M1, Université Joseph Fourier
Probabilités
2013-2014

TD N°1

Combinatoire, espaces de probabilité

1 Formule du crible

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux n-uplets de nombres réels. Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} \left(\prod_{i \in I} a_i\right)\left(\prod_{i \in I^c} b_i\right) .$$

2. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $A_1, \ldots, A_n$ appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer la *formule du crible de Poincaré* :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) .$$

puis les premières *inégalités de Bonferroni* :

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} \mathbb{P}(A_k \cap A_\ell) \leqslant \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{P}(A_k) .$$

2 Permutations et dérangements

Un éditeur envoie un courrier personnalisé à n correspondants, mais sa secrétaire, croyant avoir affaire à une circulaire, colle au hasard les étiquettes d'adresse.

1. Quelle est la probabilité que chaque lettre parvienne à son destinataire ?
2. Quelle est la probabilité qu'aucune lettre ne parvienne à son destinataire ?
3. Plus généralement, si $m \in \{0, \ldots, n\}$, quelle est la probabilité que m correspondants (exactement) reçoivent la lettre qui leur est destinée ?
4. Étudier la limite de ces probabilités lorsque n tend vers l'infini, à m fixé.

3 Arrangements, combinaisons et permutations

1. Combien peut-on former de mots de longueur k avec un alphabet de n lettres ?
2. On s'intéresse aux k premiers arrivés d'une course de n chevaux ($1 \leq k \leq n$). Combien y a-t-il de résultats possibles ?
3. On choisit k élèves dans une classe qui en compte n ($1 \leq k \leq n$). Combien de groupes peut-on ainsi former ?
4. Combien de résultats différents peut-on obtenir en lançant k dés à n faces ?
5. On dispose d'un alphabet fini $A = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$. Combien de mots de longueur $k = k_1 + \cdots + k_n$ peut-on former en utilisant k_1 fois la lettre ℓ_1, k_2 fois la lettre ℓ_2, ..., et k_n fois la lettre ℓ_n ? (On suppose que $0 \leq k_i \leq k$ pour $i = 1, \ldots, n$.)

6. Développer en monômes le polynôme $(X_1 + \cdots + X_n)^k$. Combien compte-t-on de termes dans la somme ?

4 Loi hypergéométrique et loi binomiale

La population d'une ville s'élève à N personnes, dont M sont favorables à la réélection de leur maire. Un institut de sondage choisit au hasard un échantillon de n personnes, où $1 \leq n \leq M$, et y dénombre le nombre X de personnes favorables à la réélection du maire.

1. Combien y a-t-il d'échantillons possibles ? Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. En supposant les échantillons équiprobables, calculer pour chaque valeur possible x la probabilité que X vaille x, notée $\mathbb{P}[X = x]$.
3. Étudier le comportement de $\mathbb{P}[X = x]$ lorsque N tend vers l'infini, en supposant que le rapport M/N tend vers $p \in [0, 1]$ dans cette limite.

5 $(\pi + \lambda)$-système $\Rightarrow$ tribu

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{C}$ une classe de parties de Ω qui soit à la fois un π-système et un λ-système. Montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu.

6 Un π-système engendrant les boréliens de $\mathbb{R}$

Soit $\pi(\mathbb{R})$ l'ensemble de parties de $\mathbb{R}$ défini par :

$$\pi(\mathbb{R}) = \{]-\infty, x] \text{ t.q. } x \in \mathbb{R}\} .$$

Montrer que $\pi(\mathbb{R})$ est un π-système qui engendre la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $\mathbb{R}$.

7 Limite et mesurabilité

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble suivant est mesurable :

$$C = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } (f_n(\omega))_{n \geqslant 0} \text{ converge}\} .$$

8 Tribu image

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et f une application de Ω dans un ensemble E.

1. Montrer que l'ensemble suivant est une tribu :

$$\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{P}(E) \text{ t.q. } f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\} .$$

   C'est donc la plus grande tribu $\mathcal{T}$ sur E rendant l'application f $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$-mesurable, et elle est appelée *tribu image de l'application f* .

2. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de E engendrant une tribu $\mathcal{T}$. Montrer que f est $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$-mesurable si et seulement si :

$$\forall C \in \mathcal{C}, \quad f^{-1}(C) \in \mathcal{F} .$$

3. En déduire qu'une fonction $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si $\{f \leqslant x\} \in \mathcal{F}$ pour tout x réel.

M1, Université Joseph Fourier
Probabilités
2013-2014

TD n°2

Variables aléatoires

1 Loi d'un couple et loi marginale

On lance un dé à 6 faces. On note X le résultat. On lance alors un dé à X faces. Soit Y le résultat obtenu.

1. Calculer la loi du couple (X, Y).
2. En déduire les lois de X et de Y.
3. Quelle est la loi de X sachant $Y = 3$? Et sachant $Y = 6$?

2 Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (notée $\mathcal{P}(\lambda)$) si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} .$$

1. On suppose que le nombre X d'œufs pondus par une tortue au cours d'une ponte suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Un œuf arrive à éclosion avec probabilité p (indépendamment du nombre de d'oeufs pondus). Montrer que le nombre Z de bébés tortues issus d'une ponte suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(p\lambda)$.
2. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramétre λ, Y une loi de Poisson de paramètre μ et que ces deux variables sont indépendantes. Montrer que $X + Y$ suit encore une loi de Poisson, et préciser son paramètre.

3 Combinatoire et indicatrices

Un chapeau contient n tickets numérotés de 1 à n. On en tire k au hasard et on note X la somme de leurs numéros. Calculer l'espérance et la variance de X.

4 Densité du carré

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction de répartition de X^2, puis sa densité.

5 Loi exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ suit la loi exponentielle de paramètre λ si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x} .$$

On note souvent $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ (les anglo-saxons ont une convention différente). Dans la suite, X désigne une telle variable aléatoire.

1. Montrer que X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la moyenne de X, sa médiane et sa variance.

3. Calculer $\mathbb{E}[e^{tX}]$ pour $t \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que λX suit une loi exponentielle de paramètre 1.
5. Calculer la loi de la partie entière de X.

6 Loi de Pareto

On appelle loi de pareto de paramètres $\alpha > 0$ et $r > 0$ la loi de densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{\alpha r^\alpha}{x^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{x>r}.$$

Calculer l'espérance, la variance et la médiane d'une variable aléatoire de loi de Pareto de paramètres $\alpha > 2$ et $r > 0$.

7 Génération de variables aléatoires à partir de la loi uniforme

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F et F^{-1} l'inverse généralisé de F :

$$\forall u \in [0,1],\ F^{-1}(u) = \inf\{t \in \mathbb{R},\ F(t) \geqslant u\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$

1. Montrer que pour tout réel t,

$$\{u,\ F^{-1}(u) \leqslant t\} = \{u,\ u \leqslant F(t)\}.$$

2. Calculer la loi de $F^{-1}(U)$.
3. Quelle est la loi de $-\frac{1}{\lambda}\log(1-U)$?
4. Comment simuler une loi de Pareto si l'on sait simuler une loi uniforme ?

8 Loi gaussienne centrée réduite

Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne centrée réduite, c'est à dire admettant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ .$$

On note cela $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X^k)$ est nulle si k est un entier positif impair.
2. Calculer $\mathbb{E}(X^{2k})$ pour $k \in \mathbb{N}$. On pourra procéder par récurrence.

9 Indépendance et densités

Soient $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurables. Soit (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. On note λ la mesure produit $\mu \otimes \nu$, et on suppose que (X, Y) admet une densité f par rapport à λ.

1. Montrer que X (resp. Y) admet une densité par rapport à μ (resp. ν).
2. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement s'il existe deux fonctions positives et intégrables, f_1 de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{R}$ et f_2 de $\mathcal{Y}$ dans $\mathbb{R}$, telles que pour λ-presque tout (x, y),
$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y) \ .$$
3. Expliquer le lien entre la densité de X (resp. de Y) et f_1 (resp. f_2) lorsque X et Y sont indépendantes.
4. Généraliser les questions précédentes à un n-uplet de variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$.

10 Loi de Dirichlet

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. On pose :
$$S = X + Y + Z, \quad U = \frac{X}{S}, \quad V = \frac{Y}{S} \ .$$
Montrer que S est indépendante du couple (U, V) et que celui-ci admet une distribution uniforme sur $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 \text{ t.q. } u + v \leqslant 1\}$. Préciser également la loi de S.

11 Loi uniforme sur le disque unité

On considère (X, Y) un couple de variables aléatoires distribué selon la loi uniforme sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Autrement dit, (X, Y) admet pour densité pour rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ la fonction définie par :
$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \ \mathbb{1}_{(x,y) \in D} \ .$$

1. X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Montrez que X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et calculez-la.
3. On pose $T = Y/X$. Déterminer la loi de T.
4. Soient (R, Θ) les coordonnées polaires du point (X, Y) avec $\Theta \in [0, 2\pi[$. Calculer la loi du couple (R, Θ). R et Θ sont-elles indépendantes ?

12 Loi Gamma

On considère la loi $\Gamma(a, b)$ sur $\mathbb{R}$ de densité :
$$f : x \mapsto C_{a,b} e^{-bx} x^{a-1} \ \mathbb{1}_{\{x>0\}} \ ,$$
où $C_{a,b}$ est une constante de normalisation.

1. Montrer que $C_{a,b} = \frac{b^a}{\Gamma(a)}$ où :
$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{a-1} \ dt \ .$$
2. Calculer $\mathbb{E}(X^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ lorsque X suit une loi $\Gamma(a, b)$.

3. Montrer que si X est une v.a de loi $\Gamma(a,b)$ et λ est un réel non nul, alors λX est de loi $\Gamma(a, b/\lambda)$.
4. Montrer que si X et Y sont indépendantes, de lois $\Gamma(a,b)$ et $\Gamma(a',b)$, alors $X+Y$ est de loi $\Gamma(a+a',b)$.

13 $\limsup$ et $\liminf$ de variables i.i.d

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d réelles de loi μ. On définit le support de μ par :

$$\mathrm{supp}(\mu) := \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall O \text{ ouvert contenant x, } \mu(O) > 0\} \ .$$

On note $a = \inf(\mathrm{supp}(\mu))$ et $b = \sup(\mathrm{supp}(\mu))$.

1. Montrer que le support de μ est fermé.
2. Montrer que :
$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i \xrightarrow[n\infty]{p.s.} b \ ,$$
et
$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} X_i \xrightarrow[n\infty]{p.s.} a \ .$$
3. Montrer que, presque sûrement,
$$\liminf_{n\infty} X_n = a \quad \text{et} \quad \limsup_{n\infty} X_n = b \ .$$
4. On suppose désormais que μ est la loi exponentielle de paramètre 1. Montrer que :
$$\limsup_{n\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1 \quad p.s.$$
et :
$$\liminf_{n\infty} \frac{X_n}{\log n} = 0 \quad p.s.$$

M1, Université Joseph Fourier
Probabilités
2013-2014

TD n°3

Indépendance

1 Indépendance 2 à 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2} .$$

Montrer que les 3 variables X, Y et $Z = XY$ sont indépendantes 2 à 2. Sont-elles indépendantes ?

2 Variable indépendante d'elle-même

1. Soit X une v.a à valeurs réelles indépendante d'elle-même. Montrer qu'elle est presque sûrement constante, puis étendre ce résultat à X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
2. En déduire que si X est une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesurable quelconque $(E, \mathcal{E})$ et que f est une fonction mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $\mathbb{R}^d$, X et $f(X)$ ne peuvent être indépendantes que si $f(X)$ est presque sûrement constante.

3 Loi de Cauchy

Soient X et Y deux variables aléatoires gaussiennes centrées et indépendantes.

1. Montrer que X/Y suit une loi de Cauchy.
2. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy. Quelle est la loi de $1/Z$?

4 Indépendance et Fubini

1. Soient X et Y deux v.a indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Montrer que si l'une des deux a une loi diffuse (i.e sans atome), alors $\mathbb{P}(X \neq Y) = 1$.
2. Soient X et Y deux v.a indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\mathbb{P}(X \leqslant Y) = 1$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a \leqslant Y) = 1$.

5 Somme de v.a de Poisson indépendantes (bis)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note p_X sa fonction génératrice, définie par :

$$p_X(z) = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(X = n) z^n ,$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que la somme converge.

1. Montrer que p_X est une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. En déduire que p_X caractérise la loi de X.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Déterminer, en utilisant les séries génératrices, la loi de $X + Y$, puis calculer la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = n$.

6 Le collectionneur d'images

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Une expérience à n résultats possibles équiprobables $1,\ldots,n$ est répétée une infinité de fois. Les résultats successifs obtenus sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Montrer qu'avec probabilité 1 chacun des résultats apparait au moins une fois.

On note Σ l'ordre dans lequel les n différents résultats apparaissent pour la première fois ($\Sigma = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ où Σ_i est le résultat obtenu en i-ème position). On désigne par X_1 la variable aléatoire égale au nombre d'expériences effectuées depuis la deuxième jusqu'à parution d'un résultat différent du premier résultat obtenu. Plus généralement, pour $k = 2, \ldots, n-1$, on note X_k le nombre d'expériences effectuées entre le moment où pour la première fois on a obtenu k résultats différents et celui où on en obtient un $(k+1)$-ième.

2. Montrer que $X_1, \ldots, X_{n-1}, \Sigma$ sont des variables aléatoires indépendantes et préciser leurs lois marginales.

On peut réunir une collection d'images en achetant des tablettes de chocolat : chaque tablette contient une image et la collection complète en comporte n. On suppose que chaque achat procure l'une quelconque des n images avec la même probabilité et que les résultats des achats sont indépendants entre eux. Soit Z le nombre de tablettes achetées jusqu'à achèvement de la collection.

3. Exprimer Z en fonction des variables $X_1, \ldots, X_{n-1}$ du début de l'exercice.
4. En déduire la moyenne et la variance de Z.

7 Pannes en parallèle et indépendance des écarts d'instants de panne

Soient $\tau_1, \ldots, \tau_n$ les variables aléatoires associées à la durée de vie de n ampoules. On suppose que $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sont indépendantes et de même loi exponentielle dont le paramètre, noté θ, est inconnu. On note $\tau_{1,n}, \ldots, \tau_{n,n}$ les statistiques d'ordre associées à l'échantillon (c'est à dire l'échantillon réordonné). On note $\tau_{0,n} = 0$ et pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$X_i = \tau_{i,n} - \tau_{i-1,n}.$$

1. Déterminer la loi de $(X_1, \ldots, X_n)$. On pourra commencer par le cas $n = 2$.
2. Quelle est la loi de $\sum_{i=1}^{n} (n-i+1) X_i$?

8 Renouvellement et processus de poisson

Soient $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Chaque X_i désigne la durée de vie d'une ampoule, qui est remplacée instantanément à chaque fois qu'elle claque par une autre ampoule. On note, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\tau_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

qui désigne l'instant auquel a lieu la i-ième panne.

1. Calculer la loi de τ_k, pour tout $k \geqslant 1$.
2. On pose, pour tout $t \geqslant 0$,

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\tau_k \leqslant t} \ .$$

   Que représente N_t ?
3. Calculer la loi de N_t.

M1, Université Joseph Fourier
Probabilités
2013-2014

TD n°4

Convergence de variables aléatoires : en probabilité, presque sûre et dans L^p

1 Image continue pour la convergence en probabilités

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ convergeant en probabilité vers une variable aléatoire X. Soit g une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^k$, dont l'ensemble des points de discontinuité D_g vérifie $\mathbb{P}(X \in D_g) = 0$. Montrer que $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $g(X)$.

2 Mise en route

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$, montrer qu'il existe une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(X_n/c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 presque sûrement.

3 Loi des grands nombres L^2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles de carré intégrable. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la loi faible des grands nombres si

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la loi forte des grands nombres si la convergence précédente a lieu presque sûrement. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la loi faible des grands nombres dans les cas suivants :

1. La suite $(\mathsf{Var}(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et pour tout $i < j$, $\mathsf{Cov}(X_i, X_j) = 0$.
2. La suite $(\mathsf{Var}(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et

$$\mathsf{Cov}(X_k, X_j) = 0 \quad \text{si } |k-j| \geqslant 2\ .$$

En considérant la suite $\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m^2}(X_i - \mathbb{E}(X_i))$, montrer qu'en fait la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la loi forte des grands nombres dans les cas précédents.

4 Convergence en probabilité et convergence presque sûre

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que si $(\sup_{k\geqslant n}|X_k|)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 en probabilité lorsque n tend vers l'infini, alors $(X_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 presque sûrement.
2. On considère le cas particulier où Ω est l'intervalle $[1, 2]$ muni de la tribu et de la mesure de Lebesgue. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on suppose que

$$X_n = \mathbb{1}_{[2^{-k}n, 2^{-k}(n+1)]} \quad \text{si} \quad 2^k \leqslant n < 2^{k+1}\ .$$

   Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers zéro en probabilité, mais ne converge pas presque sûrement.

5 Théorème de Weierstrass et Polynômes de Bernstein

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Le polynôme de Bernstein de degré n associé à f est

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

1. Montrer que $B_n(x) = \mathbb{E}[f(S_n(x)/n)]$, où $S_n(x)$ suit la loi binomiale de paramètres n et x.
2. En déduire, à l'aide de l'inégalité de Chebyshev, que la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

6 Séries aléatoires dans L^2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles centrées de carré intégrable, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que les variables aléatoires (X_n) sont deux à deux décorrélées :

$$\forall i \neq j \in \mathbb{N}, \quad \mathsf{Cov}(X_i, X_j) = 0 \ ,$$

et que la famille $(\mathsf{Var}(X_n))_n$ est sommable. Montrer que la série $\sum X_n$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

7 Processus AR(1)

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables i.i.d de carré intégrable et $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $|\phi| < 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $\sup_n \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$ et telle que :
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad X_n - \phi X_{n-1} = U_n \ .$$
2. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est-elle une suite de v.a stationnaire ?
3. On définit $(\widetilde{X}_n)_{n\geqslant 0}$ récursivement par $\widetilde{X}_0 = 0$, et pour $n \geqslant 1$:
$$\widetilde{X}_n = U_n + \phi \widetilde{X}_{n-1} \ .$$
Montrer que $\widetilde{X}_n - X_n$ converge vers 0 dans L^2.

M1, Université Joseph Fourier
Probabilités
2013-2014

TD n°5

Variables gaussiennes, séries de v.a.i.i.d et convergence en loi

1 Fonctions caractéristiques de quelques lois classiques

1. Calculer la fonction génératrice ou la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X distribuée suivant :
   - la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
   - la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
   - la loi géométrique $\mathbb{P}[X=k]=p(1-p)^k$, $k\in\mathbb{N}$, $p\in\,]0,1]$.
2. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X distribuée suivant :
   - la loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$, où $a<b$.
   - la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.
   - la loi gamma $\Gamma(a,b)$.
3. Retrouver le résultat sur la convolution de $\Gamma(a,b)$ et $\Gamma(a',b)$ à l'aide des fonctions caractéristiques.
4. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires où X_n est de loi de Poisson de paramètre n. Montrer que $\frac{X_n-n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.
5. Pour tout n, on considère $(X_{i,n})_{1\leqslant i\leqslant m_n}$ des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètres $p_{i,n}$. Donner une condition simple sur les $p_{i,n}$ pour $S_n=\sum_{i=1}^{m_n}X_{i,n}$ converge en loi vers une loi de Poisson.

2 Convergence des maxima

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables i.i.d. de fonction de répartition F et soit $M_n=\max\{X_1,\dots,X_n\}$. Déterminer la fonction de répartition de M_n, puis la loi limite de :

1. $M_n/n^{1/\alpha}$, quand $F(x)=(1-x^{-\alpha})\ \mathbb{1}_{\{x\geqslant 1\}}$ avec $\alpha>0$;
2. $n^{1/\beta}M_n$, quand $F(x)=(1-|x|^{\beta})\ \mathbb{1}_{\{-1\leqslant x\leqslant 0\}}$ avec $\beta>0$;
3. $M_n-\ln n$, quand $F(x)=(1-e^{-x})\ \mathbb{1}_{\{x\geqslant 0\}}$.

3 Variables aléatoires gaussiennes

Soient X,Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que le couple $(X+Y,X-Y)$ est une variable aléatoire gaussienne dont on précisera l'espérance et la matrice de covariance.
2. En déduire que $(X+Y,X-Y)$ a la même loi que $(\sqrt{2}X,\sqrt{2}Y)$, puis que $(X^2-Y^2)/2$ a la même loi que XY.

4 Somme de carrés de variables gaussiennes

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles. On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le vecteur aléatoire $X_1^n:=(X_1,\dots,X_n)^T$ est un vecteur gaussien centré, et on note C_n sa matrice de covariance. On définit aussi $S_n=X_1^2+\cdots+X_n^2$, et on note

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}X_k^2,\quad \text{et}\quad \Sigma\,=\,\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{Var}(X_k)\ .$$

On se propose de montrer les deux implications suivantes

(i) Si $\Sigma < \infty$, alors $S < \infty$ presque sûrement ;

(ii) Si $\Sigma = \infty$, alors $S = \infty$ presque sûrement.

1. Montrer que $\mathbb{E}(S) = \Sigma$, et en déduire la première implication ci-dessus.
2. L'entier $n \in \mathbb{N}^*$ étant fixé, on choisit une matrice orthogonale $Q_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q_n C_n Q_n^{-1} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$. On définit $Y_1^n := (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ par $Y_1^n = Q_n X_1^n$. Justifier l'existence d'une telle matrice Q_n, puis vérifier que $\mathrm{Tr}(C_n) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, et que $S_n = Y_1^2 + \cdots + Y_n^2$. Quelle est la loi de Y_1^n ? Qu'en déduit-on pour les variables $Y_1, \ldots, Y_n$?
3. Calculer l'espérance de $\exp(-Y^2/2)$ lorsque Y est une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. En déduire que, avec les notations de la question précédente,
$$\mathbb{E}(e^{-S_n/2}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{Tr}(C_n)}} \ .$$
4. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que $\mathbb{E}(e^{-S/2}) = 0$ si $\Sigma = \infty$, et en déduire la seconde implication ci-dessus.

5 Lemme de Portmanteau

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et X une v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes.

(i) Pour toute fonction continue bornée f, $\lim\limits_{n\infty} \mathbb{E}_n(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

(ii) Pour toute fonction lipschitzienne bornée f, $\lim\limits_{n\infty} \mathbb{E}_n(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

(iii) Pour tout ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^d$, $\limsup\limits_{n\infty} \mathbb{P}_n(X_n \in F) \leqslant \mathbb{P}(X \in F)$.

(iv) Pour tout ensemble ouvert $O \subset \mathbb{R}^d$, $\liminf\limits_{n\infty} \mathbb{P}_n(X_n \in O) \geqslant \mathbb{P}(X \in O)$.

(v) Pour tout borélien B tel que $\mathbb{P}(X \in \partial B) = 0$, $\lim\limits_{n\infty} \mathbb{P}_n(X_n \in B) = \mathbb{P}(X \in B)$.

6 Image continue et lemme de Slutsky

On suppose dans toute la suite que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, convergeant en loi vers une v.a. X.

1. Soit g une fonction continue en tout point d'un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^d$ tel que $\mathbb{P}(X \in C) = 1$. Montrer que $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $g(X)$.
2. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires dans $\mathbb{R}$, convergeant en loi vers une constante c. Montrer que (X_n, Y_n) converge en loi vers (X, c).
3. Sous les mêmes conditions qu'à la question précédente, montrer que $X_n Y_n$ converge en loi vers cX et que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + c$.
4. **Application :** Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ des variables aléatoires i.i.d de variance finie. On note :
$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \ .$$
Montrer que $\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sigma_n}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

M1, Université Joseph Fourier
Probabilités
2013-2014

TD n°6

Compléments

1 Théorème central limite de Lindeberg

Soient $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, centrées et de variance finie. On suppose que pour tout i, $\mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{E}(Y_i)^2$ et on note :

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2) \ ,$$

qu'on suppose non nul. On note $\mathcal{F}$ la classe des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que f soit C^3 sur $\mathbb{R}$ et ait toutes ses dérivées bornées sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une suite de variables aléatoires réelles U_n converge en loi vers U si et seulement si pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{E}(f(U_n)) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f(U)) \ .$$

   Dans la suite, on se fixe une fonction $f \in \mathcal{F}$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on note :

$$S_n^{(i)} = \sum_{k=1}^{i-1} Y_i + \sum_{k=i+1}^{n} X_i \ ,$$

   et :

$$\sigma_n^{(i)} = \sum_{k=1}^{i} Y_i + \sum_{k=i+1}^{n} X_i \ .$$

2. Montrer que :

$$|\mathbb{E}[f(s_n^{-1/2}(X_1+\ldots+X_n))]-\mathbb{E}[f(s_n^{-1/2}(Y_1+\ldots+Y_n))]| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |\mathbb{E}[f(s_n^{-1/2}\sigma_n^{(i)})-f(s_n^{-1/2}\sigma_n^{(i+1)})]| \ ,$$

3. A l'aide d'une formule de Taylor, montrer qu'il existe une variable aléatoire ζ_n telle que :

$$f(s_n^{-1/2}\sigma_n^{(i)}) = f(s_n^{-1/2}S_n^{(i+1)})+\frac{X_{i+1}}{s_n^{1/2}}f'(s_n^{-1/2}S_n^{(i+1)})+\frac{X_{i+1}^2}{s_n}f''(s_n^{-1/2}S_n^{(i+1)})+\frac{X_{i+1}^3}{s_n^{3/2}}f^{(3)}(\zeta_n) \ .$$

4. Montrer que :

$$|\mathbb{E}[f(s_n^{-1/2}(X_1+\ldots+X_n))]-\mathbb{E}[f(s_n^{-1/2}(Y_1+\ldots+Y_n))]| \leqslant s_n^{-3/2}\|f^{(3)}\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E}|X_i|^3 + \mathbb{E}|Y_i|^3\right) \ .$$

5. Montrer que si $s_n^{-3/2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}|X_i|^3$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, $s_n^{-1/2}(X_1+\ldots+X_n)$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
6. En déduire le théorème central limite pour des variables $i.i.d$ dans L^3.

7. Remplacer l'hypothèse de moment d'ordre 3 fini par une hypothèse de moment d'ordre 2 fini en comparant le devéloppement de Taylor à l'ordre 3 à un développement de Taylor à l'ordre 2.

2 Le problème du scrutin

Une élection oppose deux candidats A et B. On suppose que, dans un certain bureau de vote, A l'a emporté par a voix contre b ($a > b$). On suppose, pour simplifier, qu'il n'y a pas de bulletin nul ou blanc.

Le but du problème est de calculer la probabilité que, tout au long du dépouillement, A reste en tête (strictement) du scrutin, sous l'hypothèse que tous les ordres de dépouillements des bulletins sont équiprobables.

1. Montrer que cette hypothèse entraîne l'équiprobabilité des suites de $a + b$ votes dont a sont favorables à A et b favorables à B.
2. On utilisera dans la suite la notion de "chemin" dans le plan : un chemin est une suite finie $P_1, \ldots, P_r$ de points à coordonnées entières telle que, pour tout i de $\{1, \ldots, r-1\}$, le vecteur $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ est égal à un vecteur de coordonnées $(1, 1)$ ou $(1, -1)$. Combien y a-t-il de chemins différents allant de (m_1, n_1) à (m_2, n_2) si $m_1 < m_2$?
3. Montrer que les suites de votes possibles sont représentables par les chemins allant de $(0, 0)$ à $(a + b, a - b)$.
4. (Principe de réflexion) Montrer qu'il y a autant de chemins allant de $(1, 1)$ à $(a + b, a - b)$ et touchant l'axe des abscisses que de chemins allant de $(1, -1)$ à $(a + b, a - b)$.
5. Compter à l'aide des questions précédentes le nombre de chemins allant de $(0, 0)$ à $(a + b, a - b)$ et ne touchant pas l'axe des x en un autre point que $(0, 0)$.
6. Conclure que la probabilité cherchée vaut $\frac{a-b}{a+b}$.