M2MFA
Grandes Déviations
2009-2010

Exercices – Chapitre 1

Cramér sur $\mathbb{R}$

Exercice 1.1 Calculer et dessiner l'allure des log-Laplace et transformées de Cramér des lois suivantes :

1. Poisson de paramètre $\mu > 0$
2. Exponentielle de paramètre $\mu > 0$
3. Géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$
4. Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ sur $\{a, b\}$ (i.e $p\delta_b + (1 - p\delta_a)$
5. Normale de moyenne $m \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 > 0$

Exercice 1.2 Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et f une fonction de $\mathcal{X}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est semi-continue inférieurement (s.c.i) si et seulement si, pour tout réel α, l'ensemble $\{f \leqslant \alpha\}$ des réels x tels que $f(x) \leqslant \alpha$ est fermé. On dit que f est semi-continue supérieurement (s.c.s) si et seulement si $-f$ est s.c.i.

1. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une collection de fonctions s.c.i de $\mathcal{X}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que la fonction $\sup_{i\in I} f_i$ est s.c.i.
2. Montrer que f est s.c.i si et seulement si :
$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \liminf_{y\to x} f(y) \geqslant f(x) \ ,$$
c'est à dire si et seulement si :
$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \sup_{V\in\mathcal{V}(x)} \inf_{y\in V\setminus\{x\}} f(y) \geqslant f(x) \ ,$$
où $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des voisinages de x (pour $\mathcal{T}$).
3. Montrer que f est continue sur $\mathcal{X}$ si et seulement si elle est s.c.i et s.c.s.

Exercice 1.3 Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$ et Λ sa log-Laplace.

1. Montrer que Λ est strictement convexe si et seulement si μ est non dégénérée.
2. Montrer que Λ est C^∞ sur l'intérieur de son domaine $\mathcal{D}_\Lambda$, et que :
$$\forall \lambda \in \overset{o}{\mathcal{D}}_\Lambda, \quad \Lambda'(\lambda) = \frac{\mathbb{E}(Ze^{\lambda Z})}{\mathbb{E}(e^{\lambda Z})} \ ,$$
où on a noté Z une variable aléatoire de loi μ.
3. Montrer que Λ^* est strictement convexe et C^∞ sur l'intérieur de $\Lambda'(\overset{o}{\mathcal{D}}_\Lambda)$.

Exercice 1.4

1. Soit $f : \mathbb{R} \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et s.c.i. Montrer que f est égale au supremum des fonctions affines qui sont inférieures à f.
2. Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$ et Λ sa log-Laplace. Montrer que $\Lambda^{**} = \Lambda$.

Exercice 1.5

1. Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$ de support inclus dans $[a, b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$. On note Λ la log-Laplace de μ et m son espérance.
   (a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $$\exp \Lambda(\lambda) \leqslant \frac{b-m}{b-a} e^{\lambda a} + \frac{m-a}{b-a} e^{\lambda b} \ .$$
   (b) En déduire que pour tout $x \in [a, b]$,
   $$\Lambda^*(x) \geqslant H\left(\frac{x-a}{b-a} \middle| \frac{m-a}{b-a}\right) \ ,$$
   où
   $$H(u|u_0) = u \log \frac{u}{u_0} + (1-u) \log \frac{1-u}{1-u_0} \ .$$
   (c) Discuter l'égalité
2. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\mathcal{F}_0$ soit triviale, on se donne une martingale centrée $(M_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant presque sûrement :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \ |M_{n+1} - M_n| \leqslant 1 \ .$$
   Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda M_n}) \leqslant (\cosh(\lambda))^n$, puis donner une majoration de $\mathbb{P}(M_n \leqslant nx)$.

M2MFA
Grandes Déviations
2009-2010

Exercices – Chapitre 2

Formalisme des grandes déviations

Exercice 2.1 Mettre le Théorème de Cramér sous la forme d'un PGD. Quand la fonction de taux est-elle bonne ?

Exercice 2.2 Soit $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ satisfaisant un PGD de bonne fonction de taux I sur $\mathcal{X}$ localement compact (c'est à dire tel que tout point possède un voisinage compact). Montrer que $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est exponentiellement tendue.

Exercice 2.3 Equivalence exponentielle. Soit $(\mathcal{X}, d)$ un espace métrique et $((Z_\varepsilon, \widetilde{Z}_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ une v.a à valeurs dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. On suppose que :

1. $(Z_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ suit un PGD de bonne fonction de taux I,
2. $(Z_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(\widetilde{Z}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sont *exponentiellement équivalentes*, c'est à dire que pour tout $\delta > 0$:

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(d(Z_\varepsilon, \widetilde{Z}_\varepsilon) > \delta) = -\infty \ .$$

Montrer que $(\widetilde{Z}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ suit un PGD de bonne fonction de taux I.

Exercice 2.4 Soit $(Z_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de v.a réelles satisfaisant un PGD de fonction de taux I. Soit $(X_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de v.a réelles telle que X_ε soit indépendant de Z_ε pour tout $\varepsilon > 0$, et X_ε vaut 1 (resp. -1) avec probabilité $\frac{1}{2}$ (resp. $\frac{1}{2}$). On pose $Y_\varepsilon = Z_\varepsilon + X_\varepsilon$. Montrer que $(Y_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ suit un PGD dont on précisera le fonction de taux.

Exercice 2.5 Montrer que la suite de lois $(\varepsilon\delta_{\frac{1}{\varepsilon}} + (1-\varepsilon)\delta_0)_{\varepsilon>0}$ suit un PGD faible, mais pas de PGD fort.

Exercice 2.6 Soit $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une collection de probas boréliennes sur $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ satisfaisant un PGD de fonction de taux I. Soit O un ouvert de $\mathcal{X}$ tel que I soit continue sur $\overline{O}$ pour la topologie induite sur $\overline{O}$, et :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mu_\varepsilon(O) > 0 \ .$$

Montrer que $(\mu_\varepsilon(.|O))_{\varepsilon>0}$ suit un PGD et donner sa fonction de taux.

Exercice 2.7 Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a gaussiennes où $Z_n \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $Y_n = f(Z_n)$. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit un PGD de vitesse n, et donner la fonction de taux lorsque $f(x) = |\cos x|^\pi$.

Exercice 2.8 Curie-Weiss en champ moyen, avec champ magnétique externe.
Soient $\beta > 0$ et $h \in \mathbb{R}$. On définit des probabilités $\nu_{n,\beta,h}$ sur $\{-1,1\}^n$ par :

$$\forall x \in \{-1,1\}^n, \quad \nu_{n,\beta,h}(x) = \frac{e^{n\left(\beta\left(\frac{S_n}{n}\right)^2 + h\frac{S_n}{n}\right)}}{\mathcal{Z}_{n,\beta,h}} ,$$

où $\mathcal{Z}_{n,\beta,h}$ est la constante de normalisation et $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$. Enfin, on note $\mu_{n,\beta,h}$ la loi de la magnétisation moyenne S_n/n sous $\nu_{n,\beta,h}$

1. Montrer que $(\mu_{n,\beta,h})_{n\in\mathbb{N}}$ suit un PGD de vitesse n.
2. Commenter qualitativement les PGD obtenus en fonction de la position de (β, h) dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

M2MFA
Grandes Déviations
2009-2010

Exercices – Chapitre 3

Gärtner-Ellis-Baldi

Exercice 3.1 Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites indépendantes de variables aléatoires i.i.d symétriques de Bernoulli sur $\{-1,1\}$. Dans les deux cas suivants, on définira une suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$. On demande d'examiner la convergence de Y_n/n, l'application éventuelle du théorème de Gärtner-Ellis et l'existence d'un principe de grandes déviations.

1. Soient :
$$S_n^+ = \mathrm{card}\{j \in \{1,\dots,n\} : X_j = 1\} \quad \text{et} \quad S_n^- = \mathrm{card}\{j \in \{1,\dots,n\} : X_j = -1\} \ .$$
On définit Y_n par :
$$Y_n = \frac{1+\varepsilon_n}{2} S_n^+ - \frac{1-\varepsilon_n}{2} S_n^- \ .$$
2. Soient :
$$\Sigma_n^+ = \begin{cases} n & \text{si} \quad \forall j \in \{1,\dots,n\},\ X_j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$\Sigma_n^- = \begin{cases} -n & \text{si} \quad \forall j \in \{1,\dots,n\},\ X_j = -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
On définit Y_n par :
$$Y_n = \frac{1+\varepsilon_n}{2} \Sigma_n^+ + \frac{1-\varepsilon_n}{2} \Sigma_n^- \ .$$

Exercice 3.2 Soit $(N(n))_{n\in\mathcal{N}}$ une suite de variables aléatoires dans $\mathbb{N}$. On suppose que la limite suivante existe pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\Lambda(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}(e^{\lambda N(n)}) \ ,$$
et que Λ est différentiable sur $\mathbb{R}$. Soit $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d dans $\mathbb{R}^d$, indépendante de $(N(n))_{n\in\mathcal{N}}$, de log-Laplace finie partout Λ_X. On note μ_n la loi de :
$$\Sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N(n)} X_j \ .$$
Montrer que μ_n suit un PGD de vitesse n et donner sa fonction de taux.

Exercice 3.3 Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus gaussien stationnaire réel centré de covariance $\gamma(k) := \mathbb{E}(X_t X_{t+k})$. On suppose que ce processus a une puissance finie, définie par :
$$P := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n+1}^{n-1} \gamma(k) \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \ .$$
Soit μ_n la loi de $\overline{S_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$. Montrer que μ_n satisfait un PGD de vitesse n, dont on donnera la fonction de taux.

Exercice 3.4

Soit $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d centrées. Soit Λ_Z la log-Laplace commune des Z_t. On suppose que $\Lambda_Z(\lambda)$ est fini pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(\psi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels telle que :

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\psi_i| < \infty \ .$$

On définit un processus stationnaire X par :

$$X_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \psi_i Z_{t-i} \qquad \forall t \in \mathbb{Z} \ .$$

Soit μ_n la loi de $\overline{S_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$. Montrer que μ_n satisfait un PGD dont on donnera la fonction de taux.

Exercice 3.5 Soit μ la loi sur $\mathbb{R}$ de densité :

$$g(x) = C_{\gamma,\alpha} e^{-\gamma x} x^{-\alpha} \ \mathbb{1}_{x\geqslant 1} \ ,$$

où C est une constante de normalisation, et $\gamma > 0$ et $\alpha > 0$ sont deux paramètres. On note Λ la log-Laplace de μ.

1. Déterminer $\mathcal{D}_\Lambda$ et $\Lambda'(\overset{o}{\mathcal{D}}_\Lambda)$.
2. Trouver $\mathcal{D}_{\Lambda^*}$, le domaine de Λ^*, et $\mathcal{F}$, l'ensemble des points exposés x de Λ^* tels qu'il existe un hyperplan d'appui $\eta \in \overset{o}{\mathcal{D}}_\Lambda$ pour x.
3. Comparer l'application des théorèmes de Gärtner-Ellis et de Cramér à la suite des lois de $\sum_{i=1}^n X_i/n$, où les X_i sont i.i.d de loi μ.

Exercice 3.6 Grandes déviations pour les fonctionnelles additives d'une chaîne de Markov

Soit $\Sigma = \{1, \ldots, N\}$ un ensemble d'états fini et P une matrice de transition irréductible sur Σ. On fixe une fonction f de Σ dans $\mathbb{R}^d$, et on s'intéresse aux grandes déviations de :

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i) \ .$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, on définit une matrice de transition irréductible P_λ par :

$$P_\lambda(i,j) = P(i,j)e^{\langle \lambda, f(j)\rangle} \qquad \forall i,\, j \in \Sigma \ .$$

On note $\rho(P_\lambda)$ le rayon spectral de la matrice P_λ. Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait un principe de grandes déviations de bonne fonction de taux I définie par :

$$\forall z \in \mathbb{R}^d, \quad I(z) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^d} \{\langle \lambda, z\rangle - \log \rho(P_\lambda)\} \ .$$

M2MFA
Grandes Déviations
2009-2010

Exercices – Chapitre 4

Cramér dans un e.v.t localement convexe

Exercice 4.1 Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}^d$. On note Λ la log-Laplace de μ. On note μ_n la loi de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ où les X_i sont i.i.d de loi μ. Montrer qu'il y a équivalence entre les quatre propriétés suivantes :

(i) Λ est finie dans un voisinage de l'origine.

(ii) La suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est exponentiellement tendue.

(iii) La suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait un principe de grande déviation (fort) gouverné par une bonne fonction de taux.

(iv) La suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait un principe de grande déviation (fort) gouverné par Λ^* et Λ^* est une bonne fonction de taux.

Exercice 4.2 Soit $\mathcal{X}$ un e.v.t localement convexe et f une fonction s.c.i et convexe de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. On veut montrer que $f^{**} = f$, où f^{**} est la transformée de Fenchel-Legendre de f^*. Le théorème suivant sera utile :

Théorème 1 (Hahn-Banach) *Soit $\mathcal{Y}$ un espace vectoriel topologique localement convexe. Soient A et B deux sous-ensembles convexes, disjoints et non vides de $\mathcal{Y}$. Si A est compact et B est fermé, il existe $\lambda \in \mathcal{Y}^*$, a et b dans $\mathbb{R}$, tels que :*

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B \qquad \langle \lambda, x\rangle \leqslant a < b \leqslant \langle \lambda, y\rangle \ .$$

1. Montrer que f^{**} est égal au supremum des fonctions continues affines inférieures à f.

   Dans la suite, on suppose que f n'est pas identiquement égale à $+\infty$.

2. Soit $x_0 \in \mathcal{X}$ tel que $f(x_0) < \infty$ et $r_0 < f(x_0)$. On note F l'épigraphe de f :
$$F = \{(x,r) \in \mathcal{X}\times\mathbb{R} \ : \ f(x) \leqslant r\} \ .$$
   Montrer que F est un convexe fermé non vide.

3. Montrer qu'il existe un hyperplan fermé séparant (x_0, r_0) de F, et que cet hyperplan ne peut être de la forme $P\times\mathbb{R}$ avec P un hyperplan fermé de $\mathcal{X}$.

4. En déduire que si $f(x_0) < \infty$, $f(x_0) = f^{**}(x_0)$, et qu'il existe au moins une fonction continue affine qui est inférieure à f.

5. Soit $x_1 \in \mathcal{X}$ tel que $f(x_1) = +\infty$, et $r_1 \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un hyperplan fermé séparant (x_1, r_1) de F. Si cet hyperplan n'est pas de la forme $P\times\mathbb{R}$ avec P un hyperplan fermé de $\mathcal{X}$, montrer que $f^{**}(x_1) \geqslant r_1$.

6. Suppons que l'hyperplan fermé séparant (x_1, r_1) de F soit de la forme $P\times\mathbb{R}$ avec P un hyperplan fermé de $\mathcal{X}$. Montrer qu'il existe une fonction affine p sur $\mathcal{X}$ telle que $p(x_1) > 0$ et $p(y) = 0$ pour tout $y \in P$.

7. Soit q une fonction continue affine inférieure à f. En considérant la fonction $q + \alpha p$ pour α assez grand, montrer que $f^{**}(x_1) \geqslant r_1$.

8. Conclure.

M2MFA
Grandes Déviations
2009-2010

Exercices – Chapitre 5

Sanov

Exercice 5.1 On note $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{R}^2$). On munit ces espaces de la topologie de la convergence étroite. Pour $x \in \mathbb{R}$ (resp. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$), on note δ_x (resp. $\delta_{x,y}$) la masse de Dirac en x (resp. en (x, y)).

1. Montrer que l'application $\mu \mapsto \mu \otimes \mu$ de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^2)$ est continue.
2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de v.a.i.i.d à valeurs dans $\mathbb{R}$ et :
$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i} \ .$$
   (a) Montrer que $U_n = L_n \otimes L_n$ satisfait un PGD dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^2)$ dont on donnera la fonction de taux.
   (b) En déduire que pour tout $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, la suite de variables aléatoires :
$$\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant n} h(X_{k_1}, X_{k_2}) \quad (n \geqslant 1)$$
   satisfait un PGD sur $\mathbb{R}$ dont on donnera la fonction de taux.
3. Montrer que :
$$U'_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leqslant k_1 \neq k_2 \leqslant n} \delta_{X_{k_1}, X_{k_2}} \quad (n \geqslant 2)$$
   satisfait un PGD dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^2)$ dont on donnera la fonction de taux. On pourra utiliser l'exercice 2.3 et utiliser la distance de Lévy-Prohorov, qui métrise la convergence étroite dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$:
$$d(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 \quad \text{t.q.} \quad \mu(F) \leqslant \nu(F^\varepsilon) + \varepsilon\} \ ,$$
   où $F^\varepsilon = \{x \quad \text{t.q.} \quad \exists y \in F : \|x - y\| \leqslant \varepsilon\}$.
4. En déduire que pour tout $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, la suite de variables aléatoires :
$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leqslant k_1 \neq k_2 \leqslant n} h(X_{k_1}, X_{k_2}) \quad (n \geqslant 2)$$
   satisfait un PGD sur $\mathbb{R}$ dont on donnera la fonction de taux.

Exercice 5.2 On veut montrer que le théorème de Sanov peut être déduit de celui de Gärtner-Ellis-Baldi. Soient $X_1, \ldots, X_n$ de loi μ sur un espace Polonais Σ. On note μ_n la loi de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$. On note Λ la log-Laplace de la loi de δ_{X_1}. On rappelle que la tension exponentielle de (μ_n) (de vitesse n) a été vue en cours, ainsi que l'identification de Λ^* à $K(., \mu)$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points exposés ν de Λ^* tels qu'il existe un hyperplan d'appui $f \in \mathcal{C}_b(\Sigma)$ tel que :
$$\exists \gamma > 1, \ \Lambda(\gamma f) < \infty \ .$$

1. Montrer que si $\nu \in \mathcal{M}_1(\Sigma)$ est telle que $\nu = g\mu$ avec $g \in \mathcal{C}_b(\Sigma)$ et $g > \alpha > 0$ pour un réel $\alpha > 0$, alors $\nu \in \mathcal{F}$.

2. En déduire le théorème de Sanov par une application de celui de Gärtner-Ellis-Baldi.

Exercice 5.3 Un espace est *normal* si et seulement si pour tout couple de fermés (A, B) disjoints il existe une fonction continue bornée qui vaut 0 sur A et 1 sur B (ce n'est pas la définition standard, mais c'est équivalent par le lemme d'Urysohn). Soit Σ un espace normal. On veut démontrer que $\mathcal{M}(\Sigma)$ muni de la topologie faible* est métrisable si et seulement si Σ est de cardinal fini.

1. Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{F}$ un espace vectoriel de formes linéaires de E dans $\mathbb{R}$ qui sépare E, c'est à dire :

$$\forall x \neq y \in E, \quad \exists f \in \mathcal{F} \quad f(x) \neq f(y) \ .$$

   On munit E de la topologie la moins fine rendant continues les fonctions de $\mathcal{F}$. Montrer que E est métrisable si et seulement si $\mathcal{F}$ est de dimension (algébrique) au plus dénombrable. On pourra utiliser le résultat suivant : un espace vectoriel topologique de Hausdorff est métrisable si et seulement si l'origine possède une base dénombrable de voisinages.

2. Soit Σ un espace normal de cardinal infini. Montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont n points distincts, il existe n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ continues bornées telles que :

$$\forall i, \quad f_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \neq j \quad f_i(x_j) = 0 \ .$$

   En déduire que $\mathcal{C}_b(\Sigma)$ n'est pas de dimension algébrique finie.

3. Conclure en utilisant le fait qu'un espace de Banach est soit de dimension finie, soit de dimension non dénombrable.

M2MFA
Grandes Déviations
2009-2010

Exercices – Chapitre 6

Schilder

Exercice 6.1 Soit B un mouvement brownien sur $[0,1]$ et g une fonction continue de $[0,1]$ dans $]0,+\infty[$. Montrer que :

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A^2} \log \mathbb{P}(\exists t \in [0,1] \text{ t.q. } B_t \geqslant Ag(t)) = -\inf_{u\in]0,1]} \frac{g(u)^2}{2u} .$$

On pourra considérer l'ensemble :

$$G = \{f \in C([0,1]) \text{ t.q. } f(0) = 0 \text{ et } \exists t \in [0,1],\ f(t) \geqslant g(t)\} ,$$

et montrer que c'est un fermé de $C([0,1])$. Enfin, pour évaluer l'infimum de la fonction de taux du brownien sur G, on pourra considérer les fonctions (f_u) définies par :

$$\forall u \in]0,1], \quad f_u(t) = \frac{g(u)}{u}(t \wedge u) .$$

Exercice 6.2 Soit T un espace métrique compact. On note $C(T)$ l'ensemble des applications continues de T dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in T} |f(t)|$. C'est un espace de Banach séparable. On considère $(Z_t)_{t\in T}$ un processus gaussien centré sur T, défini sur un espace de probabilité Ω et dont les trajectoires appartiennent presque sûrement à $C(T)$. On note Q la covariance associée :

$$Q(t,t') = \mathbb{E}(Z_t Z_{t'}) .$$

On admettra que Q est continue sur $T \times T$ et on supposera dans la suite que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{E}(e^{\alpha\|Z\|_\infty}) < \infty .$$

1. Montrer que $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$, la suite des lois de $\frac{1}{\sqrt{n}}Z$ satisfait un PGD sur $C(T)$. Le reste de l'exercice est destiné à expliciter la fonction de taux.
2. Soit $\mathbb{H}$ la cloture dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ de l'espace vectoriel engendré par $(Z_t)_{t\in T}$. Montrer que $\mathbb{H}$ est égal à la cloture dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ de $\{\langle \nu, Z\rangle \text{ t.q. } \nu \in \mathcal{M}(T)\}$ où $\mathcal{M}(T)$ est l'ensemble des mesures signées sur T.
3. Montrer que la fonction Φ définie par :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{H} & \to & C(T) \\ Y & \mapsto & (t \mapsto \mathbb{E}(YZ_t)) \end{array} \right.$$

   est bien définie et est une injection.
   On note $H_Q = \Phi(\mathbb{H})$ et on le munit d'une structure hilbertienne par :

$$\langle h_1, h_2\rangle_Q := \mathbb{E}(\Phi^{-1}(h_1)\Phi^{-1}(h_2)) .$$

   On va chercher à montrer que :

$$\Lambda_Z^*(f) = \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{1}{2}\|f\|_Q^2 & \text{si} & f \in H_Q \\ +\infty & \text{sinon} & \end{array} \right. \tag{1}$$

4. Soit $f \in C(T)$ telle que $\Lambda_Z^*(f) < \infty$.
   (a) Montrer que pour toute mesure $\nu \in \mathcal{M}(T)$,
   $$|\langle \nu, f \rangle| \leqslant \sqrt{2\Lambda_Z^*(f)\mathbb{E}(\langle \nu, Z \rangle^2)} \ .$$
   (b) Montrer qu'on peut définir une forme linéaire F sur $\{\langle \nu, Z \rangle \text{ t.q. } \nu \in \mathcal{M}(T)\}$ par la formule :
   $$F(\langle \nu, Z \rangle) = \langle \nu, f \rangle \ .$$
   (c) Montrer que la forme linéaire F est continue et peut être étendue de manière unique sur $\mathbb{H}$.
   (d) En déduire qu'il existe $Y \in \mathbb{H}$ tel que pour tout $\nu \in \mathcal{M}(T)$,
   $$\langle \nu, f \rangle = \mathbb{E}(Y \langle \nu, Z \rangle) \ .$$
   (e) Conclure que $f \in H_Q$ et que pour tout $f \in H_Q$, on a :
   $$\Lambda_Z^*(f) \geqslant \frac{1}{2}\|f\|_Q^2 \ .$$
5. Finir le calcul de Λ_Z^* et énoncer le PGD pour $(\mu_n)_{n \geqslant 1}$.

M2MFA
Grandes Déviations
2009-2010

Solutions

Solution 1.1:

1. $\Lambda(\lambda) = \mu(e^\lambda - 1)$ et $\Lambda^*(x) = \mu\left(\frac{x}{\mu}\log\frac{x}{\mu} - \frac{x}{\mu} + 1\right)$.
2. $$\Lambda(\lambda) = \begin{cases} \log\frac{\mu}{\mu-\lambda} & \text{si} \quad \lambda \leqslant \mu \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \Lambda^*(x) = \begin{cases} x\mu - 1 - \log(x\mu) & \text{si} \quad x > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$
3. $$\Lambda(\lambda) = \begin{cases} \log\frac{pe^\lambda}{1-(1-p)e^\lambda} & \text{si} \quad \lambda < \log\frac{1}{1-p} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$
   et
   $$\Lambda^*(x) = \begin{cases} (x-1)\log\frac{x-1}{1-p} - x\log x - \log p & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$
4. $$\Lambda(\lambda) = \log\left((1-p)e^{\lambda a} + pe^{\lambda b}\right)$$
   et
   $$\Lambda^*(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}\log\frac{x-a}{p(b-a)} + \frac{b-x}{b-a}\log\frac{b-x}{(1-p)(b-a)} & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$
5. $\Lambda(\lambda) = \lambda m + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}$ et $\Lambda^*(x) = \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$.

$\square$

Solution 1.2:

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\{\sup_{i\in I} f_i \leqslant \alpha\} = \bigcap_{i\in I}\{f_i \leqslant \alpha\} .$$
   Une intersection de fermés étant fermée, on en déduit que si toutes les f_i sont s.c.i, la fonction $\sup_{i\in I} f_i$ l'est aussi.
2. Soit f une fonction s.c.i, et $x \in \mathcal{X}$ tel que $f(x) \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. L'ensemble $\{f > f(x) - \varepsilon\}$ est un ouvert contenant x, donc il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \subset \{f > f(x) - \varepsilon\}$, ce qui implique :
   $$\inf_{y\in V\setminus\{x\}} f(y) \geqslant f(x) - \varepsilon .$$
   Donc :
   $$\sup_{V\in\mathcal{V}(x)} \inf_{y\in V\setminus\{x\}} f(y) \geqslant f(x) - \varepsilon ,$$
   et comme ceci est valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a :
   $$\sup_{V\in\mathcal{V}(x)} \inf_{y\in V\setminus\{x\}} f(y) \geqslant f(x) .$$

Si x est tel que $f(x) = -\infty$, la dernière inégalité est triviale. Enfin, si x est tel que $f(x) = +\infty$, on peut refaire le même argument que ci-dessus avec l'ensemble $\{f > A\}$, pour A réel quelconque. Réciproquement, supposons que pour tout x de $\mathcal{X}$ on ait :

$$\sup_{V \in \mathcal{V}(x)} \inf_{y \in V \setminus \{x\}} f(y) \geqslant f(x) \ .$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel fixé, et x tel que $f(x) > \alpha$. L'hypothèse implique qu'il existe un voisinage V de x tel que :

$$\inf_{y \in V \setminus \{x\}} f(y) > \alpha \ ,$$

et donc que $V \subset \{f > \alpha\}$. On a donc montré que $\{f > \alpha\}$ est un ouvert, pour tout α donc f est s.c.i.

3. Soit f une fonction continue et $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $]-\infty, \alpha]$ et $[\alpha, +\infty[$ sont fermés, les ensembles $\{f \geqslant \alpha\}$ et $\{f \leqslant \alpha\}$ sont fermés, donc f est s.c.i et s.c.s. Réciproquement, soit f une fonction s.c.i et s.c.s. Soit $x \in \mathcal{X}$ et $\varepsilon > 0$. Par la propriété montrée précédemment, il existe un voisinage V_1 de x tel que :

$$\forall y \in V_1, \quad f(y) \geqslant f(x) - \varepsilon \ .$$

De même, comme $-f$ est s.c.i, il existe un voisinage V_2 de x tel que :

$$\forall y \in V_2, \quad f(y) \leqslant f(x) + \varepsilon \ .$$

Ainsi, sur $V_1 \cap V_2$, on a :

$$\forall y \in V_1 \cap V_2, \quad f(x) - \varepsilon \leqslant f(y) \leqslant f(x) + \varepsilon \ ,$$

et f est donc continue en x.

□

Solution 1.5:

1. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant la convexité de la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$, on a :

$$\forall x \in [a, b], \quad e^{\lambda x} = e^{\lambda\left(a\frac{b-x}{b-a} + b\frac{x-a}{b-a}\right)} \leqslant \frac{b-x}{b-a} e^{\lambda a} + \frac{x-a}{b-a} e^{\lambda b} \ ,$$

ce qui donne le résultat en intégrant contre la loi μ. Remarquons qu'il y a égalité

(b) Soit ν la loi de Bernoulli $\frac{b-m}{b-a}\delta_a + \frac{m-a}{b-a}\delta_b$. On sait que (cf. Exercice 1.1) :

$$\Lambda_\nu^*(x) = H\left(\frac{x-a}{b-a} \middle| \frac{m-a}{b-a}\right) \ ,$$

or on vient de montrer que $\Lambda \leqslant \Lambda\nu$. Donc $\Lambda^* \geqslant \Lambda\nu^*$.

(c) Si $\Lambda^* = \Lambda\nu^*$, alors $\Lambda = \Lambda\nu$ (cf. Exercice 1.4), et ainsi $\mu = \nu$.

2. Puisque $|M_{n+1} - M_n| \leqslant 1$ presque sûrement pour tout $n \geqslant 1$, on a, en utilisant le 1a), avec $m = 0$, $a = -1$ et $b = 1$:

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda(M_n - M_{n-1})} | \mathcal{F}_{n-1}\right) \leqslant \cosh(\lambda) \quad \text{p.s} \ .$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{\lambda M_{n+1}}) &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n+1} e^{\lambda(M_i - M_{i-1})}\right] , \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n+1} e^{\lambda(M_i - M_{i-1})} | \mathcal{F}_n\right)\right] , \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda(M_i - M_{i-1})} \mathbb{E}\left(e^{\lambda(M_{n+1} - M_n)} | \mathcal{F}_n\right)\right] , \\
&\leqslant \cosh(\lambda)\mathbb{E}(e^{\lambda M_n}) ,
\end{aligned}$$

d'où, par récurrence :

$$\mathbb{E}(e^{\lambda M_n}) \leqslant (\cosh(\lambda))^n .$$

Donc, en utilisant Chernoff :

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant nx) \leqslant e^{-n \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^-} \{\lambda x - \cosh(\lambda)\}} .$$

Pour $x \leqslant 0$, on obtient :

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant nx) \leqslant e^{-n(x \log(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1})} .$$

Pour $x \geqslant 0$, la borne est triviale, égale à 1.

□

Solution 2.1: Commençons par la borne sup. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$. On note m la moyenne de la loi μ (finie par hypothèse), μ_n la loi de S_n/n et on pose :

$$m_1 = \sup\{F \cap]-\infty, m]\} \qquad \text{et} \qquad m_2 = \inf\{F \cap [m, +\infty[\} .$$

Comme F est fermé, remarquons que si $F \cap]-\infty, m] \neq \emptyset$, $m_1 \in F$, et de même, si $F \cap [m, +\infty[\neq \emptyset$, $m_2 \in F$. Faisons le raisonnement lorsque $F \cap]-\infty, m] \neq \emptyset$ et $F \cap [m, +\infty[\neq \emptyset$, les autres cas étant similaires. Par le lemme sympa puis le théorème de Cramér,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(F) &\leqslant \max\{\limsup_{n\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(]-\infty, m_1]), \limsup_{n\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n([m, +\infty[)\} , \\
&\leqslant \max\{-\Lambda_\mu^*(m_1), -\Lambda_\mu^*(m_2)\} , \\
&\leqslant -\inf_{x \in F} \Lambda_\mu^*(x) .
\end{aligned}$$

Pour la borne inf, utiliser le lemme à l'intérieur du théorème de Cramér, ou bien utiliser une hypothèse supplémentaire : supposer que Λ est finie dans un voisinage de 0. Plus précisément, en profiter pour voir que si $\Lambda(\lambda) = +\infty$ pour tout $\lambda > 0$, alors $\Lambda^*(x) = 0$ pour tout $x \geqslant m$, et si $\Lambda(\lambda) = +\infty$ pour tout $\lambda < 0$, alors $\Lambda^*(x) = 0$ pour tout $x \leqslant m$. Montrer aussi que $\Lambda^*(x) > 0$ pour tout $x > m$ si $\Lambda(\lambda) < \infty$ pour au moins un $\lambda > 0$, et idem de l'autre côté. □

Solution 2.2: Pour tout x, notons K_x un voisinage compact de x et V_x un voisinage ouvert de x inclus dans K_x. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. L'ensemble $\{I \leqslant \alpha\}$ est compact, recouvert par l'union des V_x. On peut donc extraire un recouvrement fini :

$$\{I \leqslant \alpha\} \subset \bigcup_{i=1}^{N} V_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^{N} K_{x_i} ,$$

avec $x_1, \ldots, x_N$ dans $\{I < \alpha\}$. Posons $K_\alpha = \bigcup_{i=1}^N K_{x_i}$. On a :

$$\limsup \varepsilon \log \mu_\varepsilon(K_\alpha^c) \leqslant -\inf_{\overline{K_\alpha^c}} I \ .$$

Puisque $\bigcup_{i=1}^N V_{x_i}$ est ouvert,

$$\overline{K_\alpha^c} \subset \left(\bigcup_{i=1}^N V_{x_i} \right)^c \subset \{I > \alpha\} \ ,$$

donc :

$$\limsup \varepsilon \log \mu_\varepsilon(K_\alpha^c) \leqslant -\alpha \ .$$

□

Solution 2.3: *Borne inf.* Soit O un ouvert, $x \in O$ et $\delta > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, \delta) \subset O$.

$$\mathbb{P}(\widetilde{Z}_\varepsilon \in O) \geqslant \mathbb{P}(\widetilde{Z}_\varepsilon \in \mathcal{B}(x, \delta)) \geqslant \mathbb{P}(Z_\varepsilon \in \mathcal{B}(x, \frac{\delta}{2})) - \mathbb{P}(d(\widetilde{Z}_\varepsilon, Z_\varepsilon) > \frac{\delta}{2}) \ ,$$

Comme $\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(d(Z_\varepsilon, \widetilde{Z}_\varepsilon) > \delta/2) = -\infty$,

$$\begin{aligned}
\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(\widetilde{Z}_\varepsilon \in O) &= \liminf \varepsilon \log \left(\mathbb{P}(\widetilde{Z}_\varepsilon \in O) + \mathbb{P}(d(\widetilde{Z}_\varepsilon, Z_\varepsilon) > \frac{\delta}{2}) \right) \ , \\
&\geqslant \liminf \varepsilon \log \mathbb{P}(Z_\varepsilon \in \mathcal{B}(x, \frac{\delta}{2})) \ , \\
&\geqslant -\inf_{\mathcal{B}(x, \frac{\delta}{2})} I \ , \\
&\geqslant -\inf_O I \ .
\end{aligned}$$

Borne sup. Soit F un fermé. On note $F^\delta = \{x \text{ t.q. } d(x, F) \leqslant \delta\}$. En utilisant le lemme sympa, pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\widetilde{Z}_\varepsilon \in F) &\leqslant \mathbb{P}(Z_\varepsilon \in F^\delta) + \mathbb{P}(d(\widetilde{Z}_\varepsilon, Z_\varepsilon) > \delta) \ , \\
\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(\widetilde{Z}_\varepsilon \in F) &\leqslant \limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(Z_\varepsilon \in F^\delta) \ , \\
&\leqslant -\inf_{F^\delta} I \ .
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(\widetilde{Z}_\varepsilon \in F) \leqslant -\sup_{\delta > 0} \inf_{F^\delta} I \ .$$

Il reste à montrer que $\sup_{\delta>0} \inf_{F^\delta} I \geqslant \inf_F I$. Posons $\gamma = \sup_{\delta>0} \inf_{F^\delta} I$. Si $\gamma = +\infty$, le résultat est clair. Supposons que γ soit fini, fixons $\eta > 0$ et posons $\alpha = \gamma + \eta$. Les ensembles $(F^\delta \cap \{I \leqslant \alpha\})_{\delta>0}$ forment une suite de compact emboîtés. Leur intersection $F \cap \{I \leqslant \alpha\}$ est donc non vide, ce qui implique que $\inf_F I \leqslant \alpha = \gamma + \eta$. Ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$, cela prouve l'inégalité désirée.

□

Solution 2.4: Soit A un ensemble mesurable.

$$\mathbb{P}(Y_\varepsilon \in A) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_\varepsilon \in A - 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_\varepsilon \in A + 1) \ , \tag{2}$$

donc, par le lemme sympa,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(Y_\varepsilon \in A) \leqslant -\min\{\inf_{A-1} I, \inf_{A+1} I\} = -\inf_{x \in \overline{A}} J(x) \ ,$$

où on a posé $J(x) = \min\{I(x+1), I(x-1)\}$. De plus, à partir de 2,

$$\begin{aligned}
\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(Y_\varepsilon \in A) &\geqslant \max\{\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(X_\varepsilon \in A-1), \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(X_\varepsilon \in A+1)\} \ , \\
&\geqslant -\min\{\inf_{\overset{o}{A-1}} I, \inf_{\overset{o}{A+1}} I\} \ , \\
&\geqslant -\inf_{x\in \overset{o}{A}} J(x) \ .
\end{aligned}$$

□

Solution 2.5: Soit K un compact de $\mathbb{R}$. On a :

$$\limsup_{\varepsilon\to} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(K) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \in K \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in O$. On a :

$$\liminf_{\varepsilon\to} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(O) \geqslant 0 \ .$$

Donc, en posant :

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

on obtient un PGD faible pour μ_ε, de fonction de taux I (la borne inf est triviale pour O ouvert ne contenant pas 0. Supposons maintenant que μ_ε suive un PGD fort de fonction de taux J. Soit F le fermé $[1, +\infty[$. La borne sup du PGD fort donne :

$$\inf_F J \leqslant -\limsup \varepsilon \log \varepsilon = 0 \ ,$$

mais la borne inf sur $]a, b[$ avec $0 < a < b$ donne :

$$\inf_{]a,b[} J = +\infty \ .$$

D'où $\inf_{]0.5,+\infty[} J = +\infty$, ce qui contredit $\inf_{[1,+\infty[} J \leqslant 0$. □

Solution 2.6:

Remarquons tout d'abord que $\inf_O I = \inf_{\overline{O}} I$, puisque I est continue sur tout $\overline{O}$ pour la topologie induite sur $\overline{O}$. Par conséquent,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(\overline{O}) = -\inf_{\overline{O}} I = -\inf_O I \ .$$

Soit A un ensemble mesurable. En remarquant que $\overline{A \cap O} \subset \overline{A} \cap \overline{O}$, et en utilisant la borne supérieure du PGD pour μ_ε,

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(A|O) &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(A \cap O) + \inf_{\overline{O}} I \ , \\
&\leqslant -\inf_{\overline{A\cap O}} I + \inf_{\overline{O}} I \ , \\
&\leqslant -\inf_{\overline{A}\cap\overline{O}} I + \inf_{\overline{O}} I \ , \\
&= -\inf_{\overline{A}} J \ ,
\end{aligned}$$

en posant :

$$J(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x \notin \overline{O} \\ I(x) - \inf_{\overline{O}} I & \text{si} \quad x \in \overline{O} \end{cases}$$

On vérifie facilement que J est positive et s.c.i. Pour la borne inf, en remarquant que $\overset{o}{A} \cap O \subset A \overset{o}{\cap} O$:

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(A|O) &= \liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(A \cap O) + \inf_{\overline{O}} I \ , \\ &\geqslant -\inf_{A \overset{o}{\cap} O} I + \inf_{\overline{O}} I \ , \\ &\geqslant -\inf_{\overset{o}{A} \cap O} I + \inf_{\overline{O}} I \ , \\ &= -\inf_{\overset{o}{A} \cap \overline{O}} I + \inf_{\overline{O}} I \ , \\ &= -\inf_{\overset{o}{A}} J \ , \end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité découle du fait que I soit continue sur tout $\overline{O}$ pour la topologie induite sur $\overline{O}$. On a donc montré que $\mu_\varepsilon(.|O)$ suit un PGD de fonction de taux J. □

Solution 2.7: En loi, $Z_n \sim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ avec X_i i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Donc, en utilisant le théorème de Cramér, (Z_n) suit un PGD de vitesse n et de fonction de taux $I(x) = \frac{x^2}{2}$. Donc, f étant continue, le principe de contraction nous donne que $Y_n = f(Z_n)$ suit un PGD de vitesse n et de fonction de taux J, avec :

$$J(x) = \inf_{f^{-1}(\{x\})} I \ .$$

Dans le cas où $f(x) = |\cos x|^\pi$, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f(y) = x \quad &\Leftrightarrow \quad |\cos y| = x^{\frac{1}{\pi}} \ , \\ &\Leftrightarrow \quad y \in (\arccos x^{\frac{1}{\pi}} + \pi\mathbb{Z}) \cup (-\arccos x^{\frac{1}{\pi}} + \pi\mathbb{Z}) \ , \end{aligned}$$

d'où :

$$J(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\arccos x^{1/\pi})^2 & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

□

Solution 3.1:

1. Comme $S_n^+ + S_n^- = n$,

$$\frac{1}{n} Y_n = \frac{\varepsilon_n}{2} + \frac{1}{n}(S_n^+ - \frac{n}{2}) \ .$$

Comme $\frac{1}{n}(S_n^+ - \frac{n}{2})$ converge en loi (et presque sûrement) vers 0, $\frac{1}{n}Y_n$ converge en loi vers $\frac{1}{2}(\delta_{-\frac{1}{2}} + \delta_{+\frac{1}{2}})$. Examinons l'application de Gärtner-Ellis-Baldi. Notons Λ_n la log-Laplace de la loi de Y_n/n (qui a pour domaine $\mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} \Lambda_n(n\lambda) &= \log \mathbb{E}(e^{\lambda(\frac{n\varepsilon_n}{2} + S_n^+ - \frac{n}{2})}) \ , \\ &= \log \mathbb{E}(e^{\lambda(\frac{n\varepsilon_n}{2})}) + \log \mathbb{E}(e^{\lambda S_n^+ - \frac{n}{2})}) \ , \\ &= \log\left(\frac{1}{2}(e^{n\lambda/2} + e^{-n\lambda/2})\right) + n \log\left(\frac{1}{2}(e^{\lambda/2} + e^{-\lambda/2})\right) \ . \end{aligned}$$

D'où :

$$\Lambda(\lambda) := \lim_{n\infty} \frac{1}{n}\Lambda_n(n\lambda) = \frac{|\lambda|}{2} + \log(\cosh(\lambda)) \ .$$

Λ est dérivable sur $\mathbb{R} \neq 0$, mais n'est pas dérivable en 0 (donc les hypothèses de Gärtner-Ellis ne sont pas vérifiées). Par contre, les hypothèses de Gärtner-Ellis-Baldi sont vérifiées, et en plus les lois sont exponentiellement tendues. On peut voir que Λ^* est nulle sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et strictement positive sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^c$. Du coup, on ne peut pas déduire de PGD fort de Gärtner-Ellis-Baldi. En fait, un PGD fort est obtenu à partir de l'exercice 2.4, de fonction de taux :

$$J(x) = \min\{I(x + \frac{1}{2}), I(x - \frac{1}{2})\} \ ,$$

où I est la fonction de taux du principe de grande déviation de $(\frac{1}{n}S_n^+ - \frac{1}{2})$:

$$I(x) = \begin{cases} (x + \frac{1}{2})\log(2x+1) + (\frac{1}{2} - x)\log(1-2x) & \text{si} \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut montrer que Λ^* est la plus grande fonction convexe inférieure à J.

2. On voit facilement que :

$$\mathcal{L}(Y_n/n) = \frac{1}{2^{n+1}}\delta_1 + \frac{1}{2^{n+1}}\delta_{-1} + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\delta_0 \ .$$

Puis :

$$\Lambda(\lambda) := \lim_{n\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}(e^{\lambda Y_n}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda \in [-\log 2, \log 2] \\ \lambda - \log 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\Lambda^*(x) = \begin{cases} |x|\log 2 & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Gärtner-Ellis ne s'applique pas (problème de différentiabilité) et l'ensemble des points exposés est réduit à $\{-1, 0, 1\}$, ce qui ne suffit pas pour obtenir un PGD. On peut obtenir un PGD directement, de fonction de taux I :

$$I(x) = \begin{cases} \log(2) & \text{si} \quad x \in \{-1, 1\} \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut montrer que Λ^* est la plus grande fonction convexe inférieure à I.

□

Solution 3.4: Remarquons que la série $\sum |\psi_i Z_{t-i}|$ converge presque sûrement. En effet, les Z_i sont indépendants, $\sum |\psi_i|\mathbb{E}(|Z_{t-i}|) < \infty$ et $\sum |\psi_i|^2 \mathsf{Var}(|Z_{t-i}|) < \infty$. On pose $S = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \psi_i$ et $S' = \sum_{i\in\mathbb{Z}} |\psi_i|$. On peut écrire, presque sûrement :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=0}^{n-1} X_{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j Z_{n-i-j} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Z_{n-k} \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{k-i} \ .$$

Donc, en notant Λ_n la log-Laplace de $\sum_{i=1}^n X_i/n$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\Lambda_n(n\lambda) &= \frac{1}{n}\log \mathbb{E}\left(\prod_{k\in\mathbb{Z}} e^{\lambda Z_{n-k}\sum_{i=0}^{n-1}\psi_{k-i}}\right) , \\
&= \frac{1}{n}\log \mathbb{E}\left(\prod_{l\in\mathbb{Z}} e^{\lambda Z_{l}\sum_{j=l+1}^{l+n}\psi_{j}}\right) , \\
&= \frac{1}{n}\log \prod_{l\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left(e^{\lambda Z_{l}\sum_{j=l+1}^{l+n}\psi_{j}}\right) , \\
&= \frac{1}{n}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \Lambda_Z\left(\lambda Z_l \sum_{j=l+1}^{l+n}\psi_j\right) ,
\end{aligned}$$

où l'interversion du produit infini et de l'espérance sera justifiée par convergence dominée en remarquant que pour tout $L \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{l=-L}^{L} e^{\lambda Z_{l}\sum_{j=l+1}^{l+n}\psi_{j}}\right| &\leqslant e^{|\lambda|\sum_{l=-L}^{L}|Z_l|\sum_{j=l+1}^{l+n}|\psi_j|} , \\
&\leqslant e^{|\lambda|\sum_{l\in\mathbb{Z}}|Z_l|\sum_{j=l+1}^{l+n}|\psi_j|} ,
\end{aligned}$$

dont la moyenne est égale, par convergence monotone, à :

$$e^{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\Lambda_{|Z|}(|\lambda|\sum_{j=l+1}^{n}|\psi_j|)} = e^{\mathbb{E}(|Z|)\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\lambda|\sum_{j=l+1}^{n}|\psi_j|+\sum_{l\in\mathbb{Z}}\Lambda_{|Z|-\mathbb{E}(|Z|)}(|\lambda|\sum_{j=l+1}^{n}|\psi_j|)} .$$

Notons $\Lambda_1 = \Lambda_{|Z|-\mathbb{E}|Z|}$. On sait que Λ^1 est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\Lambda_1(0) = 0$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(|\lambda|\sum_{j=l+1}^{l+n}|\psi_j|) &\leqslant |\lambda|\sum_{j=l+1}^{l+n}|\psi_j| \sup_{[0,|\lambda|S'\sum_{j=l+1}^{l+n}|\psi_{k-i}|]} \Lambda_1' , \\
&\leqslant |\lambda|\sum_{j=l+1}^{n}|\psi_j| \sup_{[0,|\lambda|S']} \Lambda_1' ,
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{l\in\mathbb{Z}}\Lambda_1(|\lambda|\sum_{j=l+1}^{l+n}|\psi_j|) &\leqslant \sum_{l\in\mathbb{Z}}|\lambda|\sum_{j=l+1}^{l+n}|\psi_j| \sup_{[0,|\lambda|S']} \Lambda_1' , \\
&= nS'|\lambda| \sup_{[0,|\lambda|S']} \Lambda_1' , \\
&< +\infty .
\end{aligned}$$

Ce qui finit de justifier la formule :

$$\frac{1}{n}\Lambda_n(n\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\Lambda_Z\left(\lambda\sum_{j=l+1}^{l+n}\psi_j\right) .$$

On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et on note $\phi(x) = \Lambda_Z(\lambda x)$. La fonction ϕ est C^1 sur $\mathbb{R}$, et en réutilisant de manière similaire l'inégalité de Taylor-Lagrange, on obtient l'existencec d'une constante c telle que, pour tout L :

$$\frac{1}{n}\sum_{l\leqslant -L}\phi(\sum_{j=l+1}^{l+n}\psi_j) \leqslant c\sum_{j\leqslant -L+n}|\psi_j| ,$$

et :

$$\frac{1}{n}\sum_{l\geqslant L}\phi(\sum_{j=l+1}^{l+n}\psi_j)\leqslant c\sum_{j\geqslant L}|\psi_j|\ .$$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe donc L_0 tel que :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{l\geqslant L_0}\phi(\sum_{j=l+1}^{l+n}\psi_j)\right|\leqslant\varepsilon\ ,$$

et

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{l\leqslant -L_0-n}\phi(\sum_{j=l+1}^{l+n}\psi_j)\right|\leqslant\varepsilon\ .$$

Puis, pour n assez grand,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{l=-\sqrt{n}}^{L_0}\phi(\sum_{j=l+1}^{l+n}\psi_j)\right|\leqslant\varepsilon\ ,$$

et

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{l=-L_0-n}^{\sqrt{n}-n}\phi(\sum_{j=l+1}^{l+n}\psi_j)\right|\leqslant\varepsilon\ .$$

Notons alors que :

$$\sum_{l=\sqrt{n}-n}^{-\sqrt{n}}\phi(\sum_{j=l+1}^{l+n}\psi_j)=\sum_{k=\sqrt{n}-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}-\sqrt{n}}\phi(\sum_{j=k-\frac{n}{2}+1}^{k+\frac{n}{2}}\psi_j)\ .$$

Soit $\eta>0$ tel que $|x-S|<\eta\Rightarrow|\phi(x)-\phi(S)|\leqslant\varepsilon$. Il existe N tel que pour tous n_1 et n_2 supérieurs à N,

$$\left|\sum_{j=-n_1}^{n_2}\psi_j-S\right|\leqslant\eta\ .$$

Donc pour tout n assez grand, et tout $k\in\{\sqrt{n}-\frac{n}{2},\dots,\frac{n}{2}-\sqrt{n}\}$ on aura :

$$\left|\sum_{j=k-\frac{n}{2}+1}^{k+\frac{n}{2}}\psi_j-S\right|\leqslant\eta\ ,$$

ce qui implique :

$$\left|\phi\left(\sum_{j=k-\frac{n}{2}+1}^{k+\frac{n}{2}}\psi_j\right)-\phi(S)\right|\leqslant\varepsilon\ ,$$

D'où, pour n assez grand :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{l=\sqrt{n}-n}^{-\sqrt{n}}\phi(\sum_{j=l+1}^{l+n}\psi_j)-\phi(S)\right|\leqslant\varepsilon\ .$$

En recollant les bouts, on a, pour n assez grand :

$$\left|\frac{1}{n}\Lambda_n(n\lambda)-\phi(S)\right|\leqslant\varepsilon\ ,$$

Donc $\frac{1}{n}\Lambda_n(n\lambda)$ converge vers $\Lambda_Z(\lambda S)$, pour tout λ réel.

Comme Λ_Z est finie et différentiable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de Gärtner-Ellis pour en déduire que $\sum_{i=1}^n X_i/n$ suit un PGD de vitesse n et de fonction de taux :

$$I(x) = \Lambda_Z^*(x/S) \ ,$$

si $S \neq 0$. Si S vaut 0, alors I vaut $+infty$ partout sauf en 0, où elle vaut 0. □

Solution 3.5:

1. $\mathcal{D}_\Lambda =]-\infty, \gamma[$ si $\alpha \leqslant 1$ et $\mathcal{D}_\Lambda =]-\infty, \gamma]$ si $\alpha > 1$. Si $\alpha > 1$,

$$\lim_{\lambda \to \gamma} \Lambda'(\lambda) = \frac{\int_1^\infty x^{-\alpha+1}\, dx}{\int_1^\infty x^{-\alpha}\, dx} \ .$$

   Donc :

$$\Lambda'(\overset{o}{\mathcal{D}}_\Lambda) = \begin{cases}]1, +\infty[& \text{si} \quad \alpha \leqslant 2 \\ ]1, C_\alpha[& \text{si} \quad \alpha > 2 \end{cases}$$

   où $C_\alpha = \frac{\int_1^\infty x^{-\alpha+1}\, dx}{\int_1^\infty x^{-\alpha}\, dx}$.

2. On sait (cf. Exercice 1.3) que Λ^* est finie, strictement convexe et C^∞ sur l'intérieur de $\Lambda'(\overset{o}{\mathcal{D}}_\Lambda)$. Il est facile de voir (cf. la preuve du théorème de Cramér) que $\Lambda^*(1) = +\infty$. Donc, si $\alpha \leqslant 2$, le domaine de Λ^* est $]1, +\infty[$, et c'est également l'ensemble $\mathcal{F}$.
   Soit $\alpha > 2$ et $x \geqslant C_\alpha$. La fonction $\lambda \mapsto \lambda x - \Lambda(\lambda)$ est dérivable sur $[0, \gamma]$, de dérivée positive, et vaut $-\infty$ sur $]\gamma, +\infty[$, donc son maximum est atteint en γ :

$$\forall x \geqslant C_\alpha, \quad \Lambda^*(x) = \gamma x - \Lambda(\gamma) < \infty \ .$$

   Donc, si $\alpha > 2$, le domaine de Λ^* est $]1, +\infty[$ également, mais l'ensemble $\mathcal{F}$ est réduit à $]1, C_\alpha[$.

3. Lorsque $\alpha \leqslant 2$, le théorème de Gärtner-Ellis et celui de Cramér donnent tous les deux le même PGD fort, de fonction de taux Λ^*. Par contre, lorsque $\alpha > 2$, le théorème de Gärtner-Ellis n'implique pas le PGD fort, alors que le théorème de Cramér le donne.

□

Solution 3.6: cf. cours □

Solution 4.1: cf. [1], page 94. □

Solution 5.1:

1. $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^2)$ muni de la topologie de la convergence étroite (topologie faible*) est un espace métrique d'après l'énoncé (cf. question 3). Donc, la continuité peut être vérifiée séquentiellement. Soit (μ_n) une suite de probabilités de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ convergeant vers μ. Soient (Y_n) et (Y'_n) deux suites indépendantes de variables aléatoires de lois (μ_n) et Y et Y' deux v.a indépendantes de loi μ. Donc Y_n et Y'_n convergent en loi vers Y. On sait bien que dans ce cas, le couple (Y_n, Y'_n) converge en loi vers (Y, Y') (vérifier sur les fonctions caractéristiques par exemple). Donc $\mu_n \otimes \mu_n$ converge étroitement vers $\mu \otimes \mu$, ce qui montre la continuité.

2. (a) Par le théorème de Sanov, L_n satisfait un PGD de vitesse n, de bonne fonction de taux $K(., \mu)$ où :

$$K(\nu, \mu) = \begin{cases} \int \frac{d\nu}{d\mu} \log \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu & \text{si} \qquad \nu \ll \mu \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc par le principe de contraction, U_n satisfait un PGD de vitesse n, et de bonne fonction de taux I :

$$\forall \lambda \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^2), \quad I(\lambda) = \begin{cases} K(\nu,\mu) & \text{si} \qquad \lambda = \nu \otimes \nu \text{ et } \nu \ll \mu \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Soit $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ fixée. L'application de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{R}$, qui à λ associe $\int h \, d\lambda$ est continue (pour la topologie de la convergence étroite. Donc, par le principe de contraction,

$$\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant n} h(X_{k_1}, X_{k_2}) \quad (n \geqslant 1)$$

satisfait un PGD sur $\mathbb{R}$ de vitesse n, et de bonne fonction de taux I_h :

$$I_h(x) = \inf_{\{\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}),\ \int h \, d\nu \otimes d\nu = x} K(\nu\mu) \ .$$

3. On montre facilement que :

$$d(U_n, U_n') \leqslant \frac{1}{n} \ .$$

Donc, en utilisant l'exercice 2.3, on voit que U_n et U_n' sont exponentiellement équivalentes et donc U_n' satisfait un PGD de bonne fonction de taux I_h.

4. Comme au 3. (b), même fonction de taux.

□

Solution 5.2:

1. Soit $\nu \in \mathcal{M}_1(\Sigma)$ telle que $\nu = g\mu$ avec $g \in \mathcal{C}_b(\Sigma)$ et $g > \alpha > 0$ pour un réel $\alpha > 0$. On pose $f = \log g$. alors, si $\nu' \in \mathcal{M}_1(\Sigma)$,

$$\int f \, d\nu' - \Lambda^*(\nu') = -K(\nu', \nu) \leqslant 0 = \int f \, d\nu - \Lambda^*(\nu) \ ,$$

avec égalité ssi $\nu' = \nu$. Donc ν est un point exposé de Λ^*, avec f comme hyperplan d'appui. De plus, comme g est bornée, $\Lambda(\gamma f)$ est fini pour tout $\gamma > 0$.

2. La tension exponentielle a été vue en cours. On peut appliquer Gärtner-Ellis-Baldi, la seule chose qui reste à comprendre est comment déduire de la borne inférieure de Gärtner-Ellis-Baldi la borne inférieure du PGD. Soit ν telle que $\Lambda^*(\nu) < \infty$. On sait que $\nu \ll \mu$. Soit g la densité de ν par rapport à μ. On définit, comme dans le cours, pour A et B strictement positifs :

$$g_{A,B} = A \vee (g \wedge B) \ ,$$

et on pose $\nu_{A,B} = g_{A,B}\mu$. On peut montrer (comme dans le cours) que :

$$\lim_{A \to 0^+} \lim_{B \infty} \Lambda^*(\nu_{A,B}) \leqslant \Lambda^*(\nu) \ .$$

D'autre part, par convergence dominée, il est facile de voir que $\nu_{A,B}$ converge étroitement vers ν lorsque B tend vers l'infini puis A tend vers 0. Comme $\nu_{A,B} \in \mathcal{F}$, on en déduit que pour tout ouvert G de $\mathcal{M}(\Sigma)$:

$$\inf_{G \cap \mathcal{F}} \Lambda^* = \inf_G \Lambda^* \ ,$$

ce qui donne la borne inf du PGD.

$\square$

Solution 5.3: ATTENTION : il y avait une erreur importante dans l'énoncé : il faut que l'ensemble de fonctions $\mathcal{F}$ soit un ensemble de formes linéaires sur E.

cf. Théorème 16.9 dans [2] (attention, cadre légèrement différent, puisqu'il regarde la topologie vague).

$\square$

Solution 6.1: ATTENTION : il y avait une petite erreur dans l'énoncé (B_t à la place de $f(t)$ dans la définition de G, corrigé dans cette version du pdf, et un t remplacé par un u dans la première équation).

G est clairement fermé ($f \mapsto \sup_{[0,1]}(f-g)$ est une application continue pour la norme infinie). De plus, $\inf_{f\in G} I(f) = \inf_{f\in \overset{o}{G}} I(f)$. En effet, soit $f \in G \cap H_0^1$ et $\gamma > 0$. Alors, $(1+\gamma)f \in \overset{o}{G}$, et en notant I la fonction de taux du théorème de Schilder, $I((1+\gamma)f) = (1+\gamma)^2 I(f)$. Par conséquent :

$$\forall \gamma > 0, \quad \inf_{f\in G} I(f) \leqslant \inf_{f\in \overset{o}{G}} I(f) \leqslant (1+\gamma)^2 \inf_{f\in G} I(f) \ .$$

En faisant tendre γ vers 0, on obtient $\inf_{f\in G} I(f) = \inf_{f\in \overset{o}{G}} I(f)$.

Evaluons l'infimum de la fonction de taux du brownien sur G. Soit $f \in G \cap H_0^1$. Notons t_f le premier instant où f dépasse g :

$$t_f = \inf\{t \in [0,1] \text{ tq } f(t) \geqslant g(t)\} \ .$$

En utilisant Jensen :

$$\begin{aligned} I(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\,dt &\geqslant \frac{1}{2}\int_0^{t_f} f'(t)^2\,dt \ , \\ &= \frac{t_f}{2}\frac{1}{t_f}\int_0^1 f'(t)^2\,dt \ , \\ &\geqslant \frac{t_f}{2}\left(\frac{1}{t_f}\int_0^1 f'(t)\,dt\right)^2 \ , \\ &= \frac{g(t_f)^2}{2t_f} \ . \end{aligned}$$

Donc :

$$\inf_G I \geqslant \inf_{u\in]0,1]} \frac{g(u)^2}{2u} \ .$$

Pour montrer l'égalité, on considère les fonctions (f_u) définies par :

$$\forall u \in]0,1], \quad f_u(t) = \frac{g(u)}{u}(t \wedge u) \ .$$

On vérifie facilement que ces fonctions sont dans $\mathcal{F}$ et qu'elles sont des cas d'égalité dans la minoration de I ci-dessus :

$$\forall u \in]0,1], \quad I(f_u) = \frac{g(u)^2}{2u} \ .$$

Donc :

$$\inf_G I = \inf_{u\in]0,1]} \frac{g(u)^2}{2u} \ .$$

Enfin, pour répondre à la question initialement posée, on applique le théorème de Schilder au fermé G. Grâce au fait que $\inf_{f\in G} I(f) = \inf_{f\in \mathring{G}} I(f)$, on a une vraie limite dans le PGD appliqué à G, et on obtient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(\exists t \in [0,1] \text{ t.q. } \sqrt{\varepsilon} B_t \geqslant g(t)) = -\inf_{u\in]0,1]} \frac{g(u)^2}{2u} ,$$

ce qui est exactement le résultat anoncé, en posant $A = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. □

Solution 6.2: Soit T un espace métrique compact. On note $C(T)$ l'ensemble des applications continues de T dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in T} |f(t)|$. C'est un espace de Banach séparable. On considère $(Z_t)_{t\in T}$ un processus gaussien centré sur T, défini sur un espace de probabilité Ω et dont les trajectoires appartiennent presque sûrement à $C(T)$. On note Q la covariance associée :

$$Q(t,t') = \mathbb{E}(Z_t Z_{t'}) .$$

On admettra que Q est continue sur $T\times T$ et on supposera dans la suite que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{E}(e^{\alpha \|Z\|_\infty}) < \infty .$$

1. On applique le théorème de Cramér, puisque $\frac{1}{\sqrt{n}} Z$ a même loi que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i$ lorsque les Z_i sont i.i.d de même loi que Z. Les hypothèses de Cramér sont vérifiées car $C(T)$ est un Banach séparable.
2. Il est clair que $\mathbb{H}$ est inclus dans la cloture dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de $\{\langle \nu, Z\rangle \text{ t.q. } \nu \in \mathcal{M}(T)\}$ (prendre des mesures à support fini). Réciproquement, soit ν dans $\mathcal{M}(T)$. Admettons pour l'instant qu'il existe une suite de mesures $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à support fini qui converge étroitement vers ν. Alors, $(\langle \nu_n, Z\rangle)$ est une suite de gaussiennes qui converge presque sûrement (puisque Z est p.s continu) vers $\langle \nu, Z\rangle$. Donc, elle converge dans L^2, voir par exemple la proposition 1.1 du cours de J-F Le Gall, http ://www.dma.ens.fr/ legall/DEA96.pdf.

   Il reste à montrer que pour tout ν dans $\mathcal{M}(T)$, il existe une suite de mesures $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à support fini qui converge étroitement vers ν. C'est la même technique que sur $[0,1]$. Pour tout n, l'ensemble des boules ouvertes de rayon $\frac{1}{n}$ recouvre T, donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini :

   $$T \subset \cup_{i=1}^{k_n} \mathcal{B}(x_i^n, \frac{1}{n}) ,$$

   puis on pose $U_1 = \mathcal{B}(x_1^n, \frac{1}{n})$ et pour tout $i \in \{2,\dots,k_n\}$:

   $$U_i^n = \mathcal{B}(x_i^n, \frac{1}{n}) \setminus \cup_{j=1}^{i-1} U_j .$$

   T est alors la réunion disjointe des $(U_i^n)_{1\leqslant i\leqslant k_n}$, et $U_i \subset \mathcal{B}(x_i^n, \frac{1}{n})$ pour tout i. On pose alors :

   $$\nu_n = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i^n} \nu(U_i^n) .$$

   Soit $f \in C(T)$. On a alors :

   $$\int f \, d\nu_n = \int f_n \, d\nu ,$$

   où f_n est la fonction étagée :

   $$f_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^n) \, \mathbb{1}_{U_i^n} .$$

   On conlut alors par convergence dominée.

3. Si $Y \in Vect((Z_t)_{t\in T})$, $\Phi(Y)$ est bien continue car Q est continue par hypothèse. Puis, si $Y \in \mathbb{H}$, il existe une suite Y'_n de $Vect((Z_t)_{t\in T})$ qui converge vers Y dans $\mathbb{L}^2$, et, par Cauchy-Schwartz :

$$\sup_{t\in T} |\mathbb{E}(YZ_t) - \mathbb{E}(Y'_n Z_t)\| \leqslant \|Y - Y'_n\| \sup_{t\in T} \|Z_t\|_2 \ .$$

qui tend vers 0 ($\sup_{t\in T} \|Z_t\|_2$ est fini car Q est continue). Ceci montre que $t \mapsto \mathbb{E}(YZ_t)$ est continue.

Enfin, Φ est linéaire, pour voir qu'elle est injective, soit Y tel que $\Phi(Y) = 0$, i.e :

$$\forall t \in T, \quad \mathbb{E}(YZ_t) = 0 \ .$$

$\mathbb{H}$, muni du produit scalaire usuel dans $\mathbb{L}^2$, est un espace de Hilbert (s.e.v fermé dans un Hilbert), et $(Z_t)_{t\in T})$ est une famille totale dans $\mathbb{H}$, donc l'orthogonal de $Vect((Z_t)_{t\in T})$ est réduit à $\{0\}$.

4. Soit $f \in C(T)$ telle que $\Lambda^*_Z(f) < \infty$.

   (a) On a :

   $$\Lambda^*_Z(f) = \sup_{\nu\in\mathcal{M}(T)} \{\langle \nu, f\rangle - \log \mathbb{E}(e^{\langle \nu, Z\rangle})\} \ .$$

   Or $\langle \nu, Z\rangle$ est une gaussienne centrée, donc :

   $$\Lambda^*_Z(f) = \sup_{\nu\in\mathcal{M}(T)} \{\langle \nu, f\rangle - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(\langle \nu, Z\rangle)^2]\} \ .$$

   Et par conséquent, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

   $$\Lambda^*_Z(f) - \lambda\langle \nu, f\rangle + \frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}[(\langle \nu, Z\rangle)^2 \geqslant 0 \ ,$$

   le discriminant du trinôme ci-dessus est donc négatif ou nul, ce qui donne :

   $$|\langle \nu, f\rangle| \leqslant \sqrt{2\Lambda^*_Z(f)\mathbb{E}(\langle \nu, Z\rangle^2)} \ .$$

   (b) Il suffit de vérifier que si ν_1 et ν_2 sont telles que $\langle \nu_1, Z\rangle = \langle \nu_2, Z\rangle$, alors $\langle \nu_1, f\rangle = \langle \nu_2, f\rangle$. C'est une conséquence direecte de la question précédente en prenant $\nu = \nu_1 - \nu_2$.

   (c) C'est encore une conséquence de la même formule :

   $$|\langle \nu_1, f\rangle - \langle \nu_2, f\rangle| \leqslant \sqrt{2\Lambda^*_Z(f)\mathbb{E}[(\langle \nu, Z\rangle - \langle \nu, Z\rangle)^2]} \ .$$

   La forme linéaire F est bien continue. Elle est donc définie et continue sur un s.e.v dense d'un espace de Hilbert, on peut donc l'étendre de manière unique à $\mathbb{H}$ tout entier.

   (d) $\mathbb{H}$, muni du produit scalaire usuel dans $\mathbb{L}^2$, est un espace de Hilbert. Donc toute forme linéaire sur $\mathbb{H}$ est de la T forme :

   $$\begin{cases} \mathbb{H} & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \mathbb{E}(Yh) \end{cases}$$

   pour un certain $Y \in \mathbb{H}$. Donc il existe $Y \in \mathbb{H}$ tel que pour tout $\nu \in \mathcal{M}(T)$,

   $$\langle \nu, f\rangle = \mathbb{E}(Y\langle \nu, Z\rangle) \ .$$

(e) On a donc, par Fubini, pour tout $\nu \in \mathcal{M}(T)$:

$$\langle \nu, f \rangle = \langle \nu, \mathbb{E}(YZ) \rangle \ ,$$

d'où $f(t) = \mathbb{E}(YZ_t)$ pour tout $t \in T$, ce qui signifie que $f \in H_Q$ et $Y = \Phi^{-1}(f)$. Par ailleurs, si Y est de la forme $\langle \nu_0, Z \rangle$ pour une mesure ν_0, alors on peut prendre $\nu = \nu_0$ dans la définition de $\Lambda_Z^*(f)$, et on obtient :

$$\Lambda_Z^*(f) \geqslant \frac{1}{2}\|Y\|^2 = \frac{1}{2}\|f\|_Q^2 \ .$$

Dans le cas général ($Y \in \mathbb{H}$), il existe une suite (ν_n) telle que $\langle \nu_n, Z \rangle$ converge vers Y dans $\mathbb{L}^2$. Il est alors facile de voir que :

$$\langle \nu_n, f \rangle - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(\langle \nu_n, Z \rangle)^2] = \mathbb{E}(Y\langle \nu_n, Z \rangle) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(\langle \nu_n, Z \rangle)^2]$$

converge vers$\frac{1}{2}\|Y\|^2 = \frac{1}{2}\|f\|_Q^2$. Donc :

$$\Lambda_Z^*(f) \geqslant \frac{1}{2}\|Y\|^2 = \frac{1}{2}\|f\|_Q^2 \ .$$

5. Pour toute mesure ν de $\mathcal{M}(T)$, par Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned}
\langle \nu, f \rangle - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(\langle \nu, Z \rangle)^2] &= \mathbb{E}(Y\langle \nu, Z \rangle) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(\langle \nu, Z \rangle)^2] \ , \\
&\leqslant \|Y\|_2 \|\langle \nu, Z \rangle\|_2 - \frac{1}{2}\|\langle \nu, Z \rangle\|_2^2 \ , \\
&\leqslant \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \|Y\|_2 \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 \ , \\
&= \frac{1}{2}\|Y\|_2^2 \ , \\
&= \frac{1}{2}\|f\|_Q^2 \ .
\end{aligned}$$

Donc $\Lambda_Z^*(f) = \frac{1}{2}\|f\|_Q^2$. On a montré que $(\mu_n)_{n \geqslant 1}$ satisfait un PGD de vitesse n dans $C(T)$, de fonction de taux I définie par :

$$I(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|f\|_Q^2 & \text{si} \quad f \in H_Q \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

□

Références

[1] Raphaël Cerf. *On Cramér's theory in infinite dimensions*, volume 23 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2007.

[2] Gustave Choquet. *Lectures on analysis. Vol. I : Integration and topological vector spaces.* Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.