M1 BIBS Orsay
Analyse spectrale et Séries Chro.
2010-2011

Devoir

Exercice 1 Soit B_t une marche aléatoire définie par B_0 constant égal à b_0, et :

$$\forall t \geqslant 0, \quad B_{t+1} = B_t + Z_t \ ,$$

où Z est un bruit blanc fort de variance σ_Z^2. On considère pour une série Y un modèle "à tendance localement linéaire", avec bruit d'observation. Précisément, soient W et N deux bruits blancs forts de variances respectives σ_W^2 et σ_N^2. On suppose que W, N et Z sont indépendants, et on définit la tendance localement linéaire m par :

$$\forall t \geqslant 0, \quad m_{t+1} = m_t + B_t + N_t \ ,$$

et la série observée Y est reliée à m par :

$$\forall t \geqslant 0, \quad Y_t = m_t + W_t \ .$$

1. Écrire un modèle d'état pour Y.
2. Simuler une réalisation de Y de longueur 100 pour plusieurs valeurs des paramètres. Prendre notamment $\sigma_N = 0$ et $\sigma_N \neq 0$.
3. On suppose $\sigma_W = \sigma_N = 0$. Montrer que Y suit un modèle $ARIMA$, et préciser les paramètres.

Exercice 2 La série `sncf.rda` contient le trafic mensuel sur les lignes sncf de janvier 1963 à décembre 1980 en millions de passagers par kilomètres (source [1]). Ajuster un modèle $SARIMA$ sur cette série, et prédire le trafic de l'année 1981.

Exercice 3 Soit Y un $ARIMA(1,1,0)$ gaussien défini par $Y_0 = 0$ et :

$$\forall t \geqslant 1, \quad Y_t = Y_{t-1} + X_t \ ,$$

où X est un $AR(1)$ défini par :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = \frac{3}{4} X_{t-1} + Z_t \ ,$$

avec Z bruit blanc fort gaussien de variance 4.

1. Calculer la matrice de covariance du vecteur $(Y_1, \ldots, Y_4)$.
2. Calculer la prédiction linéaire de Y_4 sachant $(Y_1, \ldots, Y_3)$, ainsi que la variance de l'erreur de prédiction.

Références

[1] Christian Gouriéroux et Alain Monfort : *Séries temporelles et modèles dynamiques.* Economica, 1999.