Université de Grenoble
M1 – Processus stochastiques
2013-2014

Feuille de TD n° 1
Conditionnement discret

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $S = X + Y$. Calculer la loi conditionnelle de X (ainsi que son espérance) sachant $S = s$ dans les cas suivants :

1. X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ ;
2. X et Y suivent des lois géométriques sur $\mathbb{N}$ de même paramètre p ;
3. X et Y suivent des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p).

Exercice 2

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements de probabilités $\mathbb{P}(A_i) > 0$ constituant une partition de Ω et $\mathcal{A}$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par ces événements.

1. Montrer que
$$\mathcal{A} = \{\bigcup_{i\in J} A_i \text{ t.q. } J \in \mathcal{P}(I)\} .$$
2. Soit X une fonction définie sur Ω et à valeurs dans un espace mesuré muni d'une tribu $\mathcal{E}$ séparant les points. Montrer que X est $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$-mesurable si et seulement si elle est constante sur chacun des événements A_i.
3. On note, pour tout $i \in I$ et toute variable aléatoire réelle X positive ou bornée, $\mathbb{E}(X|A_i)$ l'espérance de X pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot|A_i)$. Montrer que
$$\mathbb{E}(X|A_i) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{A_i})}{\mathbb{P}(A_i)} . \tag{1}$$
En déduire que toute variable aléatoire réelle intégrable X est intégrable pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot|A_i)$ et que son espérance pour cette probabilité est donnée par la formule (1).
4. On définit, pour toute variable aléatoire réelle intégrable X définie sur Ω, une variable aléatoire réelle $\tilde{X}$ par
$$\tilde{X} = \sum_{i\in I} \mathbb{E}(X|A_i)\mathbf{1}_{A_i} .$$
Montrer que
(i) $\tilde{X}$ est $\mathcal{A}$-mesurable et intégrable,
(ii) $\mathbb{E}(\tilde{X}\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_A)$ pour tout évenement $A \in \mathcal{A}$,
(ii') $\mathbb{E}(\tilde{X}\,Y) = \mathbb{E}(X\,Y)$ pour toute variable aléatoire Y $\mathcal{A}$-mesurable bornée.

5. Montrer que les relations (i) et (ii) (resp. (i) et (ii')) caractérisent $\tilde{X}$. On notera $\tilde{X} = \mathbb{E}(X|\mathcal{A})$: c'est l'espérance conditionnelle sachant la tribu $\mathcal{A}$.
6. Montre que si Z est une variable aléatoire bornée et $\mathcal{A}$-mesurable, et X une variable aléatoire réelle intégrable,

$$\mathbb{E}(ZX|\mathcal{A}) = Z\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) \ ,$$

et que si Z est une variable aléatoire intégrable et indépendante de $\mathcal{A}$,

$$\mathbb{E}(Z|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(Z) \ .$$

7. On suppose que X est de carré intégrable. Montrer que :

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{A}))^2] = \min_{\substack{X' \ \mathcal{A}-\text{mesurable} \\ \mathbb{E}(X'^2)<\infty}} \mathbb{E}[(X - X')^2] \ ,$$

et que ce problème de minimisation caractérise $\mathbb{E}(X|\mathcal{A})$.
8. On suppose que chacun des événements A_i est réunion disjointe de deux événements A_i' et A_i'' de probabilités strictement positives. On note $\mathcal{A}'$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par la partition $(A_i', A_i'')_{i\in I}$. Comparer les tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$. Montrer que $\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{A}')|\mathcal{A}]$.
9. On considère dans cette question $\Omega = [0, 1[$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{F}$ et de la mesure de Lebesgue $\mathbb{P}$. Expliciter $\mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ si X est une fonction intégrable sur $[0, 1[$ et $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par une partition finie de $[0, 1[$ en intervalles. Plus particulièrement, que peut-on dire de la suite $(\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_n])_{n\in\mathcal{N}}$ si X est une fonction continue sur $[0, 1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n$ la tribu engendrée par les intervalles $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[$ $(1 \leq k \leq 2^n)$?
10. On revient au cas général. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans I, muni de la tribu discrète, telle que pour tout $i \in I$, A_i soit l'événement $\{Z = i\}$. Montrer qu'il existe une fonction mesurable f de I dans $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = f(Z)$. Cette fonction est-elle unique ?
11. Montrer que dans ce cas $\tilde{X} = \mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ est caractérisée par les deux propriétés suivantes :
    (a) $\tilde{X}$ est intégrable,
    (b) il existe une fonction mesurable f de I dans $\mathbb{R}$ telle que $\tilde{X} = f(Z)$;
    (c) pour toute fonction mesurable bornée g de I dans $\mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}[Xg(Z)] = \mathbb{E}[f(Z)g(Z)]$.

Université de Grenoble
M1 – Processus stochastiques
2013-2014

Feuille de TD n° 2
Espérance conditionnelle

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose $\mathbb{E}(X|Y) = Y$ et $\mathbb{E}(Y|X) = X$. Montrer que $X = Y$ p.s.

Exercice 4

Variance conditionnelle. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{A}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Pour toute variable aléatoire $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on définit la variance conditionnelle $\mathsf{Var}(X|\mathcal{A})$ par :

$$\mathsf{Var}(X|\mathcal{A}) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{A}])^2|\mathcal{A}\right] \ .$$

1. Montrer que $\mathsf{Var}(X|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(X^2|\mathcal{A}) - \mathbb{E}\left(X|\mathcal{A}\right)^2$.
   En particulier, $\mathbb{E}\left(X|\mathcal{A}\right)^2 \leq \mathbb{E}(X^2|\mathcal{A})$.
2. Montrer que $\mathsf{Var}(X) = \mathbb{E}\left[\mathsf{Var}(X|\mathcal{A})\right] + \mathsf{Var}\left[\mathbb{E}(X|\mathcal{A})\right]$.
   En particulier, $\mathsf{Var}\left[\mathbb{E}(X|\mathcal{A})\right] \leq \mathsf{Var}(X)$. Discuter le cas d'égalité.

Exercice 5

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire réelle intégrable définie sur cet espace et $\mathcal{A}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

1. On suppose dans cette question les tribus $\sigma(X)$ et $\mathcal{A}$ indépendantes. Que peut-on dire de $\mathbb{E}(X|\mathcal{A})$?
2. On suppose dans cette question que X suit une loi de Bernoulli et que $\mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ est constante. Montrer que les tribus $\sigma(X)$ et $\mathcal{A}$ sont indépendantes. Généraliser au cas où X est une variable aléatoire réelle ne prenant que deux valeurs.
3. On revient au cas général. Si la v.a $\mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ est constante, peut-on en déduire que les tribus $\sigma(X)$ et $\mathcal{A}$ sont indépendantes ?

Exercice 6

Prédiction linéaire. Soit $(X_1, \ldots, X_n, Y)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$, de carré intégrable. Si on observe $(X_1, \ldots, X_n)$ avant Y, la meilleure prédiction, au sens L^2, de Y est l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[Y|X_1, \ldots, X_n]$. C'est une fonction de $(X_1, \ldots, X_n)$ dont la détermination est parfois compliquée et fait appel à la connaissance de la loi conjointe de tout le vecteur $(X_1, \ldots, X_n, Y)$. On peut se poser une question plus simple : quelle est la meilleure approximation, au sens L^2, de Y par une fonction *linéaire* de $(X_1, \ldots, X_n)$? Dans la suite, on note Γ_X la matrice dont le coefficient d'indices (i, j) est $\mathbb{E}[X_i X_j]$.

1. Prouver le résultat suivant qui montre en particulier que la réponse dépend uniquement de la matrice Γ_X et des $\mathbb{E}(YX_i)$, $1 \leq i \leq n$.

   PROPOSITION 1 (PRÉDICTION LINÉAIRE) *Il existe une unique v.a Y^* solution de :*

   $$Y^* \in Vect(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[(Y - Y^*)^2] = \min_{Y' \in Vect(X_1,\ldots,X_n)} \mathbb{E}[(Y - Y')^2] \ . \quad (2)$$

   On l'appelle le meilleur prédicteur linéaire de Y sachant $X_1, \ldots, X_n$ et on le note $P(Y|X_1, \ldots, X_n)$. De plus, (2) est équivalente à :

   $$Y^* \in Vect(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad \forall j = 1, \ldots, n, \quad \mathbb{E}(YX_j) = \mathbb{E}(Y^*X_j) \ .$$

   Enfin, pour tout vecteur ligne $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{R}^n$,

   $$P(Y|X_1, \ldots, X_n) = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n \Longleftrightarrow \alpha\Gamma_X = (\mathbb{E}(YX_1), \ldots, \mathbb{E}(YX_n)) \ .$$

   De plus, si $Y^* = P(Y|X_1, \ldots, X_n) = \alpha_1^* X_1 + \ldots + \alpha_n^* X_n$,

   $$\mathbb{E}[(Y - Y^*)^2] = \mathbb{E}[Y^2] - (\alpha^*)^{\mathrm{T}} \Gamma_X \alpha^* \ .$$

2. On suppose désormais que Y est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Généraliser la proposition 1.

EXERCICE 7

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$: $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$ pour tout $i \geq 1$, et N une v.a intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de la suite $(X_i)_{i\geq 1}$. On note g la fonction génératrice de N, λ son espérance et, pour tout $n \geq 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ (en particulier, pour $n = 0$, $S_0 = 0$). On définit une v.a S_N à valeurs dans $\mathbb{N}$ par

$$S_N(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega) \ .$$

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(S_N \mid N)$ et $\mathbb{E}(S_N)$.
2. Exprimer la fonction génératrice h de S_N en fonction de g et de p.
3. On suppose dans cette question que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $\mathbb{P}(N = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Expliciter h. Montrer que S_N et $N - S_N$ sont indépendantes. Préciser leurs lois.
4. On suppose dans cette question que S_N et $N - S_N$ sont indépendantes et on définit une fonction G sur $[0, 1] \times [0, 1]$ par :

   $$G(s, t) = \mathbb{E}(s^{S_N} t^{N-S_N}) \qquad (0 \leq s, t \leq 1) \ .$$

   (a) Exprimer de deux manières $G(s, t)$ en fonction de g, p, s, t.

   (b) En dérivant la relation obtenue, trouver une équation différentielle vérifiée par g. En déduire que N suit une loi de Poisson.

Université de Grenoble
M1 – Processus stochastiques
2013-2014

Feuille de TD n° 3
Lois conditionnelles

Exercice 8

On considère $(X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d et on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 0|S_n)$ lorsque les X_i sont de loi de Poisson de paramètre θ.
2. Calculer $\mathbb{P}(X_1 \leq t|S_n)$ lorsque les X_i sont de loi exponentielle de paramètre θ et $n \geq 2$.

Exercice 9

On considère (X, Y) un couple de variables aléatoires où X est de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et pour $a \in \{0, 1\}$, la loi de Y sachant $X = a$ est une gaussienne de moyenne m_a et de variance σ_a^2. Décrire la loi du couple (X, Y), la loi de Y et la loi conditionnelle de X sachant Y.

Exercice 10

Loi conditionnelle dans un espace gaussien. Rappelons qu'un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est gaussien si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\langle \lambda, X \rangle$ a une loi gaussienne[1]. De plus, si X est gaussien et si I et J sont deux sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$, les processus $(X_i)_{i \in I}$ et $(X_j)_{j \in J}$ sont indépendants si et seulement si les covariances $\mathsf{Cov}(X_i, X_j)$ sont nulles pour tous $i \in I$ et $j \in J$.

1. Montrer que l'espérance conditionnelle de $(X_j)_{j \in J}$ sachant $(X_i)_{i \in I}$ est le meilleur prédicteur linéaire de $(X_j)_{j \in J}$ sachant $(1, (X_i)_{i \in I})$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de $(X_j)_{j \in J}$ sachant $(X_i)_{i \in I}$.
3. **Application.** On suppose que X est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance :
$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calculer $\mathbb{E}(X_3^2|X_1, X_2)$.

1. Ainsi l'espace vectoriel engendré par les coordonnées de X est composé de v.a gaussiennes, c'est le prototype de ce qu'on appelle un *espace gaussien* : un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ constitué de variables aléatoires gaussiennes.

Exercice 11

On considère (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$. On suppose que Y admet une loi conditionnelle sachant X, notée $(\nu(x, .))_{x \in \mathcal{X}}$. On suppose également que pour tout $x \in \mathcal{X}$, $\nu(x, .)$ admet une densité f_x par rapport à une mesure de référence μ σ-finie, et que la fonction qui à (x, y) associe $f_x(y)$ est mesurable pour la tribu produit sur $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

1. Montrer que X admet une loi conditionnelle sachant Y et la décrire.
2. **Application.** On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, que la loi de Y sachant $X = 0$ est la loi géométrique de paramètre p, et la loi de Y sachant $X = 1$ est la loi normale centrée réduite. Décrire la loi de (X, Y), la loi de Y et la loi conditionnelle de X sachant Y.

Exercice 12

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi de densité f et $Z = \sup(X, Y)$.

1. Le couple (X, Z) admet-il une densité sur $\mathbb{R}^2$? Expliciter la loi de ce couple.
2. Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $Z = z$ est $\frac{1}{2}\delta_z(dx) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{x<z}\frac{f(x)}{F(z)}\,dx$ pour $F(z) > 0$ (cette loi pouvant être choisie arbitrairement si $F(z) = 0$), où F est la fonction de répartition de X et Y.

Université de Grenoble
M1 – Processus stochastiques
2013-2014

Feuille de TD n° 4

Filtrations, temps d'arrêt, martingales

Exercice 13

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ définie sur cet espace.

1. On considère les deux propriétés :
   (a) pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'événement $\{T > n\}$ appartient à $\mathcal{F}_n$;
   (b) T est un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

   Ces deux propriétés sont-elles équivalentes ? L'une implique-t-elle l'autre ?
2. Mêmes questions en remplaçant $\{T > n\}$ par $\{T \geq n\}$.

Exercice 14

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, et T un temps d'arrêt fini de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Montrer qu'une variable aléatoire X est $\mathcal{F}_T$-mesurable si et seulement si $X\mathbf{1}_{T=n}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, S et T deux temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que les événements $\{S \leq T\}$, $\{S < T\}$ et $\{S = T\}$ appartiennent à $\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.
2. Montrer que $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.

Exercice 16

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus intégrable adapté à cette filtration. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$;
2. $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout temps d'arrêt borné T de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$;
3. $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout temps d'arrêt T de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ prenant au plus deux valeurs.

Donner un exemple de processus adapté vérifiant $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout $n \geq 0$ qui n'est pas une martingale.

Exercice 17

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, $(M_n)_{n\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale, N un entier positif, $A \in \mathcal{F}_N$ un événement de probabilité $\mathbb{P}(A) > 0$. Montrer que le processus $(M_{N+n})_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_{N+n})_{n\geq 0}$-martingale pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot|A)$.

Exercice 18

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite indépendante de variables aléatoires de même loi

$$\mathbb{P}(X_k = 0) = \mathbb{P}(X_k = 2) = 1/2 \ .$$

On définit une suite $(M_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires par $M_n = \prod_{k=1}^n X_k$ (en particulier $M_0 = 1$).

1. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.
2. Expliciter la loi de M_n pour tout $n \geq 0$.
3. On définit une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par

   $$T = \inf\{n \text{ s.t. } X_n = 0\} = \inf\{n \text{ s.t. } M_n = 0\} \ .$$

   Montrer que T est un temps d'arrêt presque sûrement fini de la filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n\geq 0}$. Expliciter sa loi.
4. La martingale $(M_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle dans L^1 ?

Exercice 19

Un système qui permet de gagner à tous les coups. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées de loi $\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$: $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$ pour tout n. On définit une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par $T = \inf\{n \text{ s.t. } X_n = 1\}$ et on pose, pour tout $n \geq 0$, $M_n = \sum_{k=1}^n X_k$ (M_n représente donc le cumul des gains et des pertes dans une suite de n parties où l'on a à chaque fois autant de chances de gagner que de perdre) et, pour tout $n \geq 1$, $H_n = 2^{n-1}\mathbf{1}_{n\leq T}$.

1. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n^X)$-martingale, $(H_n)_{n\geq 1}$ une suite $(\mathcal{F}_n^X)$-prévisible, T un temps d'arrêt presque sûrement fini de la filtration $(\mathcal{F}_n^X)$. Déterminer la loi et l'espérance de T.
2. On définit une suite $((H \cdot M)_n)_{n\geq 0}$ par

   $$(H \cdot M)_n = \sum_{k=1}^n H_k(M_k - M_{k-1}) = \sum_{k=1}^n H_k X_k \ .$$

   Cette suite décrit donc le cumul des gains et des pertes d'un joueur qui double sa mise à chaque partie tant qu'il perd, et qui s'arrête de jouer dès qu'il a gagné une partie).

   Montrer que la suite $((H \cdot M)_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n^X)$-martingale. Exprimer $(H \cdot M)_n$ en fonction des X_k et de T, puis de T seulement. En déduire que la suite $((H \cdot M)_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers une limite que l'on précisera. Cette suite converge-t-elle dans L^1 ?

Université de Grenoble
M1 – Processus stochastiques
2013-2014

Feuille de TD n° 5

Martingales (suite)

Exercice 20

Jeu équitable. Deux joueurs jouent à un jeu équitable. On note R_n le résultat de la n-ème partie pour le premier joueur. On suppose que les R_n sont i.i.d et valent 1 ou -1 avec probabilité 1/2. On note $a \in \mathbb{N}$ la fortune initiale du joueur, $b \in \mathbb{N}^*$ celle de son adversaire et X_n la fortune du premier jouer après la n-ème partie. Pour tout $n \geq 1$, on a donc :

$$X_n = a + \sum_{i=1}^{n} R_i \ .$$

On note $I_n = (R_1 \ldots, R_n)$. La partie se termine lorsque l'un des deux joueurs est ruiné, on définit donc :

$$T = \min\{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } X_n = 0 \text{ ou } X_n = a + b\} \ .$$

Le but de l'exercice est d'étudier la loi de T.

1. Montrer que (X_n) est une martingale et que T est un temps d'arrêt relativement à I_n.
2. En utilisant :
$$\mathbb{P}(T > n) \leq \mathbb{P}(0 < X_n < a + b) \ ,$$
et le théorème de la limite centrale, montrer que T est presque sûrement fini.
3. Montrer que :
$$\mathbb{P}(X_T = a + b) = \frac{a}{a+b} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_T = 0) = \frac{b}{a+b} \ .$$
4. Montrer que (X_n) est de carré intégrable et calculer sa variation quadratique. En déduire que $(X_n^2 - n)$ est une martingale, puis que $\mathbb{E}[T] = ab$.
5. Observons que pour tout réel λ :
$$\mathbb{E}[e^{\lambda R_n}] = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} = \cosh(\lambda) \ .$$
Pour tout $n \geq 0$, on pose :
$$Y_n(\lambda) = \frac{\exp(\lambda X_n)}{(\cosh(\lambda))^n} \ .$$
Montrer que $(Y_n(\lambda))$ est une martingale.
6. En déduire que :
$$\mathbb{E}[(\cosh(\lambda))^{-T}(\mathbf{1}_0(X_T) + e^{\lambda(a+b)}\mathbf{1}_{a+b}(X_T))] = e^{\lambda a} \ .$$
et :
$$\mathbb{E}[(\cosh(\lambda))^{-T}(\mathbf{1}_0(X_T) + e^{-\lambda(a+b)}\mathbf{1}_{a+b}(X_T))] = e^{-\lambda a} \ .$$

7. En remarquant que $\mathbf{1}_0(X_T) + \mathbf{1}_{a+b}(X_T) = 1$, montrer que :

$$\mathbb{E}[(\cosh(\lambda))^{-T}] = \frac{\sinh(\lambda a) + \sinh(\lambda b)}{\sinh(\lambda(a+b))} .$$

Pour tout $\lambda \geq 0$, on pose :

$$z = \frac{1}{\cosh(\lambda)} ,$$

de sorte que :

$$\mathbb{E}[(\cosh(\lambda))^{-T}] = \mathbb{E}(z^T) =: g(z) .$$

8. Pour $a = b = 1$, vérifier que $g(z) = z$. Pourquoi ?
9. Pour $a = 2$, $b = 1$, vérifier que $g(z) = \frac{z}{2-z}$, donc que T suit la loi géométrique de paramètre $1/2$. Pourquoi ?
10. Pour $a = 2$, $b = 2$, vérifier que $g(z) = \frac{z^2}{2-z^2}$, donc que $T/2$ suit la loi géométrique de paramètre $1/2$. Pourquoi ?
11. Pour $a = 3, b = 1$, vérifier que $g(z) = \frac{z}{2-z^2}$, donc que $(T+1)/2$ suit la loi géométrique de paramètre $1/2$. Pourquoi ?

Exercice 21

Processus de Galton-Watson. Les processus de Galton-Watson sont des modèles d'arbres aléatoires généalogiques[2]. L'arbre en question est un arbre enraciné (et étiqueté) et sa loi dépend d'un paramètre μ qui est une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ et qui représente la *loi de reproduction*. La racine correspond à l'ancêtre de la population. L'ancêtre se reproduit : il a k enfants avec probabilité $\mu(k)$, puis meurt. Par la suite, chaque enfant se reproduit indépendamment des autres enfants et de ses parents, puis meurt. Ce processus se poursuit indéfiniment ou jusqu'à ce que la population s'éteigne. Le terme "processus de Galton-Watson" fait référence en général à la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 0}$ où Z_n *est la taille de la n-ème génération*. Il peut également faire référence à la suite d'arbres $(\mathcal{T}_n)$ où $\mathcal{T}_n$ est l'arbre généalogique jusqu'à la n-ème génération. Formellement, on se donne $(L_i^{(n)})_{i\geq 1, n\geq 0}$ des v.a i.i.d de loi μ et on pose :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} L_i^{(n)}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

On supposera toujours que la loi de repoduction μ est de moyenne c finie, et aussi que $\mu(\{1\}) \neq 1$ pour exclure le cas trivial où l'arbre de Galton-Watson est isomorphe à $\mathbb{N}$ de manière déterministe. L'*arbre de Galton-Watson*, $\mathcal{T} = \cup_n \mathcal{T}_n$ peut être soit fini, on dit que la population s'est éteinte, et ceci arrive lorsque Z_n atteint 0, soit infini[3]. Notons enfin que la donnée de l'arbre de Galton-Watson permet de retrouver le processus de Galton-Watson. Quelques questions viennent rapidement à l'esprit : peut-on déterminer la probabilité que la population s'éteigne ? Quelle est la taille de l'arbre lorsque la population s'éteint ? Quelle est la taille de l'arbre jusqu'à la génération n lorsque la population ne s'éteint pas ?

2. Ils ont été introduits par Sir Francis Galton et le révérend Henry Williamson Watson en 1874. Leur but était d'étudier sous un angle statistique la disparition des patronymes des lignées aristocratiques.

3. On verra plus tard que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une *chaîne de Markov* à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec 0 comme unique état absorbant.

1. Montrer que la taille moyenne de la n-ème génération Z_n vaut :

$$\mathbb{E}(Z_n) = c^n \ .$$

En déduire que la taille totale de l'arbre de Galton-Watson a une espérance finie si et seulement si $c < 1$, auquel cas :

$$\mathbb{E}(|\mathcal{T}|) = \frac{1}{1-c} \ ,$$

et la population s'éteint nécessairement.

2. Il est très utile d'introduire f, la fonction génératrice de la loi μ :

$$f(z) = \mathbb{E}[z^{Z_1}] = \mathbb{E}[z^{L_1^{(1)}}] \ .$$

On note $f^{(n)}$ la n-ième composée de f. Montrer que :

$$\mathbb{E}[z^{Z_n}] = f^{(n)}(z) \ .$$

3. En déduire que la probabilité d'extinction est donnée par :

$$q = \lim_{n\infty} f^{(n)}(0) \ ,$$

que q est la plus petite racine de l'équation $f(z) = z$ dans $[0, 1]$, et que :

$$q = 1 \Leftrightarrow c \leq 1 \ .$$

Ainsi, la population s'éteint (p.s.) si et seulement si $c \leq 1$, et notamment dans le cas "critique" $c = 1$, où la taille de l'arbre est pourtant d'espérance infinie.

4. Montrer que f est convexe et finie sur $[0, 1]$ et faire un dessin faisant apparaître la probabilité d'extinction q.
5. On suppose désormais que $c > 0$, et on note $M_n = Z_n/c^n$. Montrer que M_n est une martingale, et en déduire que M_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire que l'on notera W. Que vaut W si $c \leq 1$?
6. Montrer que $\mathbb{P}(W = 0) \leq f(\mathbb{P}(W = 0))$, et en déduire que $\mathbb{P}(W = 0) \in \{q, 1\}$.
7. On suppose que Z_1 est de carré intégrable et $c > 1$. Montrer que $\mathbb{P}(W = 0) = q$. Interpréter.
8. On suppose dans la suite que $c \leq 1$ (cas critique et sous-critique). On note $h(s) = \mathbb{E}(s^{|\mathcal{T}|})$ la fonction génératrice de la taille de l'arbre généalogique. Montrer, en conditionnant par rapport à la taille Z_1 de la génération à l'instant 1, que pour tout $s \in [0, 1]$, $h(s)$ vérifie :

$$h(s) = sf(h(s)) \ .$$

9. Montrer que pour tout $s \in [0, 1[$, l'équation $x = sf(x)$ admet une unique solution dans $[0, 1[$.
10. Déterminer $h(s)$ dans le cas où la loi du nombre de descendants d'un individu est une loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}$: $\mu(k) = p(1-p)^k$ pour tout $k \geq 0$. Expliciter la loi de $|\mathcal{T}|$ dans le cas $p = 1/2$.

Exercice 22

Inégalité d'Azuma. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré où $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale $\{\emptyset, \Omega\}$, et $(M_n)_{n\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_n)$-martingale. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|M_{k+1} - M_k| \leq C$ pour tout $k \geq 0$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 0$ et tout réel λ, on a :
$$\mathbb{E}[e^{\lambda M_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k] = e^{\lambda M_k}\mathbb{E}[e^{\lambda(M_{k+1}-M_k)} \mid \mathcal{F}_k]\,.$$
2. Montrer, en utilisant la convexité de la fonction exponentielle, qu'on a, pour tout $y \in [-C, +C]$:
$$e^{\lambda y} \leq \frac{C-y}{2C}e^{-\lambda C} + \frac{C+y}{2C}e^{\lambda C}\,.$$
3. En déduire que pour tout $k \geq 0$ et tout réel λ, on a :
$$\mathbb{E}[e^{\lambda M_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k] \leq e^{\lambda M_k}\cosh(\lambda C)\,.$$
4. Montrer, en utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle, que $\cosh(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$ pour tout réel x.
5. En déduire que pour tout $n \geq 0$ et tout réel λ, on a :
$$\mathbb{E}[e^{\lambda M_n}] \leq e^{\lambda \mathbb{E}(M_n)}e^{\frac{n\lambda^2 C^2}{2}}\,.$$
6. En déduire que pour tout réel $t \geq 0$ on a :
$$\mathbb{P}(M_n - \mathbb{E}(M_n) > t) \leq e^{-\frac{t^2}{2nC^2}}\,.$$

Exercice 23

Un processus autorégressif. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ définie par la relation de récurrence suivante : X_0 suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et pour $n \geq 1$,
$$X_n = aX_{n-1} + \varepsilon_n\,,$$
où a est un paramètre réel et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$, indépendante de X_0. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

1. Montrer que :
$$X_n = a^n X_0 + a^{n-1}\varepsilon_1 + a^{n-2}\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n\,.$$
2. Quelle est la loi de $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$?
3. On suppose $|a| > 1$. Montrer que (X_n/a^n) est une martingale relativement à $(\mathcal{F}_n)$, bornée dans L^2. En déduire qu'elle converge presque sûrement et dans L^2 vers une variable aléatoire Z dont on déterminera la loi.
4. On suppose $|a| < 1$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0, (1-a^2)^{-1})$. On pose :
$$X'_n = a^n X_0 + \varepsilon_1 + a\varepsilon_2 + \ldots + a^{n-1}\varepsilon_n\,.$$
Montrer que X'_n est égal en loi à X'_n, puis que (X'_n) est une martingale relativement à $(\mathcal{F}_n)$, bornée dans L^2. En déduire qu'elle converge presque sûrement et dans L^2 vers une variable aléatoire Z' dont on déterminera la loi. (X_n) converge-t-elle presque sûrement ?

Université de Grenoble
M1 – Processus stochastiques
2013-2014

Feuille de TD n° 6
Chaînes de Markov

Exercice 24

Jeu de Penney. Soit $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables i.i.d de loi $\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b$ où a et b sont deux symboles distincts. On se donne un mot $s = (s_i)_{1\leq i\leq l}$ et on veut étudier le temps d'apparition T_s de s dans la suite ε :

$$T_s = \min\{n \geq l \text{ t.q. } \forall i = 1, \ldots, l,\ \varepsilon_{n-l+i} = s_i\}\ .$$

On définit pour cela une suite de variables aléatoires (X_n) qui compte la taille du plus long préfixe "en cours de lecture" : on pose $X_0 = 0$ et pour $n \geq 1$,

$$X_n = \max\{k \in \{1, \ldots, l\},\ \text{t.q. } \forall i = 1, \ldots, k,\ \varepsilon_{n-k+i} = s_i\}\ .$$

Si on note R_i le temps d'atteinte de i par X_n, alors $T_s = R_l$.

1. On suppose que $s = aa$.
   (a) Montrez que (X_n) est une chaîne de Markov, déterminez sa matrice de transition et représentez-la par un graphe orienté avec des poids sur les arêtes.
   (b) En faisant une disjonction sur le premier pas de la chaîne et en utilisant la propriété de Markov faible, trouver (et résoudre) un système linéaire dont les inconnues sont $\mathbb{E}_0(R_2)$ et $\mathbb{E}_1(R_2)$.
   (c) A l'aide de la même stratégie, donner une formule simple pour la fonction génératrice de T_{aa}.
2. On suppose désormais que $s = ab$.
   (a) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov, déterminez sa matrice de transition et représentez-la par un graphe orienté avec des poids sur les arêtes.
   (b) En considérant le premier temps d'atteinte de 1 par la chaîne, et en utilisant la propriété de Markov forte, montrer que T_{ab} est égal à la somme de deux variables aléatoires indépendantes, chacune étant de loi $\mathcal{G}(1/2)$.
   (c) Calculer $\mathbb{E}_0(R_2)$ et $\mathbb{E}_1(R_2)$. Commenter.

Exercice 25

Modèle génétique de Wright-Fisher. On étudie l'évolution au cours du temps d'une population de taille constante N constituée d'individus de deux types, A et B. Les types des individus de la $(n+1)$-ième génération sont obtenus par un tirage binomial dans la population de la génération précédente : s'il y a i individus de type A dans cette génération, le nombre d'individus de type A dans la $(n+1)$-ième génération suit la loi binomiale de paramètres N et i/N.

Pour modéliser cette évolution, on introduit une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états l'intervalle d'entiers $E = \{0, 1, \ldots, N\}$, l'état X_n du système à l'instant n étant le nombre d'individus de type A dans la n-ième génération. L'état initial X_0 est le nombre x d'individus de type A de la génération initiale, et la matrice de transition P est la matrice $(N+1) \times (N+1)$ de coefficients :

$$p(i,j) = \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j} \qquad 0 \leq i, j \leq N\,.$$

En particulier, les deux états 0 et N sont absorbants.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.
2. En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement. Montrer que sa limite X_∞ ne peut prendre que l'une des deux valeurs 0 ou N. Il en résulte que la population finit par se fixer sur l'un des deux types A ou B, l'autre type disparaissant complètement.
3. Déterminer $\mathbb{P}_x(X_\infty = 0)$ et $\mathbb{P}_x(X_\infty = N)$ pour tout $x \in E$, où $\mathbb{P}_x$ désigne la probabilité pour la chaîne de Markov d'état initial x.

Exercice 26

On considère N boules réparties entre deux urnes A_1 et A_2. À l'instant 0, toutes les boules sont dans l'urne A_1. À chaque instant $n \geq 1$, on tire une boule avec équiprobabilité parmi ces N boules et on la met dans l'urne A_1 avec probabilité p ou dans l'urne A_2 avec probabilité $1-p$, où $p \in]0,1[$ est un réel fixé, tous ces tirages et ces choix étant mutuellement indépendants. On note X_n le nombre de boules dans l'urne A_1 après n tirages, de sorte que $X_0 = N$.

1. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov d'espace d'états $\{0, 1, \ldots, N\}$ dont on écrira la matrice de transition.
2. Soit T la variable aléatoire égale au plus petit entier n tel que toutes les boules ont été tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages. Montrer que $\mathbb{P}(T > n) \leq N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$ pour tout entier n. En déduire que T est presque sûrement fini.
3. Montrer que la loi conditionnelle de X_n sachant $T \leq n$ ne dépend pas de n pour $n \geq N$. Expliciter cette loi conditionnelle, qu'on notera ν.
4. Montrer que ν est une probabilité stationnaire pour la chaîne de Markov (X_n).
5. Soit μ_n la loi de X_n. Montrer l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{N} |\mu_n(k) - \nu(k)| \leq \frac{2\,\mathbb{P}(T > n)}{\mathbb{P}(T \leq n)}$$

   pour tout $n \geq N$.
   En déduire que μ_n tend vers ν quand n tend vers l'infini.
6. Généraliser ce résultat au cas où les N boules sont réparties entre r urnes $A_1, \ldots, A_r$, la boule tirée étant placée à chaque tirage dans l'urne A_i avec la même probabilité p_i $(p_1 + \cdots + p_r = 1)$.

Université de Grenoble
M1 – Processus stochastiques
2013-2014

Feuille de TD n° 7
Chaînes de Markov (suite)

Exercice 27

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les lois de X_1 et de X_2 dans le cas où $X_0 = 2$, puis dans le cas où X_0 suit la loi uniforme sur $\{2, 3\}$.
2. Décomposer l'espace d'état en classes d'irréductibilité.
3. Déterminer les mesures sur E invariantes pour cette chaîne.

Exercice 28

On considère une chaîne de Markov dont l'espace des états est $\{1, \ldots, 6\}$ et la matrice de transition est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

On note $C = \{4, 5, 6\}$. Dans toute la suite, on suppose que la chaîne part d'un état x fixé :

$$\mathbb{P}(X_0 = x) = 1.$$

1. Décomposer l'espace d'états en classes irréductibles.
2. Montrer que la chaîne restreinte à C admet une unique loi invariante (μ_4, μ_5, μ_6).
3. Calculer la probabilité d'absorption par 1 et par C en partant de $x = 2$ et de $x = 3$.
4. Calculer le temps moyen d'absorption partant de 2 et de 3.

Exercice 29

On considère une chaîne de Markov (X_n) d'espace d'états $E = \{1, 2, 3\}$ et de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer l'espace d'états en classes irréductibles.
2. Déterminer une mesure de probabilité invariante. Dire si elle est unique et si elle est réversible.
3. Calculer pour tout $x \in E$ le temps moyen $\mathbb{E}_x(R_x)$ de retour en x.
4. Calculer la période de tout $x \in E$.

Exercice 30

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4\}$, d'état initial $X_0 = 1$ et de matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

1. Donner les lois de X_1 et de X_2.
2. Décomposer l'espace d'états en classes irréductibles.
3. Déterminer les probabilités sur E invariantes pour cette chaîne.

Exercice 31

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4\}$, d'état initial $X_0 = 1$ et de matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Donner les lois de X_1 et de X_2.
2. Décomposer l'espace d'états en classes irréductibles.
3. Déterminer les probabilités sur E invariantes pour cette chaîne.

Université de Grenoble
M1 – Processus stochastiques
2013-2014

Feuille de TD n° 8

Chaînes de Markov (suite et fin)

Exercice 32

Processus de naissance et de mort. Soit $(p_x, r_x, q_x)_{x\in\mathbb{N}}$ une famille de triplets de réels positifs vérifiant $p_x > 0$ et $r_x = 1 - p_x - q_x$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ et $q_x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$. On définit une matrice de transition P sur $\mathbb{N}$ par $P(x, x+1) = p_x$, $P(x, x-1) = q_x$ et $P(x, x = r_x)$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $P(0,1) = p_0$, $P(0,0) = r_0 = 1 - p_0$ et on considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrice de transition P.

1. Montrer que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible.
2. Déterminer une mesure positive réversible pour la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$. Quel est l'ensemble des mesures invariantes ?
3. Montrer qu'il existe une probabilité invariante pour cette chaîne si et seulement si :
$$\sum_{x=0}^{\infty} \prod_{y=0}^{x-1} \frac{p_y}{q_{y+1}} < +\infty \ .$$
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ soit récurrente positive. Examiner le cas particulier où $p_x = p$ ne dépend pas de x.
4. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vérifiant $(Pf)(x) = f(x)$ pour tout $x \geq 1$ (on pourra écrire une relation de récurrence reliant $f(x+1) - f(x)$ et $f(x) - f(x-1)$).
5. Soit f une fonction vérifiant la condition précédente et telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. On note, pour tout $a \in \mathbb{N}$, $T_a = \inf\{n \geq 0 \text{ t.q. } X_n = a\}$ le temps d'atteinte de a par la chaîne (X_n). Montrer que la suite $(f(X_{n\wedge T_0}))_{n\geq 0}$ est une martingale. Déterminer, pour $0 \leq a \leq x \leq b$, $\mathbb{P}_x(T_a < T_b)$ en fonction de $f(a)$, $f(b)$, $f(x)$ en utilisant cette martingale. Expliciter cette valeur dans le cas où $p_x = p$ ne dépend pas de x et $r_x = 0$.
6. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne (X_n) soit récurrente.

Exercice 33

Mesures invariantes pour la marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$. Soit $p \in]0,1[$ différent de $1/2$. On définit une matrice de transition P sur $\mathbb{Z}$ par $P(x, x+1) = p$, $P(x, x-1) = q = 1 - p$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et on considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrice de transition P. Déterminer les mesures invariantes par P.

Exercice 34

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible récurrente positive d'espace d'états E, de matrice de transition P et π l'unique probabilité invariante.

1. Soit $x \in E$, $T \geq 1$ un temps d'arrêt $\mathbb{P}_x$-intégrable de la filtration $\mathcal{F}^X$ tel que $\mathbb{P}_x(X_T = x) = 1$.
   (a) Montrer que pour tout $y \in E$, $\mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{T-1} \mathbf{1}_y(X_k)\right) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{T-1} \mathbf{1}_y(X_{k+1})\right)$.
   (b) Montrer que pour tout $k \geq 0$, on a
   $$\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_y(X_{k+1})\mathbf{1}_{k<T}\right) = \sum_{z\in E} \mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_z(X_k)\mathbf{1}_{k<T}\right) P(z,y) \ .$$
   (c) En déduire que la mesure ν sur E définie par $\nu(y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{T-1} \mathbf{1}_y(X_k)\right)$ est invariante pour la chaîne de Markov (X_n).
2. En déduire que pour tout état $y \in E$ on a :
   $$\mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{T-1} \mathbf{1}_y(X_k)\right) = \pi(y)\mathbb{E}_x(T) \ .$$
3. Application : Soient x et y deux états distincts. Montrer que l'espérance sous $\mathbb{P}_x$ du nombre de visites $N_x^y = \sum_{k=0}^{T_y} \mathbf{1}_x(X_k)$ en x avant d'atteindre y est égale à $\pi(x)[\mathbb{E}_x(T_y)+\mathbb{E}_y(T_x)]$ (on pourra introduire le temps T de premier retour en x après le premier passage en y).
4. En déduire que :
   $$\mathbb{P}_x(T_y < R_x) = \frac{1}{\pi(x)[\mathbb{E}_x(T_y) + \mathbb{E}_y(T_x)]}$$
   où R_x est le premier temps de retour en x (on commencera par étudier la loi de N_x^y sous $\mathbb{P}_x$).

Exercice 35

Marche aléatoire sur un graphe. On appelle *graphe fini* un couple (V, E) formé d'un ensemble fini V et d'une partie E de l'ensemble des parties à un ou deux éléments de V. Les éléments de V sont appelés *sommets* et les éléments de E *arêtes* du graphe (lorsqu'une arête a un seul élément x, il s'agit d'une boucle). Deux sommets x et y du graphe sont dits *voisins* s'ils sont reliés par une arête, i.e. si $\{x, y\}$ appartient à E. Le *degré* $d(x)$ d'un sommet x est le nombre de sommets voisins de x. On notera $x \sim y$ si x et y sont voisins.

On se donne une matrice $c = (c(x, y))_{x,y\in V}$ de poids symétriques ($c(x, y) = c(y, x)$) et positifs ou nuls vérifiant $c(x, y) > 0$ si et seulement si x et y sont voisins. Une matrice vérifiant cette propriété est la *matrice d'adjacence* A du graphe dont les coefficients $a(x, y)$ valent 1 si x et y sont voisins et 0 sinon.

Dans la suite, on suppose que $G = (V, E)$ est un graphe sans sommet isolé. On définit une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états V associée à c de la façon suivante : si la chaîne est en $x \in V$ à l'instant n, elle se trouvera à l'instant $n + 1$ en un des voisins y de x avec probabilité proportionnelle au poids $c(x, y)$ de l'arête $\{x, y\}$. On note :
$$\pi(x) = \sum_{y\sim x} c(x, y) \ .$$

La matrice de transition P de cette chaîne est donc donnée par :

$$P(x,y) = \frac{c(x,y)}{\pi(x)} \ .$$

La chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrice de transition P est appelée *marche aléatoire sur le graphe G de conductances c.*[4] Lorsque $c = A$, on parle de *marche aléatoire simple sur le graphe G.*

Étant donnés deux sommets x et y d'un graphe, on appelle *chemin de longueur n* reliant x à y toute suite $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de sommets (non nécessairement distincts) telle que $x_0 = x$, $x_n = y$ et que x_{k-1} et x_k soient voisins pour tout $k = 1, \ldots, n$. Le graphe est dit *connexe* si, pour tout couple (x,y) de sommets, il existe un chemin reliant x à y.

1. Montrer que le coefficient $a^{(n)}(x,y)$ de A^n est égal au nombre de chemins de longueur n reliant x à y.
2. Montrer que toute chaîne de Markov homogène réversible sur V peut être représentée par un graphe (V,E) et une matrice c comme ci-dessus.
3. Décrire les classes d'irréductibilité de la chaîne de Markov. La chaîne est-elle périodique ?
4. Montrer que π est une mesure invariante pour la chaîne de Markov et en déduire une mesure de probabilité invariante $\tilde{\pi}$. Montrer que si le graphe est connexe, cette loi invariante est unique.
5. Montrer que P est reliée à la matrice c des conductances par la relation $P = D^{-1}c$, où D est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d(x,x) = \pi(x)$. En considérant la matrice $S = D^{1/2}PD^{-1/2}$, montrer que P est diagonalisable à valeurs propres réelles. Si μ_0 est la loi initiale de la chaîne, en déduire une expression de $\|\mu_0 P^n - \tilde{\pi}\|_2^2$ faisant intervenir la décomposition de μ_0 sur la base des vecteurs propres à gauche de P et les valeurs propres de P.

Exercice 36

Chaînes de Markov satisfaisant à la condition de Doeblin Soit E un ensemble fini ou dénombrable, P une matrice de transition sur E, ν une probabilité sur E et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur E de matrice de transition P. On suppose vérifiée la propriété suivante :

(H) il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $P(x,y) \geq \varepsilon\nu(y)$ pour tout couple (x,y) d'éléments de E.

1. (a) Montrer que $\varepsilon \leq 1$.
   (b) Donner la loi de X_n pour $n \geq 1$ si $\varepsilon = 1$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans ce cas indépendante.

   On suppose désormais $0 < \varepsilon < 1$.
2. Montrer que la matrice R définie par :

$$R(x,y) = \frac{P(x,y) - \varepsilon\nu(y)}{1-\varepsilon} \quad \text{pour tout } (x,y) \in E \times E$$

   est une matrice de transition sur E.

4. Il y a en effet une interprétation de cette chaîne en termes de réseau électrique de conductances.

3. On définit, pour tout couple $(\mu_1,\, \mu_2)$ de probabilités sur E, un réel $d(\mu_1,\, \mu_2)$ par :

$$d(\mu_1,\, \mu_2) = \sum_{x\in E} |\mu_1(x) - \mu_2(x)| \ .$$

   (a) Montrer que d est une distance sur l'ensemble des lois de probabilité sur E.

   (b) Montrer que pour toute matrice de transition Q sur E, on a :

$$d(\mu_1 Q, \mu_2 Q) \leq d(\mu_1, \mu_2) \ .$$

4. (a) Montrer que, pour tout couple (μ_1, μ_2) de probabilités sur E et tout $x \in E$, on a :

$$(\mu_1 P)(x) - (\mu_2 P)(x) = (1-\varepsilon)\left[(\mu_1 R)(x) - (\mu_2 R)(x)\right] \ .$$

   (b) En déduire que

$$d(\mu_1 P,\, \mu_2 P) \leq (1-\varepsilon) d(\mu_1,\, \mu_2) \, .$$

5. (a) Soit π une probabilité sur E invariante par P : $\pi P = \pi$. Montrer que, pour toute probabilité μ sur E et tout entier $n \geq 0$, on a $d(\mu P^n, \pi) \leq 2(1-\varepsilon)^n$.

   (b) En déduire que la probabilité invariante, si elle existe, est unique.

6. Montrer que la mesure π sur E définie par :

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(1-\varepsilon)^n \nu R^n$$

   est une probabilité invariante par P.

7. Déduire des questions précédentes que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi quand n tend vers l'infini vers une limite que l'on précisera.

8. *Simulation exacte de la probabilité invariante :*
   Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur E de loi initiale ν et de matrice de transition R et N une variable aléatoire suivant la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre ε indépendante de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\mathbb{P}(N = n) = \varepsilon(1-\varepsilon)^n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \ .$$

   Montrer que la variable aléatoire Y_N a pour loi π.

9. Soit Q une probabilité de transition sur E. On suppose qu'il existe un entier m tel que $P = Q^m$ vérifie la propriété (H). Montrer qu'il existe une unique probabilité π sur E invariante par Q, et des constantes $C < +\infty$ et $0 < \rho < 1$ telles que $d(\mu Q^n,\, \pi) \leq C\rho^n$ pour toute probabilité μ sur E et tout entier $n \geq 0$.

Exercice 37

Chaîne de Markov finie non nécessairement irréductible. Soit P une matrice de transition sur un espace d'états fini. Discuter les points suivants :

1. Décrire les probabilités invariantes.
2. Que devient le théorème ergodique ?
3. Que devient le théorème de convergence en loi (pour simplifier, on supposera que le chaîne restreinte à chaque classe récurrente est apériodique) ?