M1, Université Joseph Fourier
Probabilités
2011-2012

# TD N°1

Espaces de probabilité, combinatoire

## 1 $(\pi + \lambda)$-système $\Rightarrow$ tribu

Soit $\Omega$ un ensemble et $\mathcal{C}$ une classe de parties de $\Omega$ qui soit à la fois un $\pi$-système et un $\lambda$-système. Montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu.

## 2 Un $\pi$-système engendrant les boréliens de $\mathbb{R}$

Soit $\pi(\mathbb{R})$ l'ensemble de parties de $\mathbb{R}$ défini par :

$$\pi(\mathbb{R}) = \{]-\infty, x] \text{ t.q. } x \in \mathbb{R}\} .$$

Montrer que $\pi(\mathbb{R})$ est un $\pi$-système qui engendre la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $\mathbb{R}$.

## 3 Limite et mesurabilité

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions mesurables de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble suivant est mesurable :

$$C = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } (f_n(\omega))_{n\geqslant 0} \text{ converge}\} .$$

## 4 Tribu image

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et $f$ une application de $\Omega$ dans un ensemble $E$.

1. Montrer que l'ensemble suivant est une tribu :

$$\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{P}(E) \text{ t.q. } f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\} .$$

   C'est donc la plus grande tribu $\mathcal{T}$ sur $E$ rendant l'application $f$ $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$-mesurable, et elle est appelée *tribu image de l'application* $f$ .

2. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de $E$ engendrant une tribu $\mathcal{T}$. Montrer que $f$ est $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$-mesurable si et seulement si :

$$\forall C \in \mathcal{C}, \quad f^{-1}(C) \in \mathcal{F} .$$

3. En déduire qu'une fonction $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si $\{f \leqslant x\} \in \mathcal{F}$ pour tout $x$ réel.

## 5 Formule du crible

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux $n$-uplets de nombres réels. Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} \left(\prod_{i\in I} a_i\right)\left(\prod_{i\in I^c} b_i\right) .$$

2. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $A_1, \ldots, A_n$ appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer la *formule du crible de Poincaré* :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) .$$

puis les premières *inégalités de Bonferroni* :

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} \mathbb{P}(A_k \cap A_\ell) \leqslant \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{P}(A_k) .$$

## 6 Permutations et dérangements

Un éditeur envoie un courrier personnalisé à $n$ correspondants, mais sa secrétaire, croyant avoir affaire à une circulaire, colle au hasard les étiquettes d'adresse.

1. Quelle est la probabilité que chaque lettre parvienne à son destinataire ?
2. Quelle est la probabilité qu'aucune lettre ne parvienne à son destinataire ?
3. Plus généralement, si $m \in \{0, \ldots, n\}$, quelle est la probabilité que $m$ correspondants (exactement) reçoivent la lettre qui leur est destinée ?
4. Étudier la limite de ces probabilités lorsque $n$ tend vers l'infini, à $m$ fixé.

## 7 Arrangements, combinaisons et permutations

1. Combien peut-on former de mots de longueur $k$ avec un alphabet de $n$ lettres ?
2. On s'intéresse aux $k$ premiers arrivés d'une course de $n$ chevaux ($1 \leq k \leq n$). Combien y a-t-il de résultats possibles ?
3. On choisit $k$ élèves dans une classe qui en compte $n$ ($1 \leq k \leq n$). Combien de groupes peut-on ainsi former ?
4. Combien de résultats différents peut-on obtenir en lançant $k$ dés à $n$ faces ?
5. On dispose d'un alphabet fini $A = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$. Combien de mots de longueur $k = k_1 + \cdots + k_n$ peut-on former en utilisant $k_1$ fois la lettre $\ell_1$, $k_2$ fois la lettre $\ell_2$, ..., et $k_n$ fois la lettre $\ell_n$ ? (On suppose que $0 \leq k_i \leq k$ pour $i = 1, \ldots, n$.)
6. Développer en monômes le polynôme $(X_1 + \cdots + X_n)^k$. Combien compte-t-on de termes dans la somme ?

## 8 Loi hypergéométrique et loi binomiale

La population d'une ville s'élève à $N$ personnes, dont $M$ sont favorables à la réélection de leur maire. Un institut de sondage choisit au hasard un échantillon de $n$ personnes, où $1 \leq n \leq M$, et y dénombre le nombre $X$ de personnes favorables à la réélection du maire.

1. Combien y a-t-il d'échantillons possibles ? Quelles sont les valeurs possibles de $X$ ?
2. En supposant les échantillons équiprobables, calculer pour chaque valeur possible $x$ la probabilité que $X$ vaille $x$, notée $\mathbb{P}[X = x]$.
3. Étudier le comportement de $\mathbb{P}[X = x]$ lorsque $N$ tend vers l'infini, en supposant que le rapport $M/N$ tend vers $p \in [0, 1]$ dans cette limite.

M1, Université Joseph Fourier
Probabilités
2011-2012

# TD n°2

Variables aléatoires

## 1 Loi d'un couple et loi marginale

On lance un dé à 6 faces. On note $X$ le résultat. On lance alors un dé à $X$ faces. Soit $Y$ le résultat obtenu.

1. Calculer la loi du couple $(X, Y)$.
2. En déduire les lois de $X$ et de $Y$.
3. Quelle est la loi de $X$ sachant $Y = 3$ ? Et sachant $Y = 6$ ?

## 2 Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (notée $\mathcal{P}(\lambda)$) si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} .$$

1. On suppose que le nombre $X$ d'œufs pondus par une tortue au cours d'une ponte suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Un œuf arrive à éclosion avec probabilité $p$ (indépendamment du nombre de d'oeufs pondus). Montrer que le nombre $Z$ de bébés tortues issus d'une ponte suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(p\lambda)$.
2. On suppose que $X$ suit une loi de Poisson de paramétre $\lambda$, $Y$ une loi de Poisson de paramètre $\mu$ et que ces deux variables sont indépendantes. Montrer que $X + Y$ suit encore une loi de Poisson, et préciser son paramètre.

## 3 Combinatoire et indicatrices

Un chapeau contient $n$ tickets numérotés de 1 à $n$. On en tire $k$ au hasard et on note $X$ la somme de leurs numéros. Calculer l'espérance et la variance de $X$.

## 4 Densité du carré

Soit $X$ une variable aléatoire réelle admettant une densité $f$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction de répartition de $X^2$, puis sa densité.

## 5 Loi exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x} .$$

On note souvent $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ (les anglo-saxons ont une convention différente). Dans la suite, $X$ désigne une telle variable aléatoire.

1. Montrer que $X$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la moyenne de $X$, sa médiane et sa variance.

3. Calculer $\mathbb{E}[e^{tX}]$ pour $t \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que $\lambda X$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.
5. Calculer la loi de la partie entière de $X$.

## 6 Loi de Pareto

On appelle loi de pareto de paramètres $\alpha > 0$ et $r > 0$ la loi de densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{\alpha r^\alpha}{x^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{x>r}.$$

Calculer l'espérance, la variance et la médiane d'une variable aléatoire de loi de Pareto de paramètres $\alpha > 2$ et $r > 0$.

## 7 Génération de variables aléatoires à partir de la loi uniforme

Soit $U$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, $X$ une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $F$ et $F^{-1}$ l'inverse généralisé de $F$ :

$$\forall u \in [0, 1],\ F^{-1}(u) = \inf\{t \in \mathbb{R},\ F(t) \geqslant u\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$

1. Montrer que pour tout réel $t$,

$$\{u,\ F^{-1}(u) \leqslant t\} = \{u,\ u \leqslant F(t)\}.$$

2. Calculer la loi de $F^{-1}(U)$.
3. Quelle est la loi de $-\frac{1}{\lambda}\log(1 - U)$ ?
4. Comment simuler une loi de Pareto si l'on sait simuler une loi uniforme ?

## 8 Loi gaussienne centrée réduite

Soit $X$ une variable aléatoire de loi gaussienne centrée réduite, c'est à dire admettant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

On note cela $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X^k)$ est nulle si $k$ est un entier positif impair.
2. Calculer $\mathbb{E}(X^{2k})$ pour $k \in \mathbb{N}$. On pourra procéder par récurrence.

## 9 Loi Gamma

On considère la loi $\Gamma(a, b)$ sur $\mathbb{R}$ de densité :

$$f : x \mapsto C_{a,b} e^{-bx} x^{a-1} \mathbb{1}_{\{x>0\}} ,$$

où $C_{a,b}$ est une constante de normalisation.

1. Montrer que $C_{a,b} = \frac{b^a}{\Gamma(a)}$ où :

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{a-1}\, dt .$$

2. Calculer $\mathbb{E}(X^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ lorsque $X$ suit une loi $\Gamma(a, b)$.
3. Montrer que si $X$ est une v.a de loi $\Gamma(a, b)$ et $\lambda$ est un réel non nul, alors $\lambda X$ est de loi $\Gamma(a, b/\lambda)$.
4. Montrer que si $X$ et $Y$ sont indépendantes, de lois $\Gamma(a, b)$ et $\Gamma(a', b)$, alors $X + Y$ est de loi $\Gamma(a + a', b)$.

M1, Université Joseph Fourier
Probabilités
2011-2012

# TD n°3

Indépendance

## 1 Variable indépendante d'elle-même

1. Soit $X$ une v.a à valeurs réelles indépendante d'elle-même. Montrer qu'elle est presque sûrement constante, puis étendre ce résultat à $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
2. En déduire que si $X$ est une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesurable quelconque $(E, \mathcal{E})$ et que $f$ est une fonction mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $\mathbb{R}^d$, $X$ et $f(X)$ ne peuvent être indépendantes que si $f(X)$ est presque sûrement constante.

## 2 Indépendance 2 à 2

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes et de même loi :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2} .$$

Montrer que les 3 variables $X, Y$ et $Z = XY$ sont indépendantes 2 à 2. Sont-elles indépendantes ?

## 3 Loi de Cauchy

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires gaussiennes centrées et indépendantes.

1. Montrer que $X/Y$ suit une loi de Cauchy.
2. Soit $Z$ une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy. Quelle est la loi de $1/Z$ ?

## 4 Indépendance et Fubini

1. Soient $X$ et $Y$ deux v.a indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Montrer que si l'une des deux a une loi diffuse (i.e sans atome), alors $\mathbb{P}(X \neq Y) = 1$.
2. Soient $X$ et $Y$ deux v.a indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\mathbb{P}(X \leqslant Y) = 1$ . Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a \leqslant Y) = 1$.

## 5 Somme de v.a de Poisson indépendantes (bis)

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $p_X$ sa fonction génératrice, définie par :

$$p_X(z) = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(X = n) z^n ,$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que la somme converge.

1. Montrer que $p_X$ est une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. En déduire que $p_X$ caractérise la loi de $X$.
2. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Déterminer, en utilisant les séries génératrices, la loi de $X + Y$, puis calculer la loi conditionnelle de $X$ sachant $X + Y = n$.

## 6 Le collectionneur d'images

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Une expérience à $n$ résultats possibles équiprobables $1,\ldots,n$ est répétée une infinité de fois. Les résultats successifs obtenus sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Montrer qu'avec probabilité 1 chacun des résultats apparait au moins une fois.

On note $\Sigma$ l'ordre dans lequel les $n$ différents résultats apparaissent pour la première fois ($\Sigma = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ où $\Sigma_i$ est le résultat obtenu en $i$-ème position). On désigne par $X_1$ la variable aléatoire égale au nombre d'expériences effectuées depuis la deuxième jusqu'à parution d'un résultat différent du premier résultat obtenu. Plus généralement, pour $k = 2, \ldots, n-1$, on note $X_k$ le nombre d'expériences effectuées entre le moment où pour la première fois on a obtenu $k$ résultats différents et celui où on en obtient un $(k+1)$-ième.

2. Montrer que $X_1, \ldots, X_{n-1}, \Sigma$ sont des variables aléatoires indépendantes et préciser leurs lois marginales.

On peut réunir une collection d'images en achetant des tablettes de chocolat : chaque tablette contient une image et la collection complète en comporte $n$. On suppose que chaque achat procure l'une quelconque des $n$ images avec la même probabilité et que les résultats des achats sont indépendants entre eux. Soit $Z$ le nombre de tablettes achetées jusqu'à achèvement de la collection.

3. Exprimer $Z$ en fonction des variables $X_1, \ldots, X_{n-1}$ du début de l'exercice.
4. En déduire la moyenne et la variance de $Z$.

## 7 Pannes en parallèle et indépendance des écarts d'instants de panne

Soient $\tau_1, \ldots, \tau_n$ les variables aléatoires associées à la durée de vie de $n$ ampoules. On suppose que $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sont indépendantes et de même loi exponentielle dont le paramètre, noté $\theta$, est inconnu. On note $\tau_{1,n}, \ldots, \tau_{n,n}$ les statistiques d'ordre associées à l'échantillon (c'est à dire l'échantillon réordonné). On note $\tau_{0,n} = 0$ et pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$X_i = \tau_{i,n} - \tau_{i-1,n}.$$

1. Déterminer la loi de $(X_1, \ldots, X_n)$. On pourra commencer par le cas $n = 2$.
2. Quelle est la loi de $\sum_{i=1}^{n} (n-i+1) X_i$ ?

## 8 Renouvellement et processus de poisson

Soient $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Chaque $X_i$ désigne la durée de vie d'une ampoule, qui est remplacée instantanément à chaque fois qu'elle claque par une autre ampoule. On note, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\tau_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

qui désigne l'instant auquel a lieu la $i$-ième panne.

1. Calculer la loi de $\tau_k$, pour tout $k \geqslant 1$.
2. On pose, pour tout $t \geqslant 0$,

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\tau_k \leqslant t} \ .$$

   Que représente $N_t$ ?
3. Calculer la loi de $N_t$.

M1, Université Joseph Fourier
Probabilités
2011-2012

# TD n°4

## Convergence de variables aléatoires

## 1 Image continue pour la convergence en probabilités

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ convergeant en probabilité vers une variable aléatoire $X$. Soit $g$ une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^k$, dont l'ensemble des points de discontinuité $D_g$ vérifie $\mathbb{P}(X \in D_g) = 0$. Montrer que $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $g(X)$.

## 2 Mise en route

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$, montrer qu'il existe une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(X_n/c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 presque sûrement.

## 3 Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles de carré intégrable. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait à la loi faible des grands nombres si

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait à la loi faible des grands nombres dans les cas suivants :

1. La suite $(\mathsf{Var}(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et pour tout $i < j$, $\mathsf{Cov}(X_i, X_j) = 0$.
2. La suite $(\mathsf{Var}(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et pour tout $n \geqslant 2$, la variable $X_n$ dépend de $X_{n-1}$ et $X_{n+1}$ mais est indépendante des autres $X_k$.

## 4 Convergence en probabilité et convergence presque sûre

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que si $(\sup_{k\geqslant n} |X_k|)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 en probabilité lorsque $n$ tend vers l'infini, alors $(X_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 presque sûrement.
2. On considère le cas particulier où $\Omega$ est l'intervalle $[1, 2]$ muni de la tribu et de la mesure de Lebesgue. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on suppose que

$$X_n = \mathbb{1}_{[2^{-k}n, 2^{-k}(n+1)]} \quad \text{si} \quad 2^k \leqslant n < 2^{k+1} .$$

   Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers zéro en probabilité, mais ne converge pas presque sûrement.

## 5 Loi forte des grands nombres $L^4$

Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ des variables aléatoires réelles i.i.d. On note :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

1. On suppose que $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|\frac{1}{n}S_n - \mathbb{E}(X_1)| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathsf{Var}(X_1)}{n\varepsilon^2} \ .$$

2. En déduire que $S_n/n$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X_1)$.
3. On suppose que $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$ et que $\mathbb{E}(X_1) = 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}[|S_n - \mathbb{E}(S_n)|^4] = n\mathbb{E}(X_1^4) + 6\frac{n(n-1)}{2}\mathbb{E}[X_i^2]^2 \ .$$

4. En déduire que sous l'hypothèse $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$, $S_n/n$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$.

## 6 Théorème de Weierstrass et Polynômes de Bernstein

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Le polynôme de Bernstein de degré $n$ associé à $f$ est

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

1. Montrer que $B_n(x) = \mathbb{E}[f(S_n(x)/n)]$, où $S_n(x)$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $x$.
2. En déduire, à l'aide de l'inégalité de Chebyshev, que la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

## 7 Séries aléatoires dans $L^2$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles centrées de carré intégrable, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que les variables aléatoires $(X_n)$ sont deux à deux décorrélées :

$$\forall i \neq j \in \mathbb{N}, \quad \mathsf{Cov}(X_i, X_j) = 0 \ ,$$

et que la famille $(\mathsf{Var}(X_n))_n$ est sommable. Montrer que la série $\sum X_n$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

M1, Université Joseph Fourier
Probabilités
2011-2012

# TD n°5

Variables gaussiennes, séries de v.a.i.i.d et convergence en loi

## 1 Fonction caractéristique de quelques lois classiques

1. Calculer la fonction génératrice ou la fonction caractéristique d'une variable aléatoire $X$ distribuée suivant :
   - la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
   - la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
   - la loi géométrique $\mathbb{P}[X=k]=p(1-p)^k$, $k\in\mathbb{N}$ , $p\in\,]0,1]$.
2. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire $X$ distribuée suivant :
   - la loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$, où $a<b$.
   - la loi gamma $\Gamma(a,b)$.
   - la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.
3. Retrouver le résultat sur la convolution de $\Gamma(a,b)$ et $\Gamma(a',b)$ à l'aide des fonctions caractéristiques.

## 2 Variables aléatoires gaussiennes

Soient $X,Y$ deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que le couple $(X+Y,X-Y)$ est une variable aléatoire gaussienne dont on précisera l'espérance et la matrice de covariance.
2. En déduire que $(X+Y,X-Y)$ a la même loi que $(\sqrt{2}X,\sqrt{2}Y)$, puis que $(X^2-Y^2)/2$ a la même loi que $XY$.
3. Vérifier, par un calcul direct, que les fonctions caractéristiques $\phi_{XY}(t)$ et $\phi_{(X^2-Y^2)/2}(t)$ sont égales.

## 3 Somme de carrés de variables gaussiennes

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles. On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le vecteur aléatoire $X_1^n:=(X_1,\dots,X_n)^T$ est un vecteur gaussien centré, et on note $C_n$ sa matrice de covariance. On définit aussi $S_n=X_1^2+\cdots+X_n^2$, et on note

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}X_k^2,\quad \text{et}\quad \Sigma=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{Var}(X_k)\ .$$

On se propose de montrer les deux implications suivantes

(i) Si $\Sigma<\infty$, alors $S<\infty$ presque sûrement ;

(ii) Si $\Sigma=\infty$, alors $S=\infty$ presque sûrement.

1. Montrer que $\mathbb{E}(S)=\Sigma$, et en déduire la première implication ci-dessus.
2. L'entier $n\in\mathbb{N}^*$ étant fixé, on choisit une matrice orthogonale $Q_n\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q_nC_nQ_n^{-1}=\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, où $\alpha_1,\dots,\alpha_n\geqslant 0$. On définit $Y_1^n:=(Y_1,\dots,Y_n)^T$ par $Y_1^n=Q_nX_1^n$. Justifier l'existence d'une telle matrice $Q_n$, puis vérifier que $\mathrm{Tr}(C_n)=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$, et que $S_n=Y_1^2+\cdots+Y_n^2$. Quelle est la loi de $Y_1^n$ ? Qu'en déduit-on pour les variables $Y_1,\dots,Y_n$ ?

3. Calculer l'espérance de $\exp(-Y^2/2)$ lorsque $Y$ est une variable aléatoire réelle de loi $\mathbb{N}(0,\sigma^2)$. En déduire que, avec les notations de la question précédente,

$$\mathbb{E}(e^{-S_n/2}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{Tr}(C_n)}} \ .$$

4. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que $\mathbb{E}(e^{-S/2}) = 0$ si $\Sigma = \infty$, et en déduire la seconde implication ci-dessus.

## 4 processus AR(1)

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables i.i.d de carré intégrable et $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $|\phi| < 1$. Montrer qu'il existe une unique suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $\sup_n \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad X_n - \phi X_{n-1} = U_n \ .$$

## 5 Séries aléatoires

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d centrées, de carré intégrable. En notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $(S_n/(n^{1/2}(\log n)^{1/2+\varepsilon}))_n$ tend presque sûrement vers 0.

## 6 Lemme de Portmanteau

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $X$ une v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes.

(i) Pour toute fonction continue bornée $f$, $\lim\limits_{n\infty} \mathbb{E}_n(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

(ii) Pour toute fonction lipschitzienne bornée $f$, $\lim\limits_{n\infty} \mathbb{E}_n(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

(iii) Pour tout ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^d$, $\limsup\limits_{n\infty} \mathbb{P}_n(X_n \in F) \leqslant \mathbb{P}(X \in F)$.

(iv) Pour tout ensemble ouvert $O \subset \mathbb{R}^d$, $\liminf\limits_{n\infty} \mathbb{P}_n(X_n \in O) \geqslant \mathbb{P}(X \in O)$.

(v) Pour tout borélien $B$ tel que $\mathbb{P}(X \in \partial B) = 0$, $\lim\limits_{n\infty} \mathbb{P}_n(X_n \in B) = \mathbb{P}(X \in B)$.

## 7 Image continue et lemme de Slutsky

On suppose dans toute la suite que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, convergeant en loi vers une v.a. $X$.

1. Soit $g$ une fonction continue en tout point d'un sous-ensemble $C$ de $\mathbb{R}^d$ tel que $\mathbb{P}(X \in C) = 1$. Montrer que $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $g(X)$.
2. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires dans $\mathbb{R}$, convergeant en loi vers une constante $c$. Montrer que $(X_n, Y_n)$ converge en loi vers $(X, c)$.
3. Sous les mêmes conditions qu'à la question précédente, montrer que $X_nY_n$ converge en loi vers $cX$ et que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + c$.

## 8 Convergence des maxima

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables i.i.d. de fonction de répartition $F$ et soit $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Déterminer la fonction de répartition de $M_n$, puis la loi limite de :

1. $M_n/n^{1/\alpha}$, quand $F(x) = (1 - x^{-\alpha})\ \mathbb{1}_{\{x\geqslant 1\}}$ avec $\alpha > 0$ ;
2. $n^{1/\beta}M_n$, quand $F(x) = (1 - |x|^{\beta})\ \mathbb{1}_{\{-1\leqslant x\leqslant 0\}}$ avec $\beta > 0$ ;
3. $M_n - \ln n$, quand $F(x) = (1 - e^{-x})\ \mathbb{1}_{\{x\geqslant 0\}}$.