x, u) = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{\mathrm{C}_{a(\lambda,t,u),|\lambda|}} \frac{\cos\tau(t-\zeta)\,d\zeta}{\Gamma_p(\zeta, u)\,(\zeta - t)},$$

$$\mathrm{H}^* = (\mathrm{H}_1^*, \ldots, \mathrm{H}_p^*),$$

où

$$\mathrm{H}_j^*(\lambda, \tau, x, u) = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{\mathrm{C}_{a(\lambda,u),|\lambda|}} \frac{\cos\tau(t-\zeta)\,\Gamma_{j-1}(\zeta, u)\,d\zeta}{\Gamma_p(\zeta, u)}$$

puis

$$\overline{\mathrm{Q}}(\tau, x, t, u) = \int_{\frac{1}{2(1+\tau)}}^{\frac{1}{1+\tau}} \mathrm{Q}^*(\lambda, \tau, x, t, u)\,\rho(\tau, \lambda, u)\,d\lambda,$$

$$\overline{\mathrm{H}}(\tau, x, u) = \int_{\frac{1}{2(1+\tau)}}^{\frac{1}{1+\tau}} \mathrm{H}^*(\lambda, \tau, x, u)\,\rho(\tau, \lambda, u)\,d\lambda.$$

On note que

$$\frac{\partial^{r+k}\mathrm{Q}^*}{\partial t^r\,\partial u^k}(\lambda, \tau, x, t, u) = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{\mathrm{C}_{a(\lambda,t,u),|\lambda|}} \frac{\cos\tau(x,\zeta)\,\mathrm{P}_k(\zeta, u)\,d\zeta}{[\Gamma_p(\zeta, u)]^{k+1}\,(\zeta - t)^{r+1}},$$

où P_k est un polynôme. Soit X un compact de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p$. On définit de cette dernière relation et du choix de $a(\lambda, t, u)$ que, si $(t, u) \in \mathrm{X}$:

$$\| \mathrm{Q}^*_{\lambda,\tau,x} \|_{r,k,\{(t,u)\}} \underset{r,k,\mathrm{X}}{\leqq} \frac{[\delta(\lambda, u)]^{-p(k+1)}\,\mathrm{ch}(\lambda\tau)}{\lambda^{r+1}}$$

et, si $\lambda\tau \underset{*}{\leqq} 1$, et $\lambda \geqq \dfrac{1}{2(1+\tau)}$:

$$\| \mathrm{Q}^*_{\lambda,\tau,x} \|_{r,k,\{t,u\}} \underset{r,k,\mathrm{X}}{\leqq} [\delta(\lambda, u)]^{-p(k+1)}\,(1 + \tau^{r+1}).$$

Comme on va multiplier $Q^*_{\lambda,\tau,x}$ par $\rho_{\tau,\lambda}$, qui est nul dès que

$$\delta(\lambda, u) \leqq \frac{1}{8\,p^3(1+\tau)},$$

on peut supposer que $\delta(\lambda, u)^{-1} \leqq 8\,p^3(1+\tau)$. Ainsi

$$\| Q^*_{\lambda,\tau,x} \|_{r,k,X} \underset{r,k,X}{\leqq} 1 + \tau^{p(k+1)+r+1}.$$

La formule de Leibniz donne alors

$$\| \rho_{\tau,\lambda}\, Q^*_{\lambda,\tau,x} \|_{r,k,X} \underset{r,k,X}{\leqq} 1 + \tau^{n(r,k)},$$

où

$$n(r, k) = \sup\,[n_0 + p(k+1) + r + 1,\ n_k + p + r + 1]$$

(si la suite n_k est assez régulière, ce qu'on va voir être le cas). On aura terminé (pour $\overline{Q}$; pour $\overline{H}$, la démonstration est identique) si on montre qu'on peut prendre $n_k = (4\,p - 1)\,k + 1$ (en tenant compte de la longueur $1/2\,(1+\tau)$ de l'intervalle d'intégration $[1/2\,(1+\tau),\ 1/1+\tau]$). C'est ce qu'on va faire maintenant.

Rappelons la construction de la fonction ρ de Mather :

$$\rho(\tau, \lambda, u) = \frac{\rho_0\left(\dfrac{\sigma(\lambda, u)}{1+\tau}\right)}{\displaystyle\int_{\frac{1}{2(1+\tau)}}^{\frac{1}{1+\tau}} \rho_0\left(\frac{\sigma(\lambda, u)}{1+\tau}\right) d\lambda},$$

où $\sigma(\lambda, u)$ est une fonction définie pour les $(\lambda, u) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^p$ tels que $\delta(\lambda, u) \neq 0$, où $\rho_0 : \mathbf{R}^+ \to [0, 1]$ est de classe C^∞, identiquement égale à 1 sur $[0, 2\,p^3]$, à 0 sur $[4\,p^3, +\infty[$.

Mather montre

$$\| \sigma_\lambda \|_{k,\{u\}} \underset{k,X}{\leqq} 1 + [\delta(\lambda, u)]^{-2p(1+k)},$$

où X est un compact de $\mathbf{R}^p$, si $u \in X$.

La formule de Faa-di-Bruno (*cf.* démonstration du théorème 3.3.1) donne alors immédiatement, en posant $\bar\rho(\tau, \lambda, u) = \rho_0\left(\dfrac{\sigma(\lambda, u)}{1+\tau}\right)$:

$$\| \bar\rho_{t,\lambda} \|_{k,\{u\}} \underset{k,X}{\leqq} \sum_{q=1}^{k} \sum_{i_1,\ldots,i_q} \frac{\| \sigma_\lambda \|_{i_1,\{u\}} \cdots \| \sigma_\lambda \|_{i_q,\{u\}}}{(1+\tau)^q}.$$

Mais ρ_0 est nul sur $[4\,p^3, +\infty[$; donc $\bar\rho$ est nul dès que

$$\sigma(\lambda, u) \geqq 4\,p^3(1+\tau).$$

Or par construction de $\sigma(\lambda, u)$, on sait (Mather [16]) : $\sigma(\lambda, u) \geqq \dfrac{1}{2\,\delta(\lambda, u)}$. Ainsi, $\bar{\rho}$ est nul quand $\dfrac{1}{\delta(\lambda, u)} \geqq 8\,p^3\,(1+\tau)$. On peut donc supposer $\dfrac{1}{\delta(\lambda, u)} \leqq 8\,p^3\,(1+\tau)$. Il vient alors

$$\|\,\bar{\rho}_{\tau,\lambda}\,\|_{k,\mathrm{X}} \underset{k,\mathrm{X}}{\leqq} \sum_{q=1}^{k} \sum \frac{(1+\tau^{2p(1+i_1)}) \ldots (1+\tau^{2p(1+i_q)})}{1+\tau^q} \underset{k}{\leqq} 1 + \tau^{(4p-1)k}.$$

Si $\tilde{\rho}_\tau(u) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2(1+\tau)}}^{\frac{1}{1+\tau}} \bar{\rho}_{\tau,\lambda}(u)\, d\lambda$, il vient alors

$$\|\,\tilde{\rho}_\tau\,\|_{k,\mathrm{X}} \underset{k,\mathrm{X}}{\leqq} \frac{1+\tau^{(4p-1)k}}{1+\tau}.$$

En appliquant à nouveau la formule de Faa-di-Bruno aux fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, et $\tilde{\rho}_\tau$, il vient

$$\left\|\frac{1}{\tilde{\rho}_\tau}\right\|_{k,\mathrm{X}} \underset{k,\mathrm{X}}{\leqq} 1 + \tau^{(4p-1)k+1}.$$

Et en appliquant cette fois la formule de Leibniz :

$$\|\,\rho_{\tau,\lambda}\,\|_{k,\mathrm{X}} = \left\|\frac{\bar{\rho}_{\tau,\lambda}}{\tilde{\rho}_\tau}\right\|_{k,\mathrm{X}} \underset{k,\mathrm{X}}{\leqq} 1 + \tau^{(4p-1)k+1}.$$

Ainsi les majorations annoncées sont démontrées. La vérification de [a, (ii)] et [a, (iii)] du lemme est formelle. [a (i)] résulte de la formule intégrale de Cauchy, de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2(1+\tau)}}^{\frac{1}{1+\tau}} \rho(\tau, \lambda, u)\, d\lambda = 1$ et de la formule

$$\frac{1}{z-t} = \frac{\Gamma_p(t, u)}{\Gamma_p(z, u)\,(z-t)} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\Gamma_{j-1}(z, u)}{\Gamma_p(z, u)}\, t^{p-j}.$$

Comme dans le paragraphe 10 de Mather [16], on déduit immédiatement de la linéarité de Q et de H dans le théorème 6.1.1 le :

6.1.3. Théorème. — *Soient* $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_q$ *des espaces de Banach, et* Ω *un ouvert de* $\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_q$. *Il existe des applications linéaires continues*

$$\mathrm{Q} : \quad \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}\times\Omega) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}\times\Omega\times\mathbf{R}^p),$$
$$\mathrm{H} : \quad \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}\times\Omega) \to \mathrm{C}^\infty(\Omega\times\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^p),$$

telles que si $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}\times\Omega)$, $t \in \mathbf{R}$, $\omega \in \Omega$, $u \in \mathbf{R}^p$, *alors*

$$f(t, \omega) = \Gamma_p(t, u)\, \mathrm{Q}(f)(t, \omega, u) + \mathrm{R}(t, \mathrm{H}(f)(\omega, u))$$

et telles que si X *est un compact de* $\mathbf{R}\times\Omega\times\mathbf{R}^p$ (*resp. de* $\Omega\times\mathbf{R}^p$) *il existe un compact* X′ *de* $\mathbf{R}\times\Omega$ *tel que*

$$\| \mathrm{Q}(f) \|_{r, s_1, \ldots, s_q, k, \mathrm{X}} \underset{(r, s_1, \ldots, s_q, k, \mathrm{X})}{\leqq} \| f \|_{r+(4p-1)k+p+4, s_1, \ldots, s_q, \mathrm{X}'}$$

$$(\textit{resp.}\ \| h(f) \|_{s_1, \ldots, s_q, k, \mathrm{X}} \underset{(s_1, \ldots, s_q, k, \mathrm{X})}{\leqq} \| f \|_{(4p-1)k+p+4, s_1, \ldots, s_q, \mathrm{X}'})$$

pour $r, s_1, \ldots, s_q, k \in \mathbf{N}$. ■

6.2. Division a plusieurs variables. — Soit B_ε la boule fermée de rayon ε dans $\mathbf{R}^p$. Soit M une variété différentiable C^∞ compacte.

6.2.1. Théorème. — *Soient* $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_q : \mathrm{M}\times\mathrm{B}_\varepsilon \to \mathbf{R}$ *des fonctions* C^∞. *On note*

$$\tilde{f}_i = f_i \,|\, \mathrm{M}\times\{0\}, \qquad \tilde{g}_j = g_j \,|\, \mathrm{M}\times\{0\}.$$

On suppose que

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{f}_i . \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}) + \sum_{j=1}^{q} \mathbf{R} . g_i = \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}). \tag{6.2.2}$$

Alors il existe $\varepsilon' \in]0, \varepsilon]$, *des constantes entières* n_k ($k \in \mathbf{N}$) *et des applications linéaires continues* :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Q}_i : & \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}) \to \mathrm{C}^{\infty,\infty}(\mathrm{M}\times\mathrm{B}_{\varepsilon'}) & (1 \leqq i \leqq m), \\ \mathrm{H}_j : & \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}) \to \mathrm{C}^\infty(\mathrm{B}_{\varepsilon'}) & (1 \leqq j \leqq q), \end{array}$$

tels que, si $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Q}_i(f) . f_i + \sum_{j=1}^{q} \mathrm{H}_j(f) . g_j$$

et tels que si $k \in \mathbf{N}$, $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$, $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq q$:

$$\| \mathrm{Q}_i(f) \|_{r, k} \underset{r, k}{\leqq} \| f \|_{r+n_k},$$

$$\| \mathrm{H}_j(f) \|_k \underset{k}{\leqq} \| f \|_{n_k}.$$

Remarque. — On peut faire une remarque analogue à la deuxième suivant l'énoncé du théorème 6.1.1.

Démonstration. — L'ensemble des points de M où tous les $\tilde{f}_i$ sont simultanément nuls est fini; sinon on met facilement en défaut l'hypothèse (6.2.2). De façon précise, le nombre de ces points est inférieur ou égal à q. Comme la réalisation des opérateurs Q_i et H_j est triviale au voisinage des points $(x, 0) \in \mathrm{M}\times\mathrm{B}_\varepsilon$ tels que $\tilde{f}_i(x) = f_i(x, 0) \neq 0$ pour un i, on peut supposer, à l'aide de partitions de l'unité, que $\mathrm{M} = \mathrm{B}$ est la boule unité de $\mathbf{R}^n$, et que $0 \in \mathrm{B}$ est le seul point de B où les $\tilde{f}_i$ sont simultanément nuls.

Soient $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées de $\mathbf{R}^n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ celles de $\mathbf{R}^p$. $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_\lambda$, $\mathcal{E}_{x,\lambda}$ désignent respectivement les anneaux de germes C^∞ en l'origine de fonctions de source $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ respectivement et de but $\mathbf{R}$.

Soit I l'idéal de $\mathcal{E}_{x,\lambda}$ engendré par les germes des f_i. Le morphisme d'algèbres différentiables $\mu : \mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{E}_{x,\lambda}/\mathrm{I}$ induit par la projection $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ est grâce à (6.2.2) quasifini au sens de Malgrange [15] (on montre facilement que $(\mathcal{E}_{x,\lambda}/\mathrm{I}) \otimes m(\mathcal{E}_\lambda)$ est un espace vectoriel de dimension réelle finie). D'après le théorème de préparation de Malgrange [15], il est fini, c'est-à-dire que μ fait de $\mathcal{E}_{x,\lambda}/\mathrm{I}$ un $\mathcal{E}_\lambda$-module de type fini. Tout élément de $\mathcal{E}_{x,\lambda}/\mathrm{I}$, en particulier les germes des fonctions coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ est donc entier algébrique sur l'image de μ.

On peut donc trouver des polynômes P_i à coefficients dans $\mathcal{E}_\lambda$:

$$\mathrm{P}_i(x, \lambda) = x_i^l + \sum_{s=1}^{l} \alpha_{i,s}(\lambda)\, x_i^{l-s} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

qui sont éléments de I.

Une application répétée du théorème 6.1.3 montre alors qu'on peut trouver des applications linéaires continues :

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Q}}_i : &\quad C^\infty(\mathbf{R}^n) \to C^{\infty,\infty}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n \times l}) \qquad (1 \leq i \leq n), \\ \overline{\mathrm{H}}_\gamma : &\quad C^\infty(\mathbf{R}^n) \to C^\infty(\mathbf{R}^{n \times l}) \qquad [\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbf{N}^n,\ \sup(\gamma_i) < l], \end{aligned}$$

telles que, si $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, si $x \in \mathbf{R}^n$, si $(\beta_{i,s})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq s \leq l}} \in \mathbf{R}^{n \times l}$, alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^l + \sum_{s=1}^{l} \beta_{i,s}\, x_i^{l-s} \right) \overline{\mathrm{Q}}_i(f)(x, (\beta_{i,s})) + \sum_{0 \leq \gamma_1, \ldots, \gamma_n < l} \overline{\mathrm{H}}_\gamma(f)\, x_1^{\gamma_1} \ldots x_n^{\gamma_n}.$$

En utilisant un opérateur de prolongement $C^\infty(\mathrm{B}) \to C^\infty(\mathbf{R}^n)$ (*cf.* Seeley [26]), et en substituant $\alpha_{i,s}(\lambda)$ à $\beta_{i,s}$, on réalise dans un voisinage de $\mathrm{B} \times \{0\} \subset \mathrm{B} \times \mathrm{B}_\varepsilon$ la division de $f \in C^\infty(\mathrm{B})$ par les $\mathrm{P}_i(x, \lambda)$, le reste étant une combinaison des $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \ldots x_n^{\gamma_n}$, avec des coefficients fonctions de λ.

L'une des versions du théorème de préparation de Malgrange implique que les g_i engendrent $\mathcal{E}_{x,\lambda/\mathrm{I}}$ comme $\mathcal{E}_\lambda$-module.

On peut ainsi exprimer les x^γ comme somme d'une $\mathcal{E}_{x,\lambda}$-combinaison des f_i et d'une $\mathcal{E}_\lambda$-combinaison des g_i; d'autre part les P_i sont des $\mathcal{E}_{x,\lambda}$-combinaisons des f_i. En exprimant de la sorte les P_i et les x^γ, on démontre le théorème dans un voisinage de $(0, 0) \in \mathrm{B} \times \mathrm{B}_\varepsilon$. Comme on l'a expliqué, la division de f par les f_i se fait sans difficulté au voisinage de $(x, 0) \neq (0, 0) \in \mathrm{B} \times \mathrm{B}_\varepsilon$. Un argument de compacité et une partition de l'unité sur B permettent alors de conclure. L'existence des entiers n_k résulte des formules donnant les majorations de $\| \mathrm{Q}(f) \|$ et $\| \mathrm{H}(f) \|$ dans l'énoncé du théorème 6.1.3. ∎

CHAPITRE 7

Codimension d'une fonction

7.1. Codimension d'une fonction. — Soient M une variété C^∞, compacte, sans bord, $f: M \to \mathbf{R}$ une fonction C^∞, et K un compact de $\mathbf{R}$ dont l'intérieur contient $f(M)$. On considère l'application

$$\Phi : \mathrm{Diff}^\infty(M) \times \mathrm{Diff}_K^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(M)$$

définie par

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1.$$

Cette application est un $\mathscr{L}$-morphisme de classe C^∞ (3.3.6). Sa différentielle en $(\mathrm{id}(M), \mathrm{id}(\mathbf{R})) \in \mathrm{Diff}^\infty(M) \times \mathrm{Diff}_K^\infty(\mathbf{R})$ est définie par (voir Dieudonné [6], VIII, 12, problème 9) :

$$d\Phi(\mathrm{id}(M), \mathrm{id}(\mathbf{R}), \xi_1, \xi_2) = df.\xi_1 + \xi_2 \circ f,$$

où $\xi_1 \in \Gamma^\infty(TM)$, $\xi^2 \in \Gamma_K^\infty(T\mathbf{R})$, $df.\xi_1 + \xi_2 \circ f \in \Gamma^\infty(f^* T\mathbf{R})$.

On écrit plus simplement $D = d\Phi(\mathrm{id}(M), \mathrm{id}(\mathbf{R}))$, et

$$D(\xi_1, \xi_2) = df.\xi_1 + \xi_2 \circ f.$$

7.1.1. Définition. — La *codimension* de f, notée $c(f)$, est la codimension (réelle) de l'image de D dans $\Gamma^\infty(f^* T\mathbf{R})$.

7.1.2. Remarque. — Φ est l'action du groupe $\mathrm{Diff}^\infty(M) \times \mathrm{Diff}_K^\infty(\mathbf{R})$ sur $f \in C^\infty(M)$, si on munit $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ de la loi de groupe opposée de la loi ordinaire. Si le comportement de cette action suit son comportement infinitésimal, on doit s'attendre à ce que l'orbite de f pour cette action soit une sous-variété de codimension $c(f)$ de $C^\infty(M)$. Ce sera précisément l'objet du chapitre suivant.

D'autre part on peut identifier canoniquement $\Gamma_K^\infty(T\mathbf{R})$ avec $C_K^\infty(\mathbf{R})$, et $\Gamma^\infty(f^* T\mathbf{R})$ avec $C^\infty(M)$. Aussi pouvons-nous noter

$$D : \Gamma^\infty(TM) \times C_K^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(M).$$

7.2. Fonctions de codimension finie. — Soit $f: M \to \mathbf{R}$ une fonction de codimension finie c. Soit $D: \Gamma^\infty(TM) \times C_K^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(M)$ comme ci-dessus.

Si $a \in M$, on note $C_a^\infty(M)$ l'espace des germes en a d'éléments de $C^\infty(M)$; mêmes définitions pour $\Gamma_a^\infty(TM)$, $C_b^\infty(\mathbf{R})$, ...

On suppose que $df(a) = 0$, c'est-à-dire que a est un point critique de f. Si $b = f(a)$, D induit par passage au quotient une application

$$\mathrm{D}_a : \Gamma_a^\infty(\mathrm{M}) \times \mathrm{C}_b^\infty(\mathbf{R}) \to \mathrm{C}_a^\infty(\mathrm{M})$$

et l'image de D_a est de codimension finie $d \leqq c$.

Soient $\mathrm{A} = df.\Gamma_a^\infty(\mathrm{M})$ qui est un idéal de $\mathrm{C}_a^\infty(\mathrm{M})$ (l'idéal « jacobien ») et $\mathrm{A}_n = \mathrm{A} + (f - f(a))^n.\mathrm{C}_a^\infty(\mathrm{M})$. Ici, $f - f(a)$ est le germe $x \mapsto f(x) - f(a)$, autrement dit le germe de f « annulé en a ».

Si $\xi_2 \in \mathbf{C}_b^\infty(\mathbf{R})$, on a

$$(\xi_2 \circ f)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\xi_2^{(i)}(b)}{i\,!}(f(x) - f(a))^i + \frac{(f(x) - f(a))^n}{(n-1)\,!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\,\xi_2^{(n)}[tf(x) + (1-t)f(a)]\,dt,$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{D}_a \subset \mathrm{A}_n + \sum_{i=0}^{n-1}(f - f(a))^i\,\mathbf{R}.$$

Si $c_n = \dim_{\mathbf{R}}\left[\dfrac{\mathrm{C}_a^\infty(\mathrm{M})}{\mathrm{A}_n}\right]$, on a donc

$$c_n \leqq d + n,$$

ce qui, pour $n = d + 1$ s'écrit

$$c_{d+1} = c_0 + (c_1 - c_0) + \ldots + (c_{d+1} - c_d) \leqq 2d + 1.$$

Comme $c_0 = 0$, il existe k $(1 \leqq k \leqq d + 1)$ tel que

$$c_k - c_{k-1} = 0 \quad \text{ou} \quad 1.$$

Dans l'un ou l'autre cas, on aura [$m_a =$ idéal maximal de $\mathrm{C}_a^\infty(\mathrm{M})$]:

$$m_a.\mathrm{A}_{k-1} \subset \mathrm{A}_k$$

et donc

$$m_a.(f - f(a))^{k-1} \subset \mathrm{A} + \mathrm{C}_a^\infty(\mathrm{M})(f - f(a))^k.$$

Mais $df(a) = 0$ implique $f - f(a) \in m_a^2$; ainsi

$$m_a.(f - f(a))^{k-1} \subset \mathrm{A} + m_a^2(f - f(a))^{k-1}.$$

Le lemme de Nakayama donne alors

$$m_a(f - f(a))^{k-1} \subset \mathrm{A}$$

et en particulier :

$$(f - f(a))^k \in \mathrm{A}.$$

Ainsi, si k est le plus petit entier tel que cette relation soit vérifiée, on a

$$\operatorname{Im} D_a = A \oplus \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{R}.(f - f(a))^i.$$

A est donc de codimension réelle finie; c'est un idéal de définition de C_a^∞ (M), et le point critique a est isolé.

Ces considérations justifient les :

7.2.1. Définitions. — Si $a \in M$, si $f \in C^\infty(M)$, et si $b = f(a)$, alors :

(a) *la codimension de f en a*, notée $c(f, a)$ est la dimension (réelle) de $\dfrac{C_a^\infty(M)}{A}$;

(b) *la dimension de f en* (a, b), notée $d(f, a, b)$ est le plus petit entier k tel que $(f - f(a))^k \in A$;

(c) *la dimension de f en b*, notée $d(f, b)$ est définie par

$$d(f, b) = \sup_{f(a)=b} d(f, a, b);$$

si $b \notin f(M)$, on posera $d(f, b) = 0$.

L'algèbre linéaire élémentaire et des partitions de l'unité donnent la :

7.2.2. Proposition. — *Si $f : M \to \mathbf{R}$ est de codimension c, f a un nombre fini de points critiques; si $a \in M$ et si $b = f(a)$, alors $c(f, a)$, $d(f, a, b)$, $d(f, b)$ sont finis, et*

$$c = \sum_{a \in M} c(f, a) - \sum_{b \in \mathbf{R}} d(f, b).$$

7.2.3. Exemple : $f(x, y) = x^5 + x^2 y^2 + y^5$; $f \in C_{(0,0)}^\infty(\mathbf{R}^2)$.

En calculant un peu, on voit que

$$m_{(0,0)}^6 \subset df.C_{(0,0)}^\infty(\mathbf{R}^2) + m_{(0,0)}^7,$$

d'où l'on déduit (Nakayama) :

$$A \supset m_{(0,0)}^6.$$

On voit ensuite que

$$c(f, (0, 0)) = 11,$$
$$d(f, (0, 0), 0) = 2.$$

Ce type de singularité est donc de codimension 9.

On trouvera d'autres exemples intéressants dans Hendriks [11], et Siersma [29].

Signalons un problème pour le moment presque sans solution, celui de trouver une bonne majoration de $d(f, a, b)$, connaissant $c(f, a)$, dim M. Mentionnons cependant le résultat de Saito [23].

7.3. Existence d'une section de D. — Soient M, f, K, D comme ci-dessus. Soient $f_1, \ldots, f_c$ les éléments d'une base d'un supplémentaire de l'image de D dans $C^\infty(M)$.

On note désormais D, l'application

$$D: \Gamma^\infty(TM) \times C_K^\infty(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^c \to C^\infty(M)$$

définie par

$$D(\xi_1, \xi_2, \lambda_1, \ldots, \lambda_c) = df.\xi_1 + \xi_2 \circ f + \sum_{i=1}^{c} \lambda_i f_i.$$

On notera souvent

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_c) \in \mathbf{R}^c, \qquad \bar{f} = (f_1, \ldots, f_c) \in C^\infty(M, \mathbf{R}^c), \qquad \lambda \bar{f} = \sum_{i=1}^{c} \lambda_i f_i \in C^\infty(M).$$

7.3.1. Proposition. — *Il existe un* 1-$\mathcal{L}$-*morphisme*

$$L: C^\infty(M) \to \Gamma^\infty(TM) \times C_K^\infty(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^c$$

tel que $D \circ L$ *soit l'application identique de* $C^\infty(M)$.

Remarque. — Comme L est un 1-$\mathcal{L}$-morphisme, L est linéaire (*cf.* définition 2.3.1).

Démonstration. — La proposition 7.3.1 résulte facilement du théorème 6.2.1. Mais on peut donner la démonstration élémentaire suivante. On sait (7.2.2) que f n'a qu'un nombre fini de points critiques : $a_1, \ldots, a_p$. Soient $B_1, \ldots, B_p$ des ouverts de M, contenant respectivement $a_1, \ldots, a_p$, et disjoints deux à deux. Soit U un ouvert de M n'ayant aucun point critique de f dans son adhérence, et contenant le complémentaire dans M de $\bigcup_{i=1}^{p} B_i$. Soit $(\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une partition C^∞ de l'unité subordonnée au recouvrement $(U, B_1, \ldots, B_p)$ de M. On peut supposer que chaque B_i est C^∞-difféomorphe à la boule unité de $\mathbf{R}^n$, le difféomorphisme étant défini par des applications de coordonnées, $x_1^i, \ldots, x_n^i$, de classe C^∞, de source B_i et de but $\mathbf{R}$, et telles que $x_j^i(a_i) = 0$ $(1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq n)$.

Il résulte de la finitude de la codimension de f (*voir* 7.2) qu'on peut trouver un entier s tel que $(x_j^i)^s \varphi_i$ appartienne à $df.\Gamma^\infty(TM)$. D'autre part, φ appartient aussi à $df.\Gamma^\infty$ (TM), ceci du fait du choix de U, où df n'est jamais nul.

Notons, si $\eta \in C^\infty(B_i)$:

$$q_{j,i}(\eta)(x_1^i, \ldots, x_n^i)$$
$$= \frac{1}{(s-1)!} \sum_{0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1} < s} \frac{(x_1^i)^{\alpha_1} \ldots (x_{j-1}^i)^{\alpha_{j-1}}}{\alpha_1! \ldots \alpha_{j-1}!}$$
$$\times \int_0^1 (1-t)^{s-1} \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{j-1} + s} \eta}{(\partial x_1^i)^{\alpha_1} \ldots (\partial x_{j-1}^i)^{\alpha_{j-1}} (\partial x_j^i)^s} (0, \ldots, 0, tx_j^i, x_{j+1}^i, \ldots, x)\, dt,$$
$$r_{\alpha,i}(\eta) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \eta}{(\partial x_1^i)^{\alpha_1} \ldots (\partial x_n^i)^{\alpha_n}} (0, \ldots, 0),$$
$$(x^i)^\alpha = (x_1^i)^{\alpha_1} \ldots (x_n^i)^{\alpha_n};$$

si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ est un multi-indices, et si $\eta = \eta(x_1^i, \ldots, x_n)$ est exprimé à l'aide des coordonnées de B_i. Ainsi, $q_i(\eta) \in C^\infty(B_i)$, $r_{\alpha,i}(\eta) \in \mathbf{R}$.

La formule de Taylor avec reste de Lagrange à l'ordre s, appliquée successivement par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$ montre que, dans B_i :

$$\eta = \sum_{j=1}^n q_{j,i}(\eta)(x_j^i)^s + \sum_{|\alpha| < s} r_{\alpha,i}(\eta)(x^i)^\alpha;$$

si $|\alpha| = |(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| = \sup(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Soient maintenant

$$\xi_1, \quad \xi_{1,j}^i \, (1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n), \qquad \xi_{1,\alpha}^i \, (1 \leq i \leq p, |\alpha| < s) \in \Gamma^\infty(\mathrm{TM}),$$

$\xi_{2,\alpha} \, (1 \leq i \leq p, \ |\alpha| < s) \in C_K^\infty(\mathbf{R})$, $\lambda_\alpha^i \, (1 \leq i \leq p, |\alpha| < s) \in \mathbf{R}^c$ tels que

$$\begin{cases} \varphi = df.\xi_1, \\ \varphi_i.(x_j^i)^s = df.\xi_{1,j}^i, \\ \varphi_i.(x^i)^\alpha = df.\xi_{1,\alpha}^i + \xi_{2,\alpha}^i \circ f + \lambda_\alpha^i \bar{f}. \end{cases}$$

Alors, si $\eta \in C^\infty(M)$, on peut écrire

$$\eta = (\varphi + \varphi_1 + \ldots + \varphi_p)\eta = \varphi\eta + \sum_{i=1}^p \varphi_i \left[\sum_{j=1}^n q_{j,i}(\eta)(x_j^i)^s + \sum_{|\alpha|<s} r_{\alpha,i}(\eta)(x^i)^\alpha \right]$$
$$= df\left[\eta\xi_1 + \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^n q_{j,i}(\eta)\,\xi_{1,j}^i + \sum_{|\alpha|<s} r_{\alpha,i}(\eta)\,\xi_{1,\alpha}^i \right) \right]$$
$$+ \left[\sum_{i=1}^p \sum_{|\alpha|<s} r_{\alpha,i}(\eta)\,\xi_{2,\alpha}^i \right] \circ f + \left[\sum_{i=1}^p \sum_{|\alpha|<s} r_{\alpha,i}(\eta)\,\lambda_\alpha^i \right] \bar{f}.$$

On peut ainsi poser

$$\mathrm{L}(\eta) = \left(\eta\xi_1 + \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} q_{j,i}(\eta)\, \xi_{1,j}^i + \sum_{|\alpha|<s} r_{\alpha,i}(\eta)\, \xi_{1,\alpha}^i \right), \right.$$
$$\left. \sum_{i=1}^{p} \sum_{|\alpha|<s} r_{\alpha,i}(\eta)\, \xi_{2,\alpha}^i, \sum_{i=1}^{p} \sum_{|\alpha|<s} r_{\alpha,i}(\eta)\, \lambda_\alpha^i \right).$$

Alors L est un 1-$\mathcal{L}$-morphisme [car L est linéaire, et on peut majorer $|q_{j,i}(\eta)|_r$ en fonction de $|\eta|_{r+ns}$ où ns est indépendant de r], et est une section de D. ■

CHAPITRE 8

Action de $\mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{M}) \times \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{R})$ sur $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$

8.1. Énoncé. — Soit M une variété différentiable C^∞, compacte, et soit $f : \mathrm{M} \to \mathbf{R}$ une fonction C^∞ de codimension finie c (*cf.* définition 7.1.1). Soient D comme en 7.1, et $f_1, \ldots, f_c$ une base d'un supplémentaire de l'image de D dans $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$. Le but de ce chapitre est la démonstration du théorème 8.1.1 précisant dans quelle mesure l'action du groupe $\mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{M}) \times \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{R})$ sur $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ est localement triviale; voir aussi la remarque 7.1.2.

8.1.1. Théorème. — *Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de f dans* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$, *et deux $\mathcal{L}$-morphismes faibles de classe* C^∞ :

$$s_1, s_2 : \quad \mathcal{V} \to \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{M}) \times \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^c$$

tels que, si

$$s_1(g) = (\varphi_1, \varphi_2; \lambda_1, \ldots, \lambda_c); \qquad s_2(g) = (\psi_1, \psi_2; \mu_1, \ldots, \mu_c),$$

alors

$$g = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1 + \sum_{i=1}^{c} \lambda_i f_i = \psi_2 \circ \left(f + \sum_{i=1}^{c} \lambda_i f_i \right) \circ \psi_1.$$

L'existence de s_2 montre que l'application

$$(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_c) \mapsto \left(f(x) + \sum_{i=1}^{c} \lambda_i f_i(x), \lambda_1, \ldots, \lambda_c \right)$$

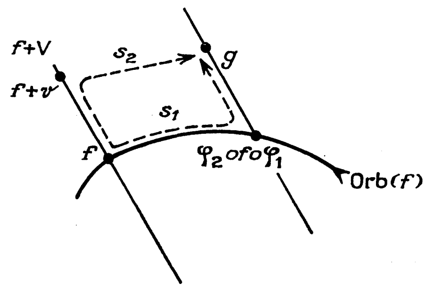
de source $M \times \mathbf{R}^c$ et de but $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^c$ est un déploiement universel de f au sens de Thom [31]. On peut trouver une autre démonstration de ce fait dans Thom [32].

Interprétation. — Considérons le sous-espace vectoriel $V = \sum_{i=1}^{c} \mathbf{R} f_i$ de dimension c de $C^\infty(M)$, et l'action Φ du groupe $\mathrm{Diff}^\infty(M) \times \mathrm{Diff}^\infty(R)$ sur $C^\infty(M)$ définie par

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2; f) = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1.$$

On munit $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ de la loi de groupe opposée de la loi ordinaire pour obtenir effectivement une action de groupe (*cf.* 7.1).

L'existence de s_1 montre que, modulo V, tout $g \in C^\infty(M)$ assez voisin de f est dans l'orbite de f. L'existence de s_2 exprime que, si g est assez voisin de f, g est dans l'orbite de $f + v$ où v est un élément convenable de V.



L'application

$$v \mapsto f + v$$

de source V et de but $C^\infty(M)$ apparaît comme une *section transverse* à l'orbite de f dans $C^\infty(M)$ (*cf.* chapitre 9).

8.2. Existence de s_1. — Pour montrer l'existence de s_1, comme celle de s_2, on va appliquer le théorème 4.2.5.

Ici G va être le groupe additif $\mathbf{R}^c$, H le groupe $\mathrm{Diff}^\infty(M) \times \mathrm{Diff}^\infty_K(\mathbf{R})$, K étant un compact de $\mathbf{R}$ dont l'intérieur contient l'image de M par f,

$$\Phi : \mathbf{R}^c \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

va être définie par

$$\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_c; f) = f + \sum_{i=1}^{c} \lambda_i f_i$$

ou en adoptant la notation abrégée du chapitre 7 :

$$\Phi(\lambda, f) = f + \lambda \bar{f},$$

$$\Psi : \mathrm{Diff}^\infty(M) \times \mathrm{Diff}^\infty_K(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^c \to C^\infty(M)$$

est définie par

$$\Psi(\varphi_1, \varphi_2; f) = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1.$$

Si on pose, comme en 4.3.1 :

$$\chi(\lambda, \varphi_1, \varphi_2, f) = \Phi(\lambda, \Psi(\varphi_1, \varphi_2, f)),$$

alors

$$d\chi(0, \mathrm{id}(\mathrm{M}), \mathrm{id}(\mathrm{R}), f, \hat{\lambda}, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2) = \tau f.\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2 \circ f + \hat{\lambda}\bar{f} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$$

si $\lambda \in \mathbf{R}^c$,

$$\hat{\xi}_1 \in \Gamma^\infty(\mathrm{M}) = \mathrm{T}_{\mathrm{id}(\mathrm{M})} \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{M}), \qquad \hat{\xi}_2 \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{K}}(\mathbf{R}) \approx \Gamma^\infty_{\mathrm{K}}(\mathbf{R}) = \mathrm{T}_{\mathrm{id}(\mathbf{R})} \mathrm{Diff}^\infty_{\mathrm{K}}(\mathbf{R}).$$

Ainsi, pour pouvoir appliquer le théorème 4.2.5., il faut trouver un 1-$\mathscr{L}$-morphisme de classe C^∞ :

$$\mathrm{M} : \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{M}) \times \mathrm{Diff}^\infty_{\mathrm{K}}(\mathbf{R}) \times \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}) \to \Gamma^\infty(\mathrm{M}) \times \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{K}}(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^c$$

tel que si

$$\mathrm{M}(\varphi_1, \varphi_2, \hat{\eta}) = (\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\lambda})$$

alors $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$, λ soient solutions de l'équation

$$\tau(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1).\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2 \circ (\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1) + \hat{\lambda} f = \hat{\eta}.$$

Appliquons à gauche l'opérateur $\tau\varphi_2^{-1}$, et composons à droite avec φ_1^{-1} ; si on pose

$$\tilde{\xi}_1 = \tau\varphi_1 \circ \hat{\xi}_1 \circ \varphi_1^{-1} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\xi}_2 = \tau\varphi_2^{-1} \circ \hat{\xi}_2 \circ \varphi_2,$$

il vient

$$\tau f \circ \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \circ f + \hat{\lambda}(\tau\varphi_2^{-1} \circ \bar{f} \circ \varphi_1^{-1}) = \tau\varphi_2^{-1} \circ \hat{\eta} \circ \varphi_1^{-1}.$$

On sait résoudre cette équation pour $(\varphi_1, \varphi_2) = (\mathrm{id}\,\mathrm{M}, \mathrm{id}\,\mathbf{R})$; l'opérateur de résolution est l'opérateur L calculé en 7.3.1. On note $\mathrm{L} = (\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3)$ les trois composantes de L, et $f_i(\varphi_1, \varphi_2) = \tau\varphi_2^{-1} \circ f_i \circ \varphi_1^{-1}$. En particulier, $f_i(\mathrm{id}(\mathrm{M}), \mathrm{id}(\mathbf{R})) = f_i$. Par ailleurs :

$$f_i(\varphi_1, \varphi_2) = \tau f.\mathrm{L}_1(f_i(\varphi_1, \varphi_2)) + \mathrm{L}_2(f_i(\varphi_1, \varphi_2)) \circ f + \sum_{j=1}^{c} \mathrm{L}_{3,j}(f_i(\varphi_1, \varphi_2)) f_j.$$

Mais, par construction de L, $\mathrm{L}_{3,j}(f_i) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker). Ainsi, pour (φ_1, φ_2) peu différent de $(\mathrm{id}(\mathrm{M}), \mathrm{id}(\mathbf{R}))$, la matrice $(\mathrm{L}_{3,j}(f_i))_{\substack{1 \leq i \leq c \\ 1 \leq j \leq c}}$ est inversible. Soit $(\lambda_{i,j}(\varphi_1, \varphi_2))$ la matrice inverse. Il vient

$$f_i = \sum_{j=1}^{c} \lambda_{i,j}(\varphi_1, \varphi_2)\,[f_j(\varphi_1, \varphi_2) - \tau f.\mathrm{L}_1(f_j(\varphi_1, \varphi_2)) - \mathrm{L}_2(f_j(\varphi_1, \varphi_2)) \circ f].$$

D'autre part, posons $\tilde{\eta} = \tau\varphi_2^{-1} \circ \hat{\eta} \circ \varphi_1^{-1}$. Alors

$$\tilde{\eta} = \tau f \circ \mathrm{L}_1(\tilde{\eta}) + \mathrm{L}_2(\tilde{\eta}) \circ f + \sum_{i=1}^{c} \mathrm{L}_{3,i}(\tilde{\eta}).f_i.$$

En reportant dans cette dernière relation, la valeur précédemment calculée pour f_i, on trouve la solution suivante pour $\tilde{\xi}_1$, $\tilde{\xi}_2$, $\hat{\lambda}$:

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_1 = \mathrm{L}_1(\tilde{\eta}) - \displaystyle\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{c} \mathrm{L}_{3,i}(\tilde{\eta})\,\lambda_{i,j}(\varphi_1, \varphi_2)\,\mathrm{L}_1(f_j(\varphi_1, \varphi_2)), \\ \tilde{\xi}_2 = \mathrm{L}_2(\tilde{\eta}) - \displaystyle\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{c} \mathrm{L}_{3,i}(\tilde{\eta})\,\lambda_{i,j}(\varphi_1, \varphi_2)\,\mathrm{L}_2(f_j(\varphi_1, \varphi_2)), \\ \hat{\lambda}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{c} \mathrm{L}_{3,j}(\tilde{\eta})\,\lambda_{j,i}(\varphi_1, \varphi_2) \qquad (1 \leq i \leq c). \end{cases}$$

On trouve enfin $\hat{\xi}_1$ et ξ_2 par

$$\hat{\xi}_1 = \tau\varphi_1^{-1} \circ \tilde{\xi}_1 \circ \varphi_1,$$
$$\hat{\xi}_2 = \tau\varphi_2 \circ \tilde{\xi}_2 \circ \varphi_2^{-1}.$$

On a ainsi construit

$$\mathrm{M} : \quad (\varphi_1, \varphi_2, \hat{\eta}) \mapsto (\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\lambda}).$$

Que M ainsi construit soit un $\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞ résulte de la proposition 7.3.1, et des théorèmes 2.3.7, 3.3.6 et 3.4.1. On peut ainsi appliquer le théorème 4.2.5 et conclure à l'existence annoncée du $\mathcal{L}$-morphisme faible s_1 de classe C^∞.

8.3. Existence de s_2. — Pour montrer l'existence de s_2, on applique encore le théorème 4.2.5; mais cette fois les rôles de $\mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{M}) \times \mathrm{Diff}^\infty_{\mathrm{K}}(\mathbf{R})$ et de $\mathbf{R}^c$ sont échangés. Aussi posons-nous $\mathrm{G} = \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{M}) \times \mathrm{Diff}^\infty_{\mathrm{K}}(\mathbf{R})$ et $\mathrm{H} = \mathbf{R}^c$,

$$\Phi : \quad \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{M}) \times \mathrm{Diff}^\infty_{\mathrm{K}}(\mathbf{R}^c) \times \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}) \to \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$$

est défini par

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, f) = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1.$$

$$\Psi : \quad \mathbf{R}^c \times \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}) \to \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$$

est défini par

$$\Psi(\lambda, f) = f + \lambda \bar{f}.$$

Toujours comme en 4.3.1, on pose

$$\chi(\varphi_1, \varphi_2, \lambda, f) = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \Psi(\lambda, f)).$$

Alors

$$d\chi(\mathrm{id}(\mathrm{M}), \mathrm{id}(\mathbf{R}), 0, f, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2\, \hat{\lambda}) = \tau f.\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2 \circ f + \hat{\lambda} f.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème 4.3.1, il faut trouver un 1-$\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞ :

$$M : \mathbf{R}^c \times C^\infty(M) \to \Gamma^\infty(M) \times C^\infty_K(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^c$$

tel que si $M(\lambda, \hat{\eta}) = (\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\lambda})$, alors $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$, $\hat{\lambda}$ soient solutions de l'équation

$$\tau(f + \lambda \bar{f}).\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2 \circ (f + \lambda \bar{f}) + \hat{\lambda} \bar{f} = \hat{\eta}. \tag{8.3.1}$$

On sait résoudre cette équation pour $\lambda = 0$; l'opérateur de résolution est l'opérateur L calculé en 7.3.1. On voit qu'on se trouve dans une situation analogue à celle du théorème 6.2.1. C'est effectivement celui-ci qu'on va appliquer. Comme f est de codimension finie, on peut trouver des fonctions $\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_p \in C^\infty(M)$ appartenant à $A = \tau f.\Gamma^\infty(M)$ et des fonctions $h_1, \ldots, h_q \in C^\infty(M)$ telles que

$$\sum_{i=1}^{p} \tilde{g}_i . C^\infty(M) + \sum_{j=1}^{q} \mathbf{R}.\tilde{h}_j = C^\infty(M).$$

Ceci résulte immédiatement de la proposition 7.2.2.

Soient $\xi_{1,i}$, $\xi'_{1,j} \in \Gamma^\infty(M)$, $\xi_{2,j} \in C^\infty_K(\mathbf{R})$, $\lambda_j \in \mathbf{R}^c$ $(1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q)$ tels que

$$\tilde{g}_i = \tau f \circ \xi_{1,i} \qquad (1 \leq i \leq p),$$
$$\tilde{h}_j = \tau f \circ \xi'_{1,j} + \xi_{2,j} \circ f + \lambda_j \bar{f}.$$

Posons alors

$$g_i(x, \lambda) = \tau(f + \lambda \bar{f}) \circ \xi_{1,i}(x),$$
$$h_j(x, \lambda) = \tau(f + \lambda \bar{f}) \circ \xi'_{1,j}(x) + \xi_{2,j}(f(x) + \lambda \bar{f}(x)) + \lambda_j \bar{f}(x).$$

Les hypothèses du théorème 6.2.1 sont satisfaites. On peut ainsi trouver des fonctions Q_i et H_j $(1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q)$, telles que

$$\hat{\eta} = \sum_{i=1}^{p} Q_i(\hat{\eta})\, g_i + \sum_{j=1}^{q} H_j(\hat{\eta})\, h_j.$$

Il suffit donc de poser, si $\lambda \in \mathbf{R}^c$ est assez petit, et si $\hat{\eta} \in C^\infty(M)$:

$$\hat{\xi}_1 = \sum_{i=1}^{p} Q_i(\hat{\eta})_\lambda\, \xi_{1,i} + \sum_{j=1}^{q} H_j(\hat{\eta})(\lambda).\xi'_{1,j},$$

$$\hat{\xi}_2 = \sum_{j=1}^{q} H_j(\hat{\eta})(\lambda).\xi_{2,j},$$

$$\hat{\lambda} = \sum_{j=1}^{q} H_j(\hat{\eta})(\lambda).\lambda_j.$$

On a ainsi construit $M : (\lambda, \hat{\eta}) \mapsto (\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\lambda})$ comme désiré. Que M soit un 1-$\mathcal{L}$-morphisme de classe C^∞ résulte de l'existence des entiers n_k dans l'énoncé du théorème 6.2.1.

On peut ainsi appliquer le théorème 4.3.1 et conclure à l'existence annoncée du $\mathcal{L}$-morphisme faible s_2 de classe C^∞. ■

CHAPITRE 9

Stratification de $C^\infty(M)$

9.1. Espace a opérateurs stratifié. — Soient E un espace topologique, G un groupe topologique opérant continûment sur E, et e l'élément neutre de G.

9.1.1. Définition. — Une *stratification* de (E, G) est une suite $(E^i)_{i \in \mathbf{N}}$ de sous-espaces de E disjoints deux à deux tels que :

(S_1) pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\bigcup_{i=0}^{n} E^i$ est ouvert de E;

(S_2) pour tout $i \in \mathbf{N}$, E^i est stable par G.

Soit $\mathcal{S} = (E^i)_{i \in \mathbf{N}}$ une stratification de l'espace à opérateurs (E, G).

9.1.2. Définition. — $\mathcal{S}$ est une stratification *localement triviale* si elle vérifie l'axiome suivant :

(SLC) Pour tout $i \in \mathbf{N}$, pour tout $x_0 \in E^i$, il existe un voisinage V de O dans R^i, $\mathcal{V}$ de x_0 dans E, $\mathcal{W}$ de x_0 dans l'orbite locale de x_0, une application continue $T : V \to \mathcal{V}$, une application continue :

$$\Gamma = (\Gamma_w, \Gamma_g, \Gamma_\lambda) : \quad \mathcal{V} \to \mathcal{W} \times G \times V$$

telle que

(*a*) Γ est un homéomorphisme sur son image;

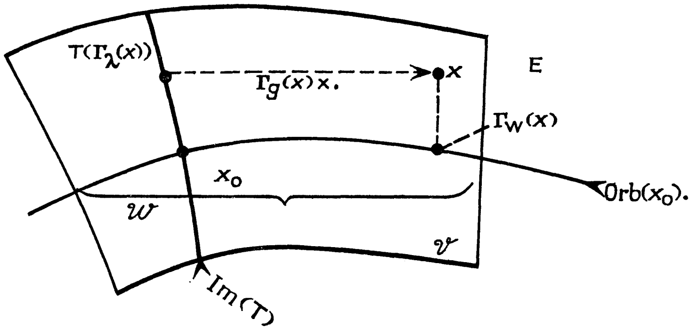
(*b*) $\bar{\Gamma} = (\Gamma_w, \Gamma_\lambda) : \mathcal{V} \to \mathcal{W} \times V$ est un homéomorphisme;

(*c*) pour tout $x \in \mathcal{V}$, $x = \Gamma_g(x) . T(\Gamma_\lambda(x))$;

(*d*) $x \in T(V)$ implique $\Gamma_g(x) = e$;

(*e*) si x appartient à l'orbite locale de x_0, alors

$$\Gamma_\lambda(x) = 0 \in V, \qquad \text{et} \qquad \Gamma_w(x) = x.$$



L'application T est une *section transverse* à l'orbite de x_0 en x_0.

Remarque. — On comparera ces définitions à celles de Cerf [5], chapitre 1. La comparaison peut notamment être éclairée par la :

9.1.3. Proposition. — *Soit* $\mathcal{S} = (\mathrm{E}^i)_{i\in\mathbf{N}}$ *une stratification localement triviale d'un espace à opérateurs* (E, G).

Alors : pour tout $i \in \mathbf{N}$, *pour tout* $x_0 \in \mathrm{E}^i$, *il existe un voisinage* V *de* O *dans* $\mathbf{R}^i$, *une stratification* $\mathcal{T} = (\mathrm{F}^j)_{0\leq j\leq i}$ *de* $(\mathrm{V}, \mathrm{G}_0)$ *(où* G_0 *est le groupe nul) telle que* $\mathrm{V} = \bigcup_{j=0}^{i} \mathrm{F}^j$, *il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* x_0 *dans* E, *un voisinage* $\mathcal{W}$ *de* x_0 *dans l'orbite locale de* x_0, *et un homéomorphisme*

$$\Phi = (\Phi_w, \Phi_\lambda) : \quad \mathcal{V} \to \mathcal{W} \times \mathrm{V}$$

tels que $x \in \mathrm{E}^j \cap \mathcal{V}$ *équivaut à* $x \in \mathcal{V}$ *et* $\Phi_\lambda(x) \in \mathrm{F}^j$.

Démonstration. — Si $i \in \mathbf{N}$, si $x_0 \in \mathrm{E}^i$, soient V, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, T, Γ comme dans la définition 9.1.2.

On pose $\Phi = \overline{\Gamma}$, de sorte que $\Phi_w = \Gamma_w$ et $\Phi_\lambda = \Gamma_\lambda$. Alors Φ est un homéomorphisme d'après $(\mathrm{SLC})_b$. Soit $\mathrm{F}_j = \mathrm{T}^{-1}(\mathcal{V} \cap \mathrm{E}^j)$ $(0 \leq j \leq i)$. L'axiome (S_1) assure que si $\mathcal{V}$ est assez petit, $\bigcup_{j=0}^{i} \mathrm{F}^j = \mathrm{V}$. D'autre part $(\mathrm{SLC})_c$ implique que $x \in \mathrm{E}^j \cap \mathcal{V}$ équivaut à $\mathrm{T}(\Gamma_\lambda(x)) \in \mathrm{E}^j \cap \mathcal{V}$ [grâce à (S_2)] et donc à $\Gamma_\lambda(x) = \Phi_\lambda(x) \in \mathrm{F}^j$.

Interprétation. — On peut interpréter la proposition 9.1.3 en disant que, au voisinage de $x_0 \in \mathrm{E}^i$, la stratification $\mathcal{S}$ est le « produit » d'une stratification $\mathcal{T}_{x_0}$ d'un ouvert de $\mathbf{R}^i$ par une stratification triviale; l'étude de la géométrie de $\mathcal{S}$ au voisinage de x_0 est ainsi ramenée à l'étude de celle de $\mathcal{T}_{x_0}$.

9.2. Stratification naturelle de $C^\infty(M)$. — Soit M une variété C^∞ compacte, sans bord. On note $\mathcal{F}^c \subset C^\infty(M)$ le sous-espace constitué des fonctions de codimension c ($c \in \mathbf{N}$). Soit $G = \mathrm{Diff}^\infty(M) \times \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{R})$, groupe qu'on fait opérer sur $C^\infty(M)$ par la loi de composition

$$(\varphi_1, \varphi_2) f = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1.$$

9.2.1 Définition. — *La stratification naturelle* de $(C^\infty(M), G)$ est la suite $(\mathcal{F}^c)_{c \in \mathbf{N}}$.

L'axiome (S_2) est trivialement vérifié; l'axiome (S_1) résulte de la :

9.2.2. Proposition. — *Soit* $f \in C^\infty(M)$ *de codimension finie c. Alors il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* f *dans* $C^\infty(M)$ *composé de fonctions de codimension* $\leq c$.

Démonstration. — Soient $(f_1, \ldots, f_c) = \bar{f}$ les fonctions construites en 7.3. En vertu du théorème 8.1.1, il suffit de vérifier que si λ est assez petit, $f + \lambda \bar{f}$ a une codimension $\leq c$. Or ceci résulte du fait que si λ est assez petit, on peut, pour tout $\hat{\eta}$, résoudre en $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$, $\hat{\lambda}$ l'équation (8.3.1). ■

Pour étudier la stratification naturelle de $C^\infty(M)$, on aura besoin de la :

9.2.3. Proposition. — *Soit* $f \in \mathcal{F}^c$, *et soient* $(f_1, \ldots, f_c) = \bar{f}$ *les fonctions construites en* 7.3. *Alors* $f + \lambda \bar{f}$ *appartient à l'orbite locale de* f *implique* $\lambda = 0$.

Démonstration. — Il faut trouver un voisinage $\mathcal{U}$ de $e = (\mathrm{id}(M), \mathrm{id}(\mathbf{R}))$ dans G tel que $f + \lambda \bar{f} \in \mathcal{U}.f$ implique $\lambda = 0$. Prenons pour $\mathcal{U}$ un voisinage assez petit de e pour que tout point (φ_1, φ_2) de $\mathcal{U}$ puisse être joint à e par un chemin différentiable dans $\mathcal{U}$, et pour que $\mathcal{U} f \subset \mathcal{V}$, où $\mathcal{V}$ est le voisinage de f dont l'existence est affirmée par le théorème 8.1.1. Soit

$$s_2 = (s_2^1, s_2^2, s_2^\lambda) : \quad C^\infty(M) \to \mathrm{Diff}^\infty(M) \times \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^c$$

comme en 8.1.1.

Supposons que $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{U}$ et que

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1 = f + \lambda \bar{f}$$

pour un $\lambda \neq 0$.

Soient $\psi_1, \psi_2 : I = [0, 1] \to \mathrm{Diff}^\infty(M), \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{R})$ deux chemins différentiables d'origines id (M), id ($\mathbf{R}$) et d'extrêmités φ_1 et φ_2.

Posons, pour $t \in \mathrm{I}$:

$$\chi_1(t) = \psi_1(t) \circ [s_2^1(\psi_2(t) \circ f \circ \psi_1(t))]^{-1} \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{M}),$$

$$\chi_2(t) = [s_2^2(\psi_2(t) \circ f \circ \psi_1(t))]^{-1} \circ \psi_2(t) \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{R}),$$

$$\lambda(t) = s_2^\lambda(\psi_2(t) \circ f \circ \psi_1(t)) \in \mathbf{R}^c.$$

Les propriétés de s_2 (8.1.1) impliquent

(1) $$\chi_2(t) \circ f \circ \chi_1(t) = f + \lambda(t)\bar{f}.$$

Comme s_2 est de classe C^∞, on peut dériver par rapport à t :

(2) $$\frac{\partial \chi_2(t)}{\partial t} \circ f \circ \chi_1(t) + \tau\chi_2(t) \circ \tau f \circ \frac{\partial \chi_1(t)}{\partial t} = \lambda'(t)\bar{f}.$$

Mais, t étant supposé fixé, on peut aussi différencier les deux membres de (1) :

(3) $$\tau\chi_2(t) \circ \tau f \circ \tau\chi_1(t) = \tau f + \lambda(t)\tau\bar{f}.$$

La comparaison de ces trois relations donne la suivante :

(4) $$\tau(f + \lambda(t)\bar{f}).\tau\chi_1(t)^{-1} \circ \frac{\partial \chi_1(t)}{\partial t} + \frac{\partial \chi_2(t)}{\partial t} \circ \chi_2^{-1}(t) \circ (f + \lambda(t)\bar{f}) = \lambda'(t)\bar{f}.$$

Soit $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $\lambda'(t_0) \neq 0$. Compte tenu de la remarque déjà fait que l'équation (8.3.1) admet pour tout $\hat{\eta}$ une solution en $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$, $\hat{\lambda}$, compte tenu de la définition de la codimension d'une fonction (7.1.1), ceci implique que la codimension de $f + \lambda(t_0)\bar{f}$ est $\leq c - 1$; mais ceci contredit le fait que $f + \lambda(t_0)\bar{f}$ est dans l'orbite de f. ■

9.2.4. Théorème. — *La stratification naturelle de* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ *est localement triviale.*

Démonstration. — Soit $f \in \mathscr{F}^c$; soient $\bar{f}$ comme en 7.3, $\mathcal{V}_0$,

$$s_1, s_2 : \mathcal{V}_0 \to \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{M}) \times \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^c$$

comme dans le théorème 8.1.1.

Soient $\mathcal{U}$ un voisinage de $e \in \mathrm{G}$, et V_0 un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^c$ tels que $\mathcal{U}.f + \mathrm{V}_0\bar{f} \subset \mathcal{V}_0$. Le théorème 8.1.1 implique que $\mathcal{V}_1 = \mathcal{U}.f + \mathrm{V}_0 f$ est un voisinage de f. Si $\mathcal{U}$ est assez petit, on peut supposer (9.2.3) que $(\mathcal{U}.f) \cap (f + \mathrm{V}_0\bar{f}) = \{f\}$.

Soit V_1 un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^c$ tel que $\overline{\mathrm{V}_1} \subset \mathrm{V}_0$.

Si $g \in \mathcal{U}$, notons T_g l'ensemble des $f' \in (g.f + V_0 \bar{f})$ tels que $s_2^\lambda(f') \in V_1$ (en gardant les notations de 9.2.3).

Comme s_2 est de classe C^∞, que, par construction, la restriction de s_2^λ à T_e est l'application identique, si $\mathcal{U}$ est assez petit, la restriction de s_2^λ à T_g est un C^∞-difféomorphisme $T_g \to T_e$.

On pose

$$\left|\begin{array}{l} V = V_0, \\ \quad = \bigcup_{g \in \mathcal{U}} T_g, \\ \mathcal{W} = \mathcal{U}.f, \\ T(\lambda) = f + \lambda \bar{f} \qquad (\lambda \in V_0), \\ \Gamma_w(f') = s_1^2(f') \circ f \circ s_1^1(f') \qquad (f' \in \mathcal{V}), \\ \Gamma_\lambda(f') = s_2^\lambda(f') \qquad (f' \in \mathcal{V}), \\ \Gamma_g(f') = (s_2^1(f'), s_2^2(f')) \qquad (f' \in \mathcal{V}). \end{array}\right.$$

Cette construction et les propriétés de s_1 et s_2 (8.1.1) montrent alors immédiatement que l'axiome (SLC) est vérifié. ■

9.2.5. Remarque. — On pourrait demander, dans l'axiome SLC que $\Gamma_g(x)$ ne soit en fait qu'une fonction de $\Gamma_w(x)$. La représentation-produit $\mathcal{W} \times V \to \mathcal{V}$ serait alors définie par $(w, \lambda) \mapsto \Gamma_g(w).T(\lambda)$. La structure de (E, G) serait plus claire et plus simple au voisinage de x_0. On va montrer par un exemple simple que dans $C^\infty(M)$ on ne peut trouver une telle structure. Supposons $M = \mathbf{R}$ (le défaut de compacité n'a pas d'importance) et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Alors $f \in \mathcal{F}^1$, et une section transverse est définie par $T(\lambda) = x^3 + \lambda x$. On fait agir sur $C^\infty(\mathbf{R})$ le groupe $G = \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{R}) + \mathcal{C}(\mathbf{R})$, où $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ est le groupe des translations agissant au but (un autre difféomorphisme agit au but comme agissent simultanément un difféomorphisme à la source et une translation au but). Il est facile de voir que G agit fidèlement « au-dessous » $(\lambda \leq 0)$ de l'orbite de f, et que, par contre, le groupe d'isotropie d'un élément situé « au-dessus » de l'orbite $(\lambda > 0)$ n'est pas nul. Ce phénomène, variation non continue du groupe isotropie, interdit l'existence d'une structure comme envisagée ci-dessus.

9.2.6. La structure de la stratification « naturelle » décrite ci-dessus présente beaucoup de pathologie dès que la codimension n'est pas petite; *voir* à ce sujet Hendriks [11]. On peut définir d'autres stratifications, à la géométrie beaucoup plus intéressante (*cf.* Thom [32], Mather [18], [19]); mais ces dernières ont un rapport moins étroit avec l'action de Diff (source $\times$ Diff (but).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ABRAHAM and J. ROBBIN, *Transversal mappings and flows*, Benjamin, New York, 1967.

[2] P. ANTOINE, *Le théorème des fonctions implicites de Nash*, Département de Mathématiques, Lille (multigr.).

[3] V. I. ARNOLD, *Small denominators.* I : *Mappings of the circumference onto itself*, (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 2e série, vol. 46, 1965, p. 213-284).

[4] J. CERF, *Topologie de certains espaces de plongements* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 89, 1961, p. 227-380).

[5] J. CERF, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie* (*Publ. Math. de l'I. H. E. S.*, Bures-sur-Yvette, no 39, 1970).

[6] J. DIEUDONNÉ, *Fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[7] R. E. GREENE and Y. JACOBOWITZ, *Analytic isometric imbeddings* (*Ann. of Math.*, vol. 93, 1971, p. 189-204).

[8] R. S. HAMILTON, *Deformation of complex structures on pseudoconvex domains*, Cornell University, Ithaca, 1970 (multigr.).

[9] M. R. HERMAN, *Simplicité du groupe des difféomorphismes de classe* C^∞ *isotopes à l'identité, du tore de dimension n* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 273, série A, 1971, p. 232-234).

[10] M. R. HERMAN et F. SERGERAERT, *Sur un théorème d'Arnold et Kolmogorov*, (*C. R. Acad. Sc.*, t. 273, série A, 1971, p. 409-411).

[11] H. HENDRIKS, *La stratification « naturelle » de l'espace des fonctions différentiables réelles n'est pas la bonne* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 274, série A, 1972, p. 618-620).

[12] H. JACOBOWITZ, *Implicit function theorems and isometric embeddings* (*Ph. D. Dissertation at the Courant Institute*, à paraître aux *Ann. of Math.*).

[13] A. N. KOLMOGOROV, *General theory of dynamical systems and classical mechanics* (*Proc. Int. Cong. Math. North. Holland*, Amsterdam, 1957, p. 287-331).

[14] G. LASSALLE, *Une démonstration du théorème de division pour les fonctions différentiables*, Département de Mathématiques, Université de Paris-Sud, 91-Orsay (à paraître dans *Topology*). *Voir* aussi les Comptes rendus du Colloque international de Strasbourg, juin 1972.

[15] B. MALGRANGE, *Ideals of differentiable functions*, Oxford University Press, 1966.

[16] J. MATHER, *Stability of* C^∞ *mappings.* I. *The division theroem* (*Ann. of Math.*, vol. 87, 1968, p. 89-104).

[17] J. MATHER, *Stability of* C^∞ *mappings* II. *Infinitesimal stability implies stability* (*Ann. of Math.*, vol. 89, 1969, p. 254-291).

[18] J. MATHER, *Notes on topological stability*, Harvard University, 1970 (multigr.).

[19] J. MATHER, *Stratification and mappings*, Harvard University, 1971 (multigr.).

[20] J. MOSER, *A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations* (*Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, vol. 47, 1961, p. 1824-1831).

[21] J. MOSER, *A rapidly convergent iteraction method and nonlinear partial differential equations* (*Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa*, vol. 20, 1966, I : p. 265-315, I : p. 499-533.

[22] J. NASH, *The imbedding problem for riemannian manifolds* (*Ann. of Math.*, vol. 63, 1956, p. 20-63).

[23] K. SAITO, *Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflachen* (*Inv. Math.*, vol. 14, 1971, p. 123-142).

[24] J. T. SCHWARTZ, *On Nash's implicit functional theorem* (*Comm. Pure and Appl. Math.*, vol. XIII, 1960, p. 509-530).

[25] J. T. SCHWARTZ, *Nonlinear functional analysis*, Courant Institute of Math. Science, New York University, 1965 (multigr.).
[26] R. T. SEELEY, *Extension of* C^∞ *functions defined in a half space* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 15, 1964, p. 625-626).
[27] F. SERGERAERT, *Une généralisation du théorème des fonctions implicites de Nash* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 270, série A, 1970, p. 861-863).
[28] F. SERGERAERT, *Deux théorèmes de stabilité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 271, série A, 1970, p. 453-456).
[29] D. SIERSMA, *Singularities of codimension* $\leqq 8$, University of Amsterdam, 1972, (multigr.).
[30] S. STERNBERG, *Celestial mechanics*, Part II, Benjamin, New York, 1969.
[31] R. THOM, *Ensembles et morphismes stratifiés* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 75, 1969, p. 240-284).
[32] R. THOM, *Modèles mathématiques de la morphogenèse*, chap. 3, I. H. E. S., Bures-sur-Yvette, 1971 (multig.).

(Manuscrit reçu le 23 août 1972.)

Francis SERGERAERT,
Département
de Mathématiques,
40, avenue du Recteur-Pineau,
86000 Poitiers.