Graphes aléatoires

Raphaël Rossignol

18 décembre 2012

Introduction

Ces notes correspondent à un cours donné au premier semestre 2011-2012 dans le cadre du M2 recherche de l'institut Fourier, à Grenoble.

0.1 Présentation du personnage principal : G(n, p)

Un graphe (simple, étiqueté, non orienté) est la donnée d'une paire G = (V, E), où V est un ensemble, et E est un sous-ensemble de l'ensemble $\binom{V}{2}$ des paires d'éléments de V. Les éléments de V sont appelés les sommets de G et les éléments de E sont appelés les arêtes de G.

Soient $n \geq 1$ un entier et $p \in [0,1]$. On note [n] l'ensemble des entiers de 1 à n et Ω_n l'ensemble de tous les graphes d'ensemble de sommets exactement [n]. Un de ces graphes est K_n , la clique (i.e graphe complet) d'ordre n: son ensemble d'arêtes est $\binom{[n]}{2}$. $\mathcal{G}(n,p)$ est un graphe aléatoire à n sommets inventé par Erdös et Rényi dans les années 50 (en fait, le modèle original d'Erdös et Rényi était légèrement différent, cf. section 1.4 dans [JLR00]). C'est à dire que c'est une variable aléatoire à valeurs dans Ω_n , obtenue comme suit. On considère une collection de variables aléatoires i.i.d $(X_e)_{e \in \binom{[n]}{2}}$ de loi de Bernoulli de paramètre p. $\mathcal{G}(n,p)$ est alors le graphe ayant pour ensemble de sommets [n] et pour ensemble d'arêtes celles telles que $X_e = 1$. Autrement dit, on part de K_n , et on supprime chaque arête avec probabilité (1-p), indépendamment des autres. On voit aussi que la donnée de $\mathcal{G}(n,p)$ est équivalente à la donnée de la collection $(X_e)_{e \in \binom{[n]}{2}}$.

L'entier n est le nombre de sommets de $\mathcal{G}(n,p)$. Que représente le réel p? C'est la densité moyenne d'arêtes (par rapport à K_n). En effet, le nombre d'arêtes de $\mathcal{G}(n,p)$ suit une loi binomiale de paramètres $\binom{n}{2}$ et p. Donc en moyenne, le nombre d'arêtes de $\mathcal{G}(n,p)$ est $\binom{n}{2}p$. Lorsque p augmente de 0 à 1, on voit donc qu'en moyenne, le nombre d'arêtes augmente. Il est en fait possible de réaliser les lois de $\mathcal{G}(n,p)$ pour tout p de [0,1] sur un même espace de probabilité en faisant en sorte que $\mathcal{G}(n,p) \subset \mathcal{G}(n,p')$ pour tout $p' \geq p$, au sens où l'ensemble des arêtes de $\mathcal{G}(n,p)$ est inclus dans l'ensemble des arêtes de $\mathcal{G}(n,p')$. On dit qu'on couple ces différentes lois et on appellera ce couplage le couplage standard. Considérons une collection de variables aléatoires i.i.d $(U_e)_{e \in \binom{[n]}{2}}$ de loi uniforme sur [0,1], et notons, pour toute arête e, $X_e(p) = \mathbbm{1}_{U_e \leq p}$. En associant $\mathcal{G}(n,p)$ à $(X_e(p))_{e \in \binom{[n]}{2}}$ on voit qu'on a la même loi que ci-dessus, et

ii INTRODUCTION

qu'on a bien la propriété de croissance désirée. En faisant croître p de 0 à 1, on voit ainsi un graphe sur n sommets, initialement vide (i.e sans arête), puis se comblant d'arête petit à petit jusqu'à devenir plein, i.e égal au graphe complet K_n .

Ce cours sera avant tout consacré à l'étude du graphe aléatoire $\mathcal{G}(n,p)$ d'un point de vue asymptotique : la question principale est "quelle est l'allure, quelles propriétés possède $\mathcal{G}(n,p)$ lorsque le nombre de sommets n est grand?". Gnp étant une variable aléatoire, on examinera cette question sous l'angle des probabilités asymptotiques, en donnat des résultats de convergence en loi ou en probabilité lorsque le nombre de sommets n tend vers l'infini. Remarquons déjà que l'existence du deuxième paramètre p donne la liberté de le faire évoluer avec n, et on verra qu'une des parties les plus intéressantes de l'étude de $\mathcal{G}(n,p)$ nécessite de le faire. On dira qu'une propriété est vérifiée a.p.s ("asymptotiquement presque sûrement") par $\mathcal{G}(n,p)$ si la probabilité que $\mathcal{G}(n,p)$ vérifie cette propriété tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini (p) pouvant être une fonction de n).

A quoi sert donc d'étudier $\mathcal{G}(n,p)$? Voici quelques éléments de réponse :

- 1. c'est un modèle amusant, et même joli!
- 2. l'étude des grands graphes peut être très compliquée et les propriétés des grands graphes peuvent être très difficiles à déterminer de manières déterministes. Par exemple, savoir si un graphe est hamiltonien, savoir si son nombre clique est supérieure à un entier k fixé, ou s'il est colorable avec k couleurs sont des exemples de problèmes NP-complets. Il est alors intéressant d'avoir une étude en moyenne, en probabilité, pour pouvoir répondre à ces questions de manière approchée et avec grande probabilité (on dit souvent "pour un graphe typique").
- 3. c'est un modèle très simple mais déjà riche :
 - notons déjà qu'il contient la probabilité uniforme sur les graphes de Ω_n , obtenue pour p=1/2.
 - il possède une dynamique lorsque p évolue de 0 à 1. Ainsi on montrera que le schéma suivant est vrai a.p.s.***** Schéma d'évolution ******
- 4. l'étudier permet d'utiliser des outils amusants de probabilités, comme la méthode du premier et du second moment, les arbres de Galton-Watson, les marches aléatoires ou les martingales.
- 5. enfin, c'est un modèle intéressant car il permet de montrer l'existence de certains graphes ayant des propriétés contre-intuitives, ou bien dont l'existence est difficile à montrer sans faire appel aux probabilités. Ceci est relié à ce qu'on appelle la méthode probabiliste en théorie des graphes. L'idée de base est simple : pour montrer qu'un graphe existe ayant une propriété A donnée on construit un graphe aléatoire et on montre que ce graphe aléatoire possède la propriété A avec probabilité strictement positive. Cela donne des résultats d'existence, non constructifs en général. Un exemple d'application de cette méthode est l'obtention de graphes

0.2. PLAN

avec simultanément une maille et un nombre chromatique grands. La maille d'un graphe est la taille du plus petit cycle. Le nombre chromatique d'un graphe est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets adjacents ne soient jamais de la même couleur. La méthode probabiliste permet de montrer que pour tous entiers k et l il existe un graphe de nombre chromatique supérieur à k et de maille supérieure à l.

Remarquons tout de suite que $\mathcal{G}(n,p)$ est trop peu réaliste pour pouvoir modéliser correctement des réseaux réels, comme ceux du web par exemple. Notamment, la loi des degrés, l'indépendance des arêtes et la dynamique croissante sont irréalistes. Plusieurs généralisations ont été étudiées, notamment les modèles d'attachement préférentiel ou les modèles de configuration (cf. [Dur10]). Néanmoins, le modèle d'Erdös-Rényi reste un exemple fondateur à partir duquel il est utile de penser ces modèles plus réalistes.

0.2 Plan

- 1. Petits sous-graphes
- 2. Connexité
- 3. Un peu de concentration
- 4. Transition de phase d'Erdös-Rényi: apparition de la composante géante
- 5. Nombre d'indépendance, k-colorabilité

0.3 Phénomènes de seuil

Revenons un instant sur le schéma d'évolution pour noter que de nombreuses propriétés apparaissent soudainement : lorsque p est petit devant une certaine valeur p_n^* , la propriété est fausse a.p.s et lorsque p est grand devant cette valeur, la propriété devient vraie a.p.s. On dit dans ce cas que p_n^* est une fonction seuil pour la propriété considérée et que la propriété vérifie un phénomène de seuil. Cela a du sens notamment pour les propriétés croissantes. On dit qu'une propriété est croissante si pour tout G de Ω_n , si G satisfait la propriété, alors tout G' de Ω_n contenant G la satisfait aussi. Autrement dit, en rajoutant uniquement des arêtes, on ne peut faire disparaître la propriété. Par exemple, contenir un triangle, être connexe, être hamiltonien ... sont des propriétés croissantes. Si A est une propriété croissante, le couplage standard montre que la fonction $p \mapsto \mathbb{P}(\mathcal{G}(n,p) \in A)$ est croissante sur [0,1]. Si $\Omega_n \cap A$ est différent de Ω_n et de l'ensemble vide, on peut voir que cette fonction passe continûment de 0 à 1 et est strictement croissante. On peut donc toujours définir une valeur p_n^* comme la valeur de p pour laquelle $\mathbb{P}(\mathcal{G}(n,p) \in A)$ vaut 1/2. On peut alors montrer que toute fonction monotone vérifie un phénomène de seuil, dans un cadre d'ailleurs plus général que celui des graphes aléatoires (cf. le Théorème 1.24 p.20 dans [JŁR00]).

iv INTRODUCTION

Pour les propriétés monotones, on constatera également que pour certaines propriétés, la largeur de seuil (c'est à dire la largeur de l'intervalle des valeurs de p pour lesquelles la probabilité $\mathbb{P}(\mathcal{G}(n,p)\in A)$ appartient à $[\varepsilon,1-\varepsilon]$) est petite devant la fonction seuil, alors que pour d'autres, elles sont du même ordre de grandeur. Dans le premier cas, on parle de seuil étroit (sharp threshold en anglais), et dans le second, on parle de seuil grossier (coarse threshold). Un sujet intéressant, qu'on évoquera peut-être à la fin du cours, est de comprendre ce qui provoque le caractère étroit ou grossier d'un phénomène de seuil (cf. paragraphe 1.6 dans [JLR00]).

0.4 Notions élémentaires de théorie des graphes

Si G est un graphe, on note V(G) l'ensemble de ses sommets et E(G) l'ensemble de ses arêtes. L'ordre de G est le cardinal de V(G), noté v_G . La taille de G est le cardinal de E(G), noté e_G .

Si u et v sont deux sommets de G, on dit que u et v sont adjacents si $\{u, v\}$ est une arête de G, et on note $u \sim v$.

Un morphisme (de graphe) ϕ d'un graphe G vers un graphe G' est une application de V(G) vers V(G') telle que pour tous x et y de V(G), $x \sim y \Rightarrow \phi(x) \sim \phi(y)$. On dit que ϕ est un isomorphisme entre G et G' si ϕ est un morphisme bijectif et que son inverse est un morphisme. S'il existe un isomorphisme entre G et G' on dit qu'ils sont isomorphes, ou encore que G' est une copie de G. Un automorphisme de G est un isomorphisme entre G et lui-même, on note Aut(G) le groupe des automorphismes de G.

Un sous-graphe de G est un graphe H tel que $V(H) \subset V(G)$ et $E(H) \subset E(G)$. On notera souvent $H \subset G$ pour signifier que H est un sous-graphe de G. Soit W un ensemble de sommets inclus dans V(G). On note G(W) le graphe de sommets W et d'arêtes $E(G) \cap {W \choose 2}$. On dit que G(W) est le sous-graphe induit par W. De même, si F est un ensemble d'arêtes inclus dans E(G), on note G(F) le graphe d'arêtes F et de sommets l'ensemble des sommets appartenant à l'une des arêtes de F. G(F) est le sous-graphe induit par F.

Un graphe connexe G vérifie toujours $e_G \geq v_G - 1$, avec égalité si et seulement si G est un arbre, c'est à dire un graphe sans cycle. $e_G = v_G$ correspond à un graphe unicyclique, c'est à dire contenant exactement un seul cycle. Lorsque $e_G \leq v_G$, on dit que G est simple (à ne pas confondre avec la définition de "simple" signifiant qu'il ne peut y avoir plusieurs arêtes entre deux sommets. Pour nous, tous les graphes seront simples pour ce sens-ci). On dit que G est complexe si $e_G \geq v_G + 1$.

Quelques mots-clefs qui reviendront dans le cours : coloration ou coloriage, k-colorabilité, nombre chromatique, cycle, maille, distance, connexité, composante connexe . . .

0.5 Les méthodes du premier et du second moment

Voyons le premier outil probabiliste de ce cours. Pour montrer que des évènements ont lieu a.p.s, on utilisera beaucoup ce qu'on appelle les *méthodes du premier et du second moment*.

La méthode du premier moment consiste à appliquer l'inégalité de Markov. Par exemple, soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb N$. Si $\mathbb E(X_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, alors a.p.s $X_n=0$. En effet,

$$\mathbb{P}(X_n > 0) = \mathbb{P}(X_n \ge 1) \le \mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n \infty]{} 0.$$

Notamment, si X_n est le cardinal d'un ensemble d'objets présents dans $\mathcal{G}(n,p)$, on en déduira que a.p.s. $\mathcal{G}(n,p)$ ne contient aucun exemplaire de ces objets.

La méthode du second moment consiste à appliquer l'inégalité de Tchebycheff (ou de Paley-Wiener) pour obtenir une conclusion dans l'autre sens.

Par exemple, soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs positives. Si X_n n'est pas constant égal à 0, et si l'écart-type de X_n est petit devant son espérance, alors a.p.s $X_n > 0$. En effet, en appliquant Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{P}(X_n>0) \geq \frac{\mathbb{E}(X_n)^2}{\mathbb{E}(X_n^2)} = 1 - \frac{\mathsf{Var}(X_n)}{\mathbb{E}(X_n^2)} \geq 1 - \frac{\mathsf{Var}(X_n)}{\mathbb{E}(X_n)^2} \;.$$

Application : Exercices 0.1 et 0.2.

Les autres outils probabilistes seront introduits au fur et à mesure des besoins.

0.6 Remarques sur les notations

$$(n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Tous les logarithmes sont en base e si la base n'est pas précisée. Notations de Landau et Hardy.

0.7 Références principales

[AS08], [Bol01], [JŁR00]

vi INTRODUCTION

0.8 Exercices

Exercice 0.1 Méthode du premier moment. Compter le nombre moyen de copies de K_4 dans $\mathcal{G}(n,p)$. Montrer que si $p=o(n^{-2/3})$, alors a.p.s $\mathcal{G}(n,p)$ ne contient pas de copie de K_4 . Mêmes questions pour le graphe G obtenu à partir de K_4 en rajoutant un sommet relié par une seule arête à l'un des sommets de K_4 . Mêmes questions pour les copies induites de G.

Exercice 0.2 Méthode du second moment. Montrer que si $p = o(n^{-2})$, $\mathcal{G}(n,p)$ est a.p.s le graphe vide. Montrer que si $p = \omega(n^{-2})$, a.p.s $\mathcal{G}(n,p)$ est non vide

Exercice 0.3 On suppose que p = c/n avec $c \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Montrer que le degré d'un sommet v fixé dans $\mathcal{G}(n,p)$ converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers une loi de Poisson de paramètre c.

Exercice 0.4 On appelle bicycle un graphe constitué soit de deux cycles disjoints reliés par un chemin (éventuellement réduit à un point), soit d'un cycle auquel on a ajouté un chemin entre deux sommets non consécutifs. Montrer que si $p = (1 - \varepsilon)/n$ avec $\varepsilon \gg n^{-1/3}$, a.p.s $\mathcal{G}(n,p)$ ne contient pas de bicycle. En déduire que pour les mêmes valeurs de p, a.p.s les composantes connexes de $\mathcal{G}(n,p)$ sont simples.

Exercice 0.5 Modèle original d'Erdös et Rényi Soit M un entier inférieur ou égal à n. On considère un graphe aléatoire $\tilde{G}(n,M)$ obtenu en tirant un graphe au hasard, uniformément, parmi tous les sous-graphes étiquetés de K_n ayant M arêtes. Appliquer la méthode du premier moment pour le nombre de copies de K_4 .

Chapitre 1

Petits sous-graphes

Soit G un graphe fixé. La propriété "contenir une copie de G" est une propriété croissante. Dans ce chapitre, on déterminera la fonction seuil de cette propriété, et pour les graphes dits "strictement équilibrés", on montrera un comportement poissonien pour le nombre de copies à l'intérieur du seuil.

Dans la suite, G est un graphe fixé, non vide. On note O(G) l'orbite de G dans K_n , c'est à dire l'ensemble des copies de G dans K_n . Remarquons que :

$$|O(G)| = \frac{(n)_{v_G}}{|Aut(G)|}.$$

On note X_G la variable aléatoire qui compte le nombre de copies de G dans $\mathcal{G}(n,p)$:

$$X_G = \sum_{G' \in O(G)} \mathbb{1}_{G' \subset \mathcal{G}(n,p)} .$$

Remarquons que:

$$\mathbb{E}(X_G) = |O(G)|p^{e_G} = \Theta(n^{v_G}p^{e_G}).$$

1.1 Seuil d'apparition d'une copie d'un petit sousgraphe

L'exercice 0.1 a mis en évidence les choses suivantes. Pour tout graphe H, si $p = o(n^{-v_G/e_G})$, a.p.s $\mathcal{G}(n,p)$ ne contient pas G. Mais pour que G apparaisse, il faut que tous les sous-graphes non vides de G apparaissent, ce qui ne peut arriver si $p = o(n^{-v_H/e_H})$ pour un sous-graphe H de G. Remarquons que n^{-v_H/e_H} est une fonction croissante de $2e_H/v_H$ qui est le degré moyen de H. Les graphes les plus "denses" (au sens de degré moyen le plus élevé) sont les plus difficiles à obtenir : il faut plus d'arête à $\mathcal{G}(n,p)$ pour les voir apparaître. On note :

$$m(G) = \max_{H \subset G} \frac{e_H}{v_H} \ .$$

Nous allons voir que $n^{-1/m(G)}$ est la fonction seuil pour l'apparition d'une copie de G. Pour cela, on cherche à appliquer la méthode du second moment. D'une manière générale, soit X une somme d'indicatrices, $X = \sum_{\alpha \in \Gamma} I_{\alpha}$. Pour tout couple d'indicatrices (I_{α}, I_{β}) , on note $\alpha \sim \beta$ si $\alpha \neq \beta$ et $\mathsf{Cov}(I_{\alpha}, I_{\beta}) \neq 0$. On a alors :

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{Var}(X) & = & \displaystyle\sum_{\alpha \in \Gamma} \mathsf{Var}(I_\alpha) + \displaystyle\sum_{\alpha \sim \beta} \mathsf{Cov}(I_\alpha, I_\beta) \;, \\ \\ \mathsf{Var}(X) & \leq & \mathbb{E}(X) + \Delta \;, \end{array} \tag{1.1}$$

où on a noté:

$$\Delta = \sum_{\alpha \alpha \beta} \mathbb{E}(I_{\alpha} I_{\beta}) \ .$$

On voit alors que si $\mathbb{E}(X)$ tend vers l'infini, on aura $\text{Var}(X) = o(\mathbb{E}(X)^2)$ dès que $\Delta = o(\mathbb{E}(X)^2)$. Examinons la situation lorsque $X = X_G$. Notons \mathcal{H} un ensemble contenant un représentant de chaque classe d'isomorphisme des sousgraphes non vides de G, en excluant les copies de G.

$$\begin{split} \Delta &= \sum_{\substack{G_1 \neq G_2 \in O(G) \\ E(G_1 \cap G_2) \neq \emptyset}} p^{2e_G - e_{G_1 \cap G_2}} \;, \\ &= \sum_{H \in \mathcal{H}} \sum_{\substack{G_1 \neq G_2 \in O(G) \\ G_1 \cap G_2 \in O(H)}} p^{2e_G - e_H} \;, \\ &\leq \sum_{H \in \mathcal{H}} p^{2e_G - e_H} |O(G)|. |\{G_2 \in O(G) \text{ t.q. } G_1 \cap G_2 \in O(H)\}| \;. \end{split}$$

où G_1 est une copie fixée de G. Or, en notant c(H,G) le nombre de copies de H dans G,

$$|\{G_2 \in O(G) \text{ t.q. } G_1 \cap G_2 \in O(H)\}| \le c(H,G)^2 \frac{|O(G)|}{|O(H)|}.$$
 (1.3)

En effet, en notant H_1 une copie fixe de H incluse dans G_1 ,

$$|\{G_2 \in O(G) \text{ t.q. } G_1 \cap G_2 \in O(H)\}| \le c(H,G)|\{G_2 \in O(G) \text{ t.q. } H_1 \subset G_2\}|$$
. De plus,

$$|O(G)|c(H,G) = |\{(\tilde{H}, G_2) \in O(H) \times O(G) \text{ t.q. } \tilde{H} \subset G_2\}|,$$

= $|O(H)|.|\{G_2 \in O(G) \text{ t.q. } H_1 \subset G_2\}|,$

ce qui montre (1.3). Par conséquent,

$$\Delta \leq \sum_{H \in \mathcal{H}} p^{2e_G - e_H} c(H, G)^2 \frac{|O(G)|^2}{|O(H)|} ,$$

$$\leq \sum_{\substack{H \subsetneq G \\ e_H \neq 0}} \frac{c(H, G) \mathbb{E}(X_G)^2}{\mathbb{E}(X_H)} ,$$

On a donc prouvé le lemme suivant.

Lemme 1.1.1. Pour tout graphe G non vide,

$$\mathsf{Var}(X_G) \leq \mathbb{E}(X_G) + \sum_{\substack{H \subsetneq G \\ e_H \neq 0}} \frac{c(H,G)\mathbb{E}(X_G)^2}{\mathbb{E}(X_H)} \; .$$

On en déduit facilement la fonction seuil pour le fait de contenir une copie de G. En effet, si $p = o(n^{-1/m_G})$, alors notamment $\mathbb{E}(X_G)$ tend vers 0, donc a.p.s $\mathcal{G}(n,p)$ ne contient pas G. Si $p = \omega(n^{-1/m_G})$, alors $\mathbb{E}(X_H)$ tend vers l'infini pour tout $H \subset G$ non vide. Donc le lemme précédent et la méthode du second moment permettent de conclure que $\mathcal{G}(n,p)$ contient une copie de G a.p.s.

Théorème 1.1.2. Pour tout graphe G non vide fixé, la fonction seuil pour le fait de contenir une copie de G est n^{-1/m_G} .

1.2 A l'intérieur du seuil pour les sous-graphes strictement équilibrés

Définition 1.2.1. On dit qu'un graphe G est équilibré $si\ e_G/v_G=m_G$, c'est à dire $si\ son\ degré$ moyen est supérieur ou égal à n'importe lequel de celui de ses sous-graphes. On dit qu'il est strictement équilibré $si\ son\ degré$ moyen est strictement supérieur à ceux de ses sous-graphes propres.

Lorsqu'un graphe G est strictement équilibré et que $\mathbb{E}(X_G) = \Theta(1)$, on voit que $\Delta = o(1)$ car $\mathbb{E}(X_H) \gg 1$ pour tout sous-graphe propre H de G non vide. On en déduit que la différence entre la variance de X_G et son espérance est petite, et que les indicatrices qui composent X_G sont peu corrélées. On peut alors s'attendre à avoir une convergence de X_G en loi vers une loi de Poisson si $\mathbb{E}(X_G)$ converge vers une constante $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On en déduira alors que la probabilité de voir une copie de G dans G(n,p) vaut :

$$\mathbb{P}(X_G \ge 1) \sim 1 - e^{-\lambda} \ . \tag{1.4}$$

Le but de cette section est de montrer la proximité entre la loi de X_G et une loi de Poisson. On verra dans le chapitre 3 une façon de montrer directement (1.4) à l'aide d'inégalités de corrélation, qui peuvent d'ailleurs être utiles dans un contexte plus large.

1.2.1 Convergence en loi et distance en variation totale

Rappelons la définition de la convergence en loi.

Définition 1.2.2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace topologique mesurable \mathcal{X} . Soit μ une mesure de probabilité sur \mathcal{X} et

 μ_n la loi de X_n . On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers μ si et seulement si pour toute fonction continue bornée f de \mathcal{X} dans \mathbb{R} ,

$$\int f d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f d\mu .$$

Lorsque $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes de la convergence en loi.

Proposition 1.2.3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs réelles, μ une mesure de probabilité sur les boréliens de \mathbb{R} et μ_n la loi de X_n . Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers μ .
- (ii) Convergence des fonctions de répartition. Pour tout x réel tel que $\mu(\lbrace x \rbrace) = 0$,

$$\mu_n(]-\infty,x]) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(]-\infty,x])$$
.

(iii) Convergence des fonctions caractéristiques. Pour tout réel t,

$$\int e^{itx} d\mu_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int e^{itx} d\mu(x) .$$

Soit maintenant un espace E au plus dénombrable, muni de la tribu discrète $\mathcal E$ et de la topologie discrète. Pour mesurer la proximité entre deux lois, on peut utiliser la distance en variation totale définie, pour deux mesures de probabilités μ et ν sur E, par

$$d_{TV}(\mu,\nu) = \sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

Cette distance définit en général une topologie plus fine que la topologie de la convergence en loi, mais sur un espace dénombrable comme E, nous allons voir que les deux topologies sont équivalentes.

Lemme 1.2.4.

$$d_{TV}(\mu,\nu) = \frac{1}{2} \sup_{f:E \to [-1,1]} |\int f \ d\mu - \int f \ d\nu| = \frac{1}{2} \sum_{x \in E} |\mu(x) - \nu(x)|.$$

Démonstration: Soit $f: E \to [-1, 1]$.

$$\left| \int f \ d\mu - \int f \ d\nu \right| \le \sum_{x \in E} |f(x)| |\mu(x) - \nu(x)| \le \sup_{E} |f| \sum_{x \in E} |\mu(x) - \nu(x)|,$$

et l'inégalité est saturée pour $f=\mathbbm{1}_B-\mathbbm{1}_B^c$ avec :

$$B = \{ x \in E \text{ t.q. } \mu(x) \ge \nu(x) \}$$
.

Ceci montre la deuxième égalité. Pour la première,

$$2|\mu(A) - \nu(A)| = |\mu(A) - \nu(A)| + |\mu(A^c) - \nu(A^c)| \le \sum_{x \in E} |\mu(x) - \nu(x)| ,$$

et l'inégalité est saturée pour A = B.

5

Proposition 1.2.5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E, μ une mesure de probabilité sur E et μ_n la loi de X_n . Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) $(X_n)_{n>1}$ converge en loi vers μ .
- (ii) Pour toute fonction f bornée de E dans \mathbb{R} ,

$$\int f \ d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f \ d\mu \ .$$

(iii) Pour tout x de E,

$$\mu_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu(x)$$
.

(iv)
$$d_{TV}(\mu_n, \mu) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Démonstration: Exercice!

Il est facile de voir que si (X,Y) est une variable aléatoire telle que X a pour loi μ et Y pour loi ν (on appelle (X,Y) un couplage de μ et ν), alors :

$$d_{TV}(\mu,\nu) \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$$
.

Il se trouve que l'égalité est atteinte pour un certain couplage.

Proposition 1.2.6.

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \min_{(X,Y) \ couplage \ de \ \mu \ et \ \nu} \mathbb{P}(X \neq Y) \ .$$

Démonstration: Soit $p = \sum_{x} \mu(x) \wedge \nu(x)$. On a :

$$d_{TV}(\mu,\nu) = 1 - p .$$

Si $p \in \{0,1\}$, faire une preuve séparée. Sinon, prendre U,V,W et B des variables aléatoires telles que (U,V,W) soit indépendante de B, B soit de Bernoulli de paramètre p, U de loi $p^{-1}(\mu \wedge \nu)$, V de loi $(1-p)^{-1}(\mu - \mu \wedge \nu)$ et W de loi $(1-p)^{-1}(\nu - \mu \wedge \nu)$. On pose alors :

$$X = Y = U \text{ si } B = 1$$
,

$$X = V$$
 et $Y = W$ si $B = 0$.

On vérifie que c'est un couplage, et que :

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \leq \mathbb{P}(B = 0) = 1 - p = d_{TV}(\mu, \nu) .$$

1.2.2 Approximation poissonienne par couplage

Le premier résultat est un résultat général sur l'approximation poissonienne des sommes d'indicatrices. Pour mesurer la proximité entre deux lois, on utilisera la distance en variation totale.

Prenons par exemple n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli, X_1, \ldots, X_n , avec X_i de paramètre p_i . On a alors le résultat facile suivant.

Lemme 1.2.7. Soit μ la loi de $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et ν la loi de Poisson de paramètre $\lambda = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Alors,

$$d_{TV}(\mu,\nu) \le \sum_{i=1}^{n} p_i^2 .$$

Démonstration: On réalise un couplage de μ et ν de la façon suivante. Soient U_1, \ldots, U_n des v.a.i.i.d uniformes su [0, 1]. On note :

$$y_0^i = 0 \text{ et } \forall k \ge 1, \ y_k^i = \mathbb{P}(\mathcal{P}(p_i) \le k - 1) = \sum_{i=0}^{k-1} e^{-p_i} \frac{(p_i)^j}{j!}.$$

$$X_i = \mathbb{1}_{U_i \ge 1-p_i}$$
 et $Y_i = k$ lorsque $U_i \in [y_k^i, y_{k+1}^i]$.

Les X_i sont indépendantes, de loi $\mathcal{B}(p_i)$ et les Y_i sont indépendantes, de loi $\mathcal{P}(p_i)$. Ainsi, $Y = \sum_i Y_i$ est de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, et donc (X, Y) est un couplage de μ et de ν .

$$\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) = \mathbb{P}(U_i \in [1-p_i, e^{-p_i}]) + \mathbb{P}(U_i \in [e^{-p_i}(1+p_i), 1]) = p_i(1-e^{-p_i}) \leq p_i^2$$
.

Donc:

$$d_{TV}(\mu,\nu) \le \mathbb{P}(X \ne Y) \le \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \ne Y_i) \le \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

On considère maintenant, comme dans la section précédente, une collection finie d'indicatrices $(I_{\alpha})_{\alpha \in \Gamma}$, éventuellement dépendantes. On note $X = \sum_{\alpha \in \Gamma} I_{\alpha}$ leur somme, $p_{\alpha} = \mathbb{E}(I_{\alpha})$ et on s'intéresse à l'approximation de X par la loi de Poisson de paramètre :

$$\lambda = \sum_{\alpha} p_{\alpha} = \mathbb{E}(X) \ .$$

Théorème 1.2.8. On note μ la loi de X, μ_{α} la loi de $(I_{\beta})_{\beta \neq \alpha}$ conditionnellement à $\{I_{\alpha} = 1\}$ et ν_{α} la loi de $(I_{\beta})_{\beta \neq \alpha}$.

$$d_{TV}(\mu, \mathcal{P}(\lambda)) \le \sum_{\alpha} p_{\alpha}^2 + 2 \sum_{\alpha} p_{\alpha} d_{TV}(\mu_{\alpha}, \nu_{\alpha}) .$$

Démonstration: On va coupler μ avec la loi d'une somme de Bernoulli indépendantes de paramètres p_{α} . Le Lemme 1.2.7 permettra ensuite de mesurer l'écart entre la loi de la somme de Bernoulli indépendante et la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Soit m le cardinal de Γ . On ordonne les éléments de Γ de manière arbitraire, et on les renomme $1, \ldots, m$. Notamment $p_i = \mathbb{E}(I_i)$. Soient U_1, \ldots, U_m des v.a.i.i.d uniformes sur [0,1]. On pose, pour $(x_1, \ldots, x_{i-1}) \in \{0,1\}^{i-1}$:

$$p'_i(x_1,\ldots,x_{i-1}) = \mathbb{P}(I_i=1|I_1=x_1,\ldots,I_{i-1}=x_{i-1})$$
.

et on définit :

$$I_i^* = \mathbb{1}_{U_i \leq p_i} \text{ et } I_i' = \mathbb{1}_{U_i \leq p_i'(I_1', \dots, I_{i-1}')}.$$

Alors les $(I_i')_{1 \leq i \leq n}$ ont même loi que les $(I_i)_{1 \leq i \leq n}$ et les $(I_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ ont pour loi $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(p_i)$. De plus,

$$\begin{split} \mathbb{P}(I_i' \neq I_i^*) &= \mathbb{E}[\mathbb{P}(I_i' \neq I_i^* | I_1', \dots, I_{i-1}')] \;, \\ &= \mathbb{E}[|p_i - p_i'(I_1', \dots, I_{i-1}')|] \;, \\ &= \mathbb{E}[|p_i - \mathbb{E}(I_i | I_1, \dots, I_{i-1})|] \;, \\ &\leq \mathbb{E}[|p_i - \mathbb{E}(I_i | I_1, \dots, I_{i-1}, I_{i+1}, \dots, I_n)|] \;, \\ &= \sum_{x \in \{0,1\}^{n-1}} \mathbb{P}[(I_j)_{j \neq i} = x] |p_i - \mathbb{E}(I_i | (I_j)_{j \neq i} = x)| \;, \\ &= \sum_{x \in \{0,1\}^{n-1}} \mathbb{P}[(I_j)_{j \neq i} = x] \left| \mathbb{P}(I_i = 1) - \mathbb{P}(I_i = 1 | (I_j')_{j \neq i} = x) \right| \;, \\ &= \sum_{x \in \{0,1\}^{n-1}} \mathbb{P}(I_i = 1) \left| \mathbb{P}[(I_j)_{j \neq i} = x] - \mathbb{P}[(I_j)_{j \neq i} = x | I_i = 1] \right| \;, \\ &= 2\mathbb{P}(I_i = 1) d_{VT}(\mu_i, \nu_i) \;, \end{split}$$

avec μ_i la loi de $(I_j)_{j\neq i}$ et ν_i la loi de $(I_j)_{j\neq i}$ conditionnellement à $\{I_i=1\}$. Enfin, en notant ν la loi de $\sum_{i=1}^n I_i^*$,

$$d_{VT}(\mu, \mathcal{P}(\lambda)) \le d_{VT}(\mu, \nu) + d_{VT}(\nu, \mathcal{P}(\lambda)) \le 2 \sum_{i=1}^{n} p_i d_{VT}(\mu_i, \nu_i) + \sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

On peut facilement appliquer le Théorème 1.2.8 pour obtenir une approximation poissonienne pour une v.a qui compte un certain nombre de configurations contenues dans le graphe aléatoire.

Théorème 1.2.9. Soit Γ un ensemble de parties de $E(K_n)$. Pour $\alpha \in \Gamma$, on note :

$$I_{\alpha} = \mathbb{1}_{\alpha \subset \mathcal{G}(n,p)}$$
.

On note $\alpha \sim \beta$ si $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. On définit :

$$\Delta = \sum_{\alpha \sim \beta} \mathbb{P}(I_{\alpha} = 1 \ et \ I_{\beta} = 1) \ .$$

Alors,

$$d_{TV}(\mathcal{L}(X), \mathcal{P}(\lambda)) \le \sum_{\alpha} p_{\alpha}^2 + 2\Delta$$
.

Démonstration: Soit $X=(X_e)_{e\in K_n}$ une collection de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p. On note X' la collection obtenue à partir de X en remplaçant par 1 les X_e pour $e\in\alpha$. On définit, pour $\beta\in\Gamma$:

$$I_{\beta} = \prod_{e \in \beta} X_e \text{ et } I'_{\beta} = \prod_{e \in \beta} X'_e.$$

Ainsi, en conservant les notations du Théorème 1.2.8, $(I'_{\beta})_{\beta \neq \alpha}$ a pour loi μ_{α} et $(I_{\beta})_{\beta \neq \alpha}$ a pour loi ν_{α} . On a alors :

$$\begin{split} d_{TV}(\mu_{\alpha},\nu_{\alpha}) & \leq & \mathbb{P}((I'_{\beta})_{\beta \neq \alpha} \neq (I_{\beta})_{\beta \neq \alpha}) \;, \\ & \leq & \mathbb{P}(\sum_{\beta \sim \alpha} I'_{\beta} \geq 1) \;, \\ & = & \mathbb{P}(\sum_{\beta \sim \alpha} I_{\beta} \geq 1 | I_{\alpha} = 1) \;, \end{split}$$

et donc:

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} d_{TV}(\mu_{\alpha}, \nu_{\alpha}) \leq \sum_{\alpha} \mathbb{P}(\sum_{\beta \sim \alpha} I_{\beta} \geq 1 \text{ et } I_{\alpha} = 1) ,$$

$$\leq \sum_{\beta \sim \alpha} \mathbb{P}(I_{\beta} = 1 \text{ et } I_{\alpha} = 1) .$$

Remarquons que le Théorème 1.2.8 n'est pas optimal lorsque λ est grand. En fait, la stratégie de preuve du Lemme 1.2.7 est trop grossière : le couplage choisit n'optimise pas le fait que les différences entre les X_i et les variables de Poisson correspondantes peuvent se compenser dans la somme. Il existe une méthode, dite méthode de Stein, qui améliore le Théorème 1.2.8 lorsque λ est grand (cf. [BHJ92], notamment l'introduction et le chapitre 5).

Dernière remarque, le Théorème 1.2.8 implique une convergence vers la loi normale pour $\lambda^{-1/2}(X_G - \lambda)$ si λ tend vers l'infini.

1.2.3 Méthode des moments

Une autre façon de montrer la convergence vers une loi de Poisson (ou une autre loi) est la *méthode des moments*.

Théorème 1.2.10. Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} caractérisée par ses moments. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une sutie de variables aléatoires réelles dont les moments convergent vers ceux de μ . Alors $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers μ .

Si $k \in \mathbb{N}$, le k-ème moment factoriel d'une v.a X est défini par :

$$\mathbb{E}[(X)_k] = \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-k+1)].$$

Pour une variable de Poisson de paramètre λ , le k-ème moment factoriel vaut λ^k . Par conséquent, la méthode des moments pour la loi de Poisson se réduit à la proposition suivante.

Proposition 1.2.11. Soit X_n une suite de variables aléatoires à valeurs entières et λ un réel strictement positif. Si pour tout entier $k \geq 1$, le k-ème moment factoriel de X_n converge vers λ^k , alors X_n converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ .

1.3 Exercices

Exercice 1.1 Soit $X = \sum_{\alpha} I_{\alpha}$ une somme d'indicatrices telle que $\sup_{\alpha} \mathbb{E}(I_{\alpha}) = o(1)$. Avec les notations du cours, montrer que :

$$\mathsf{Var}(X) \sim \mathbb{E}(X) + \Delta$$
.

Exercice 1.2 Calculer la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λ , puis calculer son k-ème moment factoriel.

Exercice 1.3 Soit G un graphe équilibré de degré moyen d et G' un graphe de degré moyen $d' \geq d$. Montrer que toute union de G et G' a un degré moyen supérieur ou égal à d. En déduire qu'une union de copies de G a un degré moyen supérieur ou égal à d. Donner un contre-exemple lorsque G n'est pas équilibré.

Exercice 1.4 Déterminer une fonction seuil pour le graphe C_4 , cycle de longueur 4 ainsi que pour le graphe G obtenu à partir de C_4 en ajoutant un sommet et une unique arête reliant ce sommet à C_4 . A-t-on un comportement poissonien pour X_{C_4} à l'intérieur du seuil? Et pour X_G (on pourra donner une idée de la loi limite)?

Exercice 1.5 Soit G un graphe strictement équilibré et Y_G le nombre maximal de copies induites et disjointes de G dans $\mathcal{G}(n,p)$. On suppose que $p = cn^{-1/m(G)}$. Montrer que Y_G converge vers une loi de Poisson.

Exercice 1.6 Soient $n \leq N$ deux entiers naturels. Soit une urne à N boules numérotées. On considère deux façons de prélever un échantillon aléatoire de n boules dans l'urne. Soit on tire les boules avec remise, et on note $X = (X_1, \ldots, X_n)$ l'échantillon obtenu. Soit on tire les boules sans remise, et on note $X' = (X'_1, \ldots, X'_n)$ l'échantillon obtenu.

- 1. Calculer la distance en variation totale entre les lois de X et X' en utilisant un couplage.
- 2. On suppose que les boules sont de deux couleurs : il y a $M \leq N$ boules blanches et N-M boules noires. On note S (resp. S') le nombre de boules blanches obtenues en tirant n boules avec remise (resp. sans remise). Préciser les lois de S et S' et majorer la distance en variation totale entre ces deux lois.

Chapitre 2

Connexité

Dans ce chapitre, on étudie le seuil d'apparition de la propriété monotone "être connexe". On montrera que ce seuil est situé en $\frac{\log n}{n}$, avec une largeur de seuil d'ordre 1/n. C'est donc un exemple de seuil étroit.

Pour être connexe, il faut bien sûr ne pas avoir de sommet isolé. Il se trouve qu'au moment où le graphe devient connexe, la seule obstruction à sa connexité est la présence de sommets isolés. Ainsi les seuils de la propriété "ne pas contenir de sommet isolé" et "être connexe" coïncident. La raison de ce comportement est la suivante : lorsque $p \gg 1/n$, le graphe aléatoire possède une grande composante connexe, appelée "composante géante", contenant n-o(n) sommets, et les autres composantes ont peu de sommets (cf. chapitre 4). Lorsque p grandit, une composante de taille k+1 a plus de chances d'être "avalée" par la grande composante qu'une composante de taille k, car le nombre d'arêtes joignant la composante de taille k+1 à la composante géante est équivalent à (k+1)n alors que le nombre d'arêtes joignant la composante de taille k à la composante géante est équivalent à kn. Ainsi, les dernières composantes connexes à être avalées par la composante géante sont les plus petites.

2.1 Disparition des sommets isolés

Soit X le nombre de sommets isolés dans $\mathcal{G}(n,p)$.

$$X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{i \text{ est isolé}}.$$

$$\mathbb{E}(X) = n(1-p)^{n-1} .$$

Lorsque p = o(1), ce qu'on supposera dans la suite,

$$\mathbb{E}(X) = e^{\log n - np - np^2/2 + o(np^2)}.$$

Si $np - \log n$ tend vers $+\infty$, $\mathcal{G}(n,p)$ ne contient pas de sommet isolé, a.p.s. Si $np - \log n$ tend vers $-\infty$, $\mathbb{E}(X)$ tend vers $+\infty$. Examinons le second moment :

$$\begin{split} \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}(X) + \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(i, j \text{ sont isolés}) \;, \\ &= \mathbb{E}(X) + (n)_2 (1 - p)^{2n - 3} \;, \\ &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 (1 + o(1)) \;, \end{split}$$

Donc si $\mathbb{E}(X)$ tend vers l'infini, $\mathbb{E}(X^2) \sim \mathbb{E}(X)^2$ et on peut appliquer la méthode du second moment. On a montré :

Proposition 2.1.1. Si $np - \log n$ tend $vers - \infty$, $\mathcal{G}(n,p)$ contient au moins un sommet isolé, a.p.s. Si $np - \log n$ tend $vers + \infty$, $\mathcal{G}(n,p)$ ne contient pas de sommet isolé, a.p.s.

On peut imaginer que dans l'intervalle de seuil, X a un comportement poissonien, vue la faible corrélation entre les indicatrices la composant. Calculons le k-ème moment factoriel de X pour k fixé :

$$\mathbb{E}[(X)_k] = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \\ 2 \text{ à 2 distincts}}} \mathbb{P}(i_1, \dots, i_k \text{ sont isolés}),$$

$$= (n)_k (1-p)^{\binom{k}{2}+k(n-k)},$$

$$\sim \mathbb{E}[X]^k.$$

Donc si $\mathbb{E}(X)$ converge vers une constante λ , X converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ . Or, si $np - \log n$ converge vers $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(X)$ converge vers e^{-c} . On en déduit le résultat suivant.

Théorème 2.1.2. Soit X le nombre de sommets isolés dans $\mathcal{G}(n,p)$. Si $p = \frac{\log n}{n} + \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $c \in \mathbb{R}$, X converge vers une loi de Poisson de paramètre e^{-c} . En particulier, la probabilité que $\mathcal{G}(n,p)$ possède au moins un sommet isolé converge vers $e^{-e^{-c}}$.

Remarquons qu'on aurait pu également utiliser la méthode par couplage (Exercice!).

2.2 Connexité

Nous allons d'abord montrer le lemme suivant.

Lemme 2.2.1. Si $np \ge \alpha \log n$ avec $\alpha > 2/3$, alors a.p.s. $\mathcal{G}(n,p)$ ne possède pas de composante connexe d'ordre appartenant à [2, n/2].

Par conséquent, les composantes connexes de $\mathcal{G}(n,p)$ ne peuvent être que de deux types : des sommets isolés et une composante "géante", de taille strictement supérieure à n/2 (il ne peut contenir plus d'une composante connexe de taille

2.2. CONNEXITÉ

13

strictement supérieure à n/2). On en déduira donc que a.p.s. $\mathcal{G}(n,p)$ est connexe si et seulement si il ne contient pas de sommet isolé, ce qui donne, avec le théorème 2.1.2:

Théorème 2.2.2. Si $p = \frac{\log n}{n} + \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $c \in \mathbb{R}$, la probabilité que $\mathcal{G}(n,p)$ soit connexe converge vers $e^{-e^{-c}}$.

Démonstration: (du Lemme 2.2.1). Supposons que p = o(1) et $np \ge \alpha \log n$ avec $\alpha > 1/2$. Examinons séparément le cas des composantes connexes d'ordre 2 (les arêtes isolées). La probabilité que $\mathcal{G}(n,p)$ contienne une composante connexe d'ordre 2 est inférieure à :

$$\binom{n}{2}p(1-p)^{n-2} = \Theta(pn^2e^{-2pn}) = O(n\log ne^{-2\alpha\log n}) = o(1) .$$

Toute composante connexe d'ordre r contient un arbre couvrant dont tous les sommets sont isolés des sommets en dehors de la composante connexe. Le nombre d'arbres étiquetés sur r sommets est égal à r^{r-2} d'après la formule de Cayley (cf. le cours de Michel Mollard). Donc, la probabilité que $\mathcal{G}(n,p)$ contienne une composante connexe d'ordre appartenant à [3,n/2] est inférieure à :

$$\sum_{r=3}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{r} r^{r-2} p^{r-1} (1-p)^{r(n-r)} .$$

Pour borner cette quantité, on peut utiliser la formule de Stirling. Il existe une constante universelle C telle que :

$$\binom{n}{r} \le C\sqrt{\frac{n}{r(n-r)}} \left(\frac{n}{r}\right)^r \left(\frac{n}{n-r}\right)^{n-r} .$$

Lorsque $r \leq n/2$, on obtient

$$\binom{n}{r}r^{r-2} \le \frac{C'}{r^{5/2}}n^r e^r .$$

D'autre part, lorsque $r \leq n/2$,

$$(1-p)^{r(n-r)} < e^{-npr/2}$$
.

Ainsi,

$$\binom{n}{r} r^{r-2} p^{r-1} (1-p)^{r(n-r)} \lesssim \frac{1}{p} [enpe^{-np/2}]^r .$$

Comme np tend vers l'infini, $enpe^{-np/2}$ tend vers 0 et donc, pour n assez grand, la probabilité que $\mathcal{G}(n,p)$ contienne une composante connexe d'ordre appartenant à [3,n/2] est dominée par :

$$\sum_{r=3}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{p} [enpe^{-np/2}]^r \lesssim \frac{1}{p} (enpe^{-np/2})^3 = ne^{-3np/2} (np)^2.$$

Pour $np \ge \alpha \log n$ avec $\alpha > 2/3$ ceci tend vers 0.

2.3 Exercices

Exercice 2.1 Montrer que si np tend vers l'infini, a.p.s. les composantes connexes de $\mathcal{G}(n,p)$ de taille inférieure à n/2 sont toutes des arbres, de taille $o(\log n)$.

Exercice 2.2 Montrer que lorsque np tend vers l'infini, a.p.s le nombre de points en dehors de la composante géante est o(n).

Exercice 2.3 Montrer que si $np \sim \alpha \log n$ avec $\alpha < 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre X de sommets isolés de $\mathcal{G}(n,p)$ appartient a.p.s à $[n^{1-\alpha}(1-\varepsilon), n^{1-\alpha}(1+\varepsilon)]$. En déduire que si $\alpha \in]1/2, 1[$, $\mathcal{G}(n,p)$ est a.p.s. constitué de $O(n^{1-\alpha})$ sommets isolés et d'une composante géante contenant $n - O(n^{1-\alpha})$ sommets.

Chapitre 3

Inégalités de concentration pour des sommes de variables aléatoires indépendantes

Ce chapitre est un interlude technique pour appréhender facilement l'ordre de grandeur des sommes de variables aléatoires indépendantes.

Les sommes de v.a. indépendantes interviennent régulièrement dans l'étude de $\mathcal{G}(n,p)$. Notamment, la loi binomiale joue un rôle important : par exemple, le degré d'un sommet fixé ainsi que le nombre total d'arêtes de $\mathcal{G}(n,p)$ suivent une loi binomiale. Plus généralement, d'autres types de sommes de variables aléatoires indépendantes apparaîtront dans la suite du cours, et il sera crucial de quantifier leur dispersion. En général, une telle somme Z est proche de son espérance (penser à la loi des grands nombres), et un moyen de quantifier cela est de produire une inégalité de concentration, qui est une borne supérieure sur $\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| > t)$ pour t > 0. Le comportement à gauche et à droite de la moyenne n'étant pas toujours symétrique, il est souvent préférable d'obtenir séparément, pour t > 0, des bornes sur $\mathbb{P}(Z - \mathbb{E}(Z) > t)$, on parle alors d'inégalité de déviation supérieure, et sur $\mathbb{P}(Z - \mathbb{E}(Z) < -t)$, on parle alors d'inégalité de déviation inférieure.

Dans ce chapitre, nous obtiendrons via la méthode de Cramér-Chernoff des inégalités de déviations nommées inégalités de Hoeffding, Bennett et Bernstein.

Remarque : on supposera toujours les variables aléatoires intégrables lorsque c'est nécessaire.

3.1 Méthode de Cramér-Chernoff

Concentrons nous sur le cas des déviations supérieures. L'outil de base est l'inégalité de Markov: si Z est une v.a positive ou nulle, et t > 0, alors:

$$\mathbb{P}(Z > t) \le \frac{\mathbb{E}(Z)}{t} .$$

On peut faire fructifier un peu la méthode en prenant Z et t de signes quelconques et ϕ une fonction croissante et strictement positive sur \mathbb{R} , pour obtenir :

$$\mathbb{P}(Z > t) \le \mathbb{P}(\phi(Z) > \phi(t)) \le \frac{\mathbb{E}(\phi(Z))}{\phi(t)} .$$

Il y a toutes sortes de fonctions ϕ intéressantes. Le choix de $t \geq 0$, $\phi(x) = x^2$ et $Z = |X - \mathbb{E}(X)|$ donne l'inégalité de Tchebycheff. Lorsqu'on a affaire à des sommes de variables aléatoires indépendantes qui ont des moments exponentiels, il y a toute une famille de fonctions ϕ pour lesquels on peut faire des calculs assez aisés : ce sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{\lambda x}$ avec $\lambda \geq 0$ (le choix $\lambda \leq 0$ donne des inégalités de déviations inférieures). En effet, notons $Z = \sup_{i=1}^n X_i$ une somme de variables aléatoires indépendantes. On obtient, pour $\lambda \geq 0$:

$$\mathbb{P}(Z > t) \le e^{-\lambda t} \mathbb{E}(e^{\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}) \le e^{-\lambda t} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{\lambda X_i}).$$

Il reste alors à contrôler $\lambda \mapsto \mathbb{E}(e^{\lambda X_i})$ et à optimiser en λ . En fait, cette méthode, dite *méthode de Cramér-Chernoff*, est utile même avec une seule variable aléatoire, car elle permet souvent d'obtenir des bornes simples sur sa queue de distribution. On peut écrire, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(Z > t) \le \inf_{\lambda > 0} \{ e^{-\lambda t} \mathbb{E}(e^{\lambda t}) \} .$$

De même,

$$\mathbb{P}(Z < t) \le \inf_{\lambda \le 0} \{ e^{-\lambda t} \mathbb{E}(e^{\lambda t}) \} .$$

Notons Λ_Z la log-Laplace de Z:

$$\Lambda_Z(\lambda) = \log \mathbb{E}(e^{\lambda Z}) ,$$

et pour une fonction f de \mathbb{R} dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on définit sa transformée de Legendre :

$$f^*(t) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda t - f(\lambda)\}$$
.

 Λ_Z^* est appelée transformée de Cramér de Z.

Proposition 3.1.1. *Pour tout* $t \geq \mathbb{E}(Z)$,

$$\mathbb{P}(Z > t) \le e^{-\Lambda_Z^*(t)} ,$$

et pour tout $t \leq \mathbb{E}(Z)$,

$$\mathbb{P}(Z < t) \le e^{-\Lambda_Z^*(t)} .$$

Démonstration: Il suffit de vérifier que pour $t \geq \mathbb{E}(Z)$,

$$\Lambda_Z^*(t) = \sup_{\lambda > 0} \{ \lambda t - \Lambda_Z(\lambda) \} .$$

et pour $t \leq \mathbb{E}(Z)$,

$$\Lambda_Z^*(t) = \sup_{\lambda < 0} \{ \lambda t - \Lambda_Z(\lambda) \} .$$

Remarquons d'abord que $\Lambda_Z^*(t) \geq 0$ (prendre $\lambda = 0$ dans la définition de Λ_Z^*). L'inégalité de Jensen assure que $\Lambda_Z(\lambda) \geq \lambda \mathbb{E}(Z)$. Donc lorsque $t = \mathbb{E}(Z)$, $\Lambda_Z^*(t) = 0$ et dans la définition de Λ_Z^* , l'égalité est atteinte pour $\lambda = 0$. De plus, lorsque $t > \mathbb{E}(Z)$, et $\lambda < 0$, $\lambda t - \Lambda_Z(\lambda) < 0 \leq \Lambda_Z^*(t)$, ce qui montre que :

$$\Lambda_Z^*(t) = \sup_{\lambda \ge 0} \{ \lambda t - \Lambda_Z(\lambda) \} .$$

Idem pour $t < \mathbb{E}(Z)$ et $\lambda > 0$.

Quelques exemples : cf. Exercice 3.2.

3.2 Inégalités de Hoeffding, Bennett et Bernstein

Il est souvent intéressant d'utiliser la méthode de Cramér-Chernoff lorsque Z est une somme de variables aléatoires indépendantes X_1, \ldots, X_n et qu'on ne dispose pas exactement de la loi des X_i mais seulement d'hypothèses plus générales comme une borne sur leurs supports ou sur leurs variances. Le premier exemple est l'inégalité de Hoeffding, qui repose sur le lemme suivant.

Lemme 3.2.1. Soit Y une variable aléatoire d'espérance nulle prenant ses valeurs dans un intervalle [a, b]. Alors,

$$\Lambda_Y(\lambda) \le \frac{\lambda^2 (b-a)^2}{8} ,$$

$$\mathbb{P}(Y \ge t) \le e^{-2\frac{t^2}{(b-a)^2}} ,$$

et

$$\mathbb{P}(Y \le -t) \le e^{-2\frac{t^2}{(b-a)^2}} .$$

Démonstration: Tout d'abord,

$$|Y - \frac{1}{2}(a+b)| \le \frac{1}{2}(b-a)$$
,

donc:

$$\mathsf{Var}(Y) = \mathsf{Var}(Y - \frac{1}{2}(a+b)) \le \frac{1}{4}(b-a)^2 \;.$$

Ensuite, soit Q la loi de Y. On note Z une variable aléatoire ayant pour loi Q_{λ} , avec :

$$\frac{dQ_{\lambda}}{dQ}(x) = e^{x\lambda - \Lambda_Y(\lambda)} .$$

Z est à valeurs dans [a, b], donc sa variance est majorée par $\frac{1}{4}(b-a)^2$. Mais,

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_Y^{''}(\lambda) & = & e^{-\Lambda_Y(\lambda)}\mathbb{E}(Y^2e^{\lambda Y}) - e^{-2\Lambda_Y(\lambda)}(\mathbb{E}(Ye^{\lambda Y}))^2 \;, \\ & = & \operatorname{Var}(Y) \;. \end{array}$$

D'après la formule de Taylor, il existe $\theta \in [0, \lambda]$ tel que

$$\Lambda_Y(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} \Lambda_Y''(\theta) \le \frac{\lambda^2 (b-a)^2}{8} \ .$$

Enfin, la transformée de Legendre de $\lambda \mapsto \frac{1}{2}\lambda^2$ est $t \mapsto \frac{1}{2}t^2$.

Théorème 3.2.2 (Inégalité de Hoeffding). Soient X_1, \ldots, X_n des variables aléatoires indépendantes avec X_i à valeurs dans $[a_i, b_i]$. Soit $S = \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X_i))$. Alors,

$$\Lambda_S(\lambda) \le \frac{\lambda^2}{8} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 ,$$

$$\mathbb{P}(S \ge t) \le e^{-2\frac{t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}} ,$$

et

$$\mathbb{P}(S \le -t) \le e^{-2\frac{t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}}.$$

Démonstration: Par indépendance des X_i ,

$$\Lambda_S(\lambda) = \sum_{i=1}^n \Lambda_{X_i - \mathbb{E}(X_i)}(\lambda) .$$

D'après le Lemme 3.2.1,

$$\Lambda_{X_i - \mathbb{E}(X_i)}(\lambda) \le \frac{\lambda^2 (b_i - a_i)^2}{8} ,$$

et on conclut en prenant la transformée de Legendre.

Prenons des variables aléatoires X_i i.i.d sur [-b,b]. Lorsque b est nettement plus grand que l'écart-type des X_i , l'inégalité de Hoeffding peut être très mauvaise pour des valeurs de t qui ne sont pas trop grandes (penser au théorème central limite de Lindeberg). Une meilleure inégalité est alors la suivante.

Théorème 3.2.3 (Inégalité de Bennett). Soient X_1, \ldots, X_n des variables aléatoires indépendantes majorées par un nombre b > 0. Soit $S = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}(X_i))$ et $v = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2)$. Alors, pour tout t > 0,

$$\mathbb{P}(S \ge t) \le e^{-\frac{v}{b^2}h(bt/v)} ,$$

où

$$h(u) = (1+u)\log(1+u) - u$$
.

Démonstration: On peut supposer b = 1. On note :

$$\phi(x) = e^x - x - 1 .$$

La première remarque est que :

$$\Lambda_{X_i - \mathbb{E}(X_i)}(\lambda) \leq \mathbb{E}(\phi(\lambda X_i))$$
,

en utilisant log $u \leq u-1$. Ensuite, la fonction $u \mapsto u^{-2}\phi(u)$ est croissante sur \mathbb{R} (par exemple, utiliser la formule de Taylor avec reste intégral). Ainsi, pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\phi(\lambda X_i) \leq X_i^2 \phi(\lambda)$$
,

donc:

$$\Lambda_S(\lambda) \le v\phi(\lambda)$$
.

Il suffit alors de calculer la transformée de Legendre du membre de droite, qui est la log-Laplace d'une loi de Poisson de paramètre v recentrée.

En remarquant que, pour $0 \le \lambda < 3$,

$$\phi(\lambda) \le \frac{\lambda^2}{2(1-\lambda/3)} \ ,$$

on peut montrer que (prendre $\lambda = u/(1+u/3)$):

$$h(u) \ge \frac{u^2}{2(1+u/3)}$$
.

On obtient alors le corollaire suivant qui peut être plus facile à interpréter.

Corollaire 3.2.4 (Inégalité de Bernstein). Soient X_1, \ldots, X_n des variables aléatoires indépendantes majorées p.s. par un nombre b > 0. Soit $S = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}(X_i))$ et $v = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2)$. Alors, pour tout t > 0,

$$\mathbb{P}(S \ge t) \le e^{-\frac{t^2}{2(v+bt/3)}} .$$

Remarquons que l'inégalité de Bernstein peut être démontrée sous des hypothèses plus faibles portant sur les moments des X_i plutôt que sur leurs sup essentiels, mais nous n'en auront pas l'utilité.

3.3 Exercices

Exercice 3.1 Montrer que les transformées de Laplace et de Cramér sont des fonctions convexes.

Exercice 3.2 Calculer les transformées de Laplace et de Cramér des lois de Bernoulli et binomiales, des lois de Poisson et des lois gaussiennes.

Exercice 3.3 Comparer l'inégalité de Hoeffding et celle de Bernstein pour une somme de Bernoulli i.i.d de paramètre $p \le 1/2$.

Exercice 3.4 On suppose que p=1/2 et $r\gg \log n$. Montrer qu'a.p.s, dans $\mathcal{G}(n,p)$, tout couple (U,V) d'ensembles de sommets disjoints de taille supérieure à r vérifie :

 $\left|\frac{e(U,V)}{|U|.|V|} - p\right| \leq \sqrt{\frac{C\log n}{r}} \;,$

pour une constante C bien choisie. On a noté e(U,V) le cardinal de l'ensemble des arêtes menant de U à V.

Chapitre 4

Transition de phase d'Erdös-Rényi: apparition de la composante géante

On a vu dans le chapitre ${2\over 2}$ que lorsque $p={\log n\over n}-|\omega(1/n)|,\, {\mathcal G}(n,p)$ n'est pas connexe et lorsque $p = \frac{\log n}{n} + |\omega(1/n)|$, $\mathcal{G}(n,p)$ est connexe. On a vu également qu'un peu avant ce seuil, il existait une composante géante contenant de l'ordre de n sommets. Ceci suggère les questions suivantes : quelle est l'allure des composantes connexes lorsque $p \in]0, \frac{\log n}{n}[?$ A partir de quel instant $\mathcal{G}(n,p)$ contient-il une composante connexe de taille macroscopique (i.e contenant une proportion strictement positive de l'ensemble de tous les sommets)? Peut-il y avoir plusieurs composantes connexes de taille macroscopique?

Pour $k \geq 1$, on notera C_k la k-ème plus grande composante connexe et $L_k = |V(\mathcal{C}_k)|$ son ordre. Si v est un sommet, on note C(v) sa composante connexe.

Le but de tout ce chapitre sera de montrer le théorème suivant qui montre notamment qu'une unique composante géante (i.e macroscopique) apparait lorsque p franchit le seuil 1/n. Pour comprendre le comportement fin de cette transition lorsque p est proche de 1/n, on utilise une paramétrisation $p=(1+\varepsilon)/n=$ $(1 + \lambda n^{-1/3})/n$ avec ε et λ dépendant de n.

Théorème 4.0.1. Soit p = c/n avec $c \in \mathbb{R}_+^*$. Les évènements suivants ont lieu a.p.s.

Cas sous-critique : c < 1 fixé :

- Toutes les composantes connexes sont simples.
- $L_1 = \Theta(\log n).$

— De plus, pour tout $k \ge 1$ fixé, $L_k \sim L_1$.

Cas à peine sous-critique : $p = \frac{1-\varepsilon}{n}$ avec $\varepsilon = \frac{\lambda}{n^{1/3}}$, $1 \ll \lambda \ll n^{1/3}$.

- Toutes les composantes sont simples. $L_1 = \Theta(\varepsilon^{-2} \log \lambda) = \Theta(n^{2/3} \lambda^{-2} \ln \lambda).$

```
 - Pour \ tout \ k \geq 1 \ fix\acute{e}, \ L_k \sim L_1.  Fenêtre critique : p = \frac{1 + \lambda n^{-1/3}}{n} \ avec \ \lambda = \Theta(1).  Pour tout k \geq 1 \ fix\acute{e}, \ L_k = \Theta(n^{2/3}).  Cas à peine sur-critique : p = \frac{1 + \varepsilon}{n} \ avec \ \varepsilon = \frac{\lambda}{n^{1/3}}, \ 1 \ll \lambda \ll n^{1/3}.   - L_1 \sim 2\varepsilon n = 2\lambda n^{2/3}   - La \ complexit\acute{e} \ de \ \mathcal{C}_1 \ tend \ vers \ l'infini.   - Toutes \ les \ autres \ composantes \ sont \ simples.   - L_2 = \Theta(\varepsilon^{-2} \log \lambda) = \Theta(n^{2/3} \lambda^{-2} \ln \lambda).  Cas sur-critique : c > 1 \ fix\acute{e} :   - L_1 \sim yn \ avec \ y = y(c) \ solution \ strictement \ positive \ de :   1 - y = e^{-cy} \ .   (4.1)   - La \ complexit\acute{e} \ de \ \mathcal{C}_1 \ tend \ vers \ l'infini.
```

Faisons deux commentaires. Lorsqu'on regarde uniquement la paramétrisation p=c/n avec c fixé, on assiste à un "double saut" dans la taille de la plus grande composante connexe : si c<1, cette taille est d'ordre $\log n$, lorsque c=1 elle est d'ordre $n^{2/3}$ et lorsque c>1 elle devient d'ordre n. Ensuite, il n'y a jamais plus d'une c.c. d'ordre macroscopique.

Comment arriver à un tel résultat? Une idée simple pour analyser l'ordre d'une composante connexe est la suivante : on part d'un sommet fixé et on examine C(v) de proche en proche, en examinant à chaque fois les voisins des sommets rencontrés. On organise les sommets rencontrés en arbre. En première approximation, un sommet possède à chaque fois en moyenne np enfants. Au niveau k, on trouve donc de l'ordre de $(np)^k$ sommets et ainsi la taille totale de C(v) serait de l'ordre de $\sum_k (np)^k$. Ceci explique déjà pourquoi la position de np par rapport à 1 est importante. Pour rendre cette heuristique rigoureuse, il faut rendre rigoureux l'analyse "en moyenne" du nombre de descendant. On va faire ceci avec la notion de processus de branchement et plus précisément d'arbre de Galton-Watson. Mais il faut également prendre en compte le fait qu'à chaque étape le nombre de nouveaux voisins possibles diminue. Ceci sera fait en effectuant une comparaison avec un vrai processus de Galton-Watson.

4.1 Processus de Galton-Watson

— Toutes les autres composantes sont simples.

 $- L_2 = \Theta(\log n).$

4.1.1 Construction par génération

Les processus de Galton-Watson sont des modèles d'arbres aléatoires généalogiques. L'arbre en question est un arbre enraciné (et étiqueté) et sa loi dépend d'un paramètre μ qui est une mesure de probabilité sur $\mathbb N$ et qui représente la loi de reproduction. La racine correspond à l'ancêtre de la population. L'ancêtre se reproduit : il a k enfants avec probabilité $\mu(k)$, puis meurt. Par la suite,

chaque enfant se reproduit indépendamment des autres enfants et de ses parents, puis meurt. Ce processus se poursuit indéfiniment ou jusqu'à ce que la population s'éteigne. Le terme "processus de Galton-Watson" fait référence en général à la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 0}$ où Z_n est la taille de la n-ème génération. Il peut également faire référence à la suite d'arbres (\mathcal{T}_n) où \mathcal{T}_n est l'arbre généalogique jusqu'à la n-ème génération. Formellement,

$$(L_i^{(n)})_{i\geq 1,n\geq 0}$$
i.i.d de loi μ
$$\left\{\begin{array}{l} Z_0=1\\ Z_n=\sum_{i=1}^{Z_{n-1}}L_i^{(n)}, & \forall n\geq 1 \end{array}\right.$$

On supposera toujours que $\mu(\{1\}) \neq 1$ pour exclure le cas trivial où l'arbre de Galton-Watson est isomorphe à \mathbb{N} de manière déterministe. Remarquons que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans \mathbb{N} , avec 0 comme unique état absorbant. L'arbre de Galton-Watson, $\mathcal{T} = \bigcup_n \mathcal{T}_n$ peut être soit fini, on dit que la population s'est éteinte, et ceci arrive lorsque Z_n atteint l'état absorbant 0, soit infini. Notons enfin que la donnée de l'arbre de Galton-Watson permet de retrouver le processus de Galton-Watson.

Peut-on déterminer facilement la probabilité que la population s'éteigne? Remarquons tout de suite que le fait que cette probabilité vaille 1 ou non dépend certainement de la position de c par rapport à 1. En effet, il est facile de voir que la taille moyenne de la n-ème génération Z_n vaut :

$$\mathbb{E}(Z_n) = c^n .$$

Donc, si c < 1, la taille totale de l'arbre de Galton-Watson a une moyenne finie :

$$\mathbb{E}(|\mathcal{T}|) = \sum_{n} \mathbb{E}(Z_n) = \sum_{n} c^n = \frac{1}{1 - c}.$$

 $\mathcal T$ est donc fini presque sûrement, et la population s'éteint. Lorsque $c\geq 1$, la taille moyenne de l'arbre devient infini. Cela ne signifie pas que la population ait nécessairement une probabilité strictement positive de survivre. Nous allons voir que c'est le cas si et seulement si c>1. Il est commode d'introduire f, la fonction génératrice de la loi μ :

$$f(z) = \mathbb{E}[z^{Z_1}] = \mathbb{E}[z^{L_1^{(1)}}].$$

On note $f^{(n)}$ la n-ème composée de f.

Proposition 4.1.1. La fonction génératrice de Z_n est donnée par :

$$\mathbb{E}[z^{Z_n}] = f^{(n)}(z) .$$

La probabilité d'extinction est donnée par :

$$q = \lim_{n \infty} f^{(n)}(0) \ .$$

q est la plus petite racine de l'équation f(z) = z dans [0,1], et

$$q = 1 \Leftrightarrow c \leq 1$$
.

Démonstration: Pour $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[z^{Z_n}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[z^{Z_n}|Z_{n-1}]],$$

$$= \mathbb{E}[\prod_{i=1}^{Z_{n-1}} \mathbb{E}[z^{L_i^{(n)}}]],$$

$$= \mathbb{E}[f(z)^{Z_{n-1}}],$$

donc par récurrence,

$$\mathbb{E}[z^{Z_n}] = f^{(n)}(z) .$$

L'évènement "extinction" est la réunion des évènements $\{Z_n=0\}$, qui forment une suite croissante. Ainsi,

$$q = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n \to \infty} f^{(n)}(0) .$$

Donc q est la limite de la suite définie par $u_0 = f(0) \le 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme f est une fonction continue sur [0,1], q est solution de f(z) = z. De plus, f est croissante et $f(0) \ge 0$ donc f est stable sur $[0,q^*]$ où q^* est l'inf de $\{x \text{ t.q. } f(x) = x\}$ (ensemble non vide car 1 est dedans). Ainsi, $q = q^*$ et c'est la plus petite racine de l'équation f(z) = z dans [0,1]. De plus, q = 1 implique que $f(x) \le x$ pour tout $0 \le x \le 1$, donc $f(1) - f(x) \le 1 - x$ donc $f'(1) \le 1$, or $c = \mathbb{E}(Z_1) = f'(1)$ donc $c \le 1$. Enfin, si L_1 prend seulement les valeurs 0 et 1, et que $f'(1) \le 1$, alors par hypothèse, comme $\mathbb{P}(L_1 = 1) < 1$ on a f(z) < z pour tout z < 1, et donc q = 1. Sinon, f est strictement convexe et donc $c \le 1$ implique que f(1) - f(x) < 1 - x pour tout x < 1, et donc q = 1.

Donnons deux exemples de calcul de probabilités de survie. Si μ est une loi de Poisson de paramètre c, alors :

$$f(z) = e^{c(z-1)} .$$

Si $c \le 1$, le processus de Galton-Watson s'éteint avec probabilité 1. Si c > 1, il survit avec probabilité y définie par :

$$y > 0 \text{ et } 1 - y = e^{-cy}$$
 (4.2)

Prenons un autre exemple, où μ est une loi binomiale de paramètres m et p. Alors,

$$f(z) = (1 - p + pz)^m.$$

Si $mp \le 1$, le processus de Galton-Watson s'éteint avec probabilité 1. Si c>1, il survit avec probabilité y définie par :

$$y > 0 \text{ et } 1 - y = (1 - yp)^m .$$
 (4.3)

4.1.2 Codage par une marche aléatoire

Nous utiliserons surtout un codage de l'arbre de Galton-Watson sous forme d'une marche aléatoire $(S_t)_{t\in\mathbb{N}}$ associée. Dans ce cas, l'indice des temps n'est pas celui des générations, mais correspond à un parcours en largeur de l'arbre. L'ancêtre se reproduit et meurt, ses enfants sont ordonnés, puis les enfants se reproduisent dans cet ordre (et meurent). Chaque progéniture est ordonnée, ce qui fournit un ordre des petits-enfants etc. On associe ainsi à chaque noeud de l'arbre un numéro, l'ancêtre ayant le numéro 1. ***** dessin **** Soit L_t le nombre d'enfants de l'individu $t:(L_t)_{t\geq 1}$ est une suite i.i.d de loi μ . Notons S_t le nombre d'individus vivants au temps t. Entre les temps t-1 et t, l'individu t a L_t enfants puis meurt. Ainsi,

$$(L_t)_{t\geq 1}$$
i.i.d de loi μ
$$\left\{\begin{array}{ll} S_0=1\\ S_t=S_{t-1}+L_t-1, & \forall t\geq 1 \end{array}\right. \eqno(4.4)$$

On voit donc que $(S_t)_{t\geq 0}$ est une marche aléatoire à valeurs dans \mathbb{Z} , partant de 1. Une caractéristique importante de cette loi est que la seule valeur strictement négative qu'elle peut prendre est -1. Ainsi, elle ne peut pas sauter d'entier lorsqu'elle descend (en anglais, on dit qu'elle est *skip free*).

Rigoureusement, ceci ne peut être défini que tant que le processus de Galton-Watson ne s'éteint pas, c'est à dire tant que $t \leq T$, où T est l'instant d'extinction défini par :

$$T = \inf\{t > 0 \text{ t.g. } S_t = 0\}$$
.

Néanmoins, il est plus pratique de définir la marche aléatoire ci-dessus avec une suite infinie de L_t . Cela ne change pas, bien sûr, la loi de T. Notons que T est le nombre total de noeuds de l'arbre de Galton-Watson.

Supposons que $c = \mathbb{E}(L_t) < \infty$. Lorsque c < 1, la marche aléatoire possède ce qu'on appelle une dérive négative, puisque $\mathbb{E}(S_t) = (c-1)t+1$. Notamment, la loi des grands nombres nous dit que S_t tend p.s. vers $-\infty$, donc la population va s'éteindre presque sûrement. Si c > 1, S_t tend p.s. vers $+\infty$, et ceci suggère que la population a une chance d'exploser. Lorsque c = 1 la marche aléatoire a une dérive nulle, c'est le cas le plus délicat à traiter.

Le second résultat que nous utiliserons est une formule exacte pour la loi de T en fonction de la probabilité que S_n vaille 0.

Théorème 4.1.2. Si on part de $S_0 = k \ge 1$ ancêtres,

$$\forall n \ge 0, \quad \mathbb{P}(T=n) = \frac{k}{n} \mathbb{P}(S_n = 0) .$$

En particulier, lorsque $S_0 = 1$,

$$\forall n \ge 0, \quad \mathbb{P}(T=n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(S_n=0).$$

Démonstration: Cela revient à montrer que :

$$\mathbb{P}(T=n|S_n=0)=\frac{k}{n}.$$

On pense à l'intervalle de temps $\{1, \ldots, n\}$ modulo n, arrangé sur un cercle. Remarquons que la loi de (L_1, \ldots, L_n) conditionnellement à $S_n = 0$ est invariante par permutation circulaire de $\{1, \ldots, n\}$. Le théorème est alors une conséquence du Lemme 4.1.3.

Lemme 4.1.3. Pour toute suite d'entiers (l_1, \ldots, l_n) tels que $l_i \ge -1$ et $k + \sum_{i=1}^n l_i = 0$, il y a exactement k indices i tels que :

$$n = \min\{j \ge 1 \ t.q. \ k + l_{i+1} + \ldots + l_{i+j} = 0\} \ .$$

Démonstration: On note $s_i = \sum_{j=1}^i l_i$. On note $R = \{i_1 < \ldots < i_r\}$ l'ensemble des instants auxquels (l_1, \ldots, l_n) atteint un record inférieur :

$$R = \{i \text{ t.q. } \forall j < i, \ s_i < s_i \}$$
.

Notons m le minimum de la suite s_1, \ldots, s_n . Comme $l_i \geq -1$, on a :

$$s_{i_1} = k, \ s_{i_2} = k - 1, \ \dots, \ s_{i_r} = m \ .$$
 (4.5)

Notons I l'ensemble des indices i tels que :

$$n = \min\{j \ge 1 \text{ t.q. } k + l_{i+1} + \ldots + l_{i+j} = 0\}$$
.

un indice i appartient à I si et seulement si c'est un élément de R tel que :

$$\forall j \geq i, s_i - s_i \geq -k + 1$$
,

ce qui revient à demander :

$$m-s_i \geq -k+1$$
.

Au vu de (4.5), il y a exactement k indices de R vérifiant ceci, ce sont les k instants de plus petits records.

Notamment, si μ est une loi de Poisson de paramètre c, la loi de $t+S_t-S_0$ est une loi de Poisson de paramètre ct, donc :

$$\mathbb{P}(T_c^{po} = t) = \frac{e^{-ct}}{(ct)^{t-1}}t! \,. \tag{4.6}$$

Si μ est une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, avec p=c/n, la loi de $t+S_t-S_0$ est une binomiale $\mathcal{B}(nt,c/n)$, donc:

$$\mathbb{P}(T_{n,p}^{bin} = t) = \frac{1}{t} \binom{nt}{t-1} \left(\frac{c}{n}\right)^{t-1} \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{nt-t+1} . \tag{4.7}$$

4.1.3 Processus de branchement du graphe

Le processus de branchement du graphe aléatoire $\mathcal{G}(n,p)$ est le processus de branchement obtenu en parcourant en largeur la composante connexe C(v) d'un sommet v dans le graphe aléatoire $\mathcal{G}(n,p)$. Ce n'est pas tout à fait un processus de Galton-Watson, mais on l'analysera en le comparant à des processus de Galton-Watson. Décrivons plus précisément ce processus. On part de la racine v. Tous les sommets du graphe seront soit vivants, soit morts, soit neutres. Au temps 0, seul v est vivant, et tous les autres sommets sont neutres. A chaque instant $t \geq 1$, on examine le sommet w qui est en tête de la liste des sommets vivants et on examine l'ensemble des arêtes $\{w, w'\}$ avec w' neutre. Si l'arête $\{w,w'\}$ est dans $\mathcal{G}(n,p)$, on ajoute w' au bout de la liste des sommets vivants et on l'enlève de la liste des sommets neutres. Dans tous les cas, on déplace wde la liste des sommets vivants à la liste des sommets morts. On peut arrêter la procédure quand la liste des sommets vivants est vide. On note T cet instant. Au temps T l'ensemble des sommets morts est exactement la composante connexe de v, et ainsi T = |C(v)|. Reprenons maintenant la procédure d'exploration à l'instant T et poursuivons-la comme suit : comme il n'y a plus de sommet vivant, on choisit un nouveau sommet parmi les sommets neutres, et à l'étape d'après (au temps T+1) on recommence l'exploration de sa composante connexe : on le déclare mort (on l'enlève de la liste des sommets neutres), et on déclare vivants tous ses voisins qui étaient neutres. On note A_t le nombre de sommets vivants à l'instant t, N_t le nombre de sommets neutres et L_t le nombre de sommets auparavant neutres ajoutés à la liste des sommets vivants à l'instant t. Si on note $T_0 = 0$ puis, pour $i \ge 0$, $T_{i+1} = \inf\{t > T_i \text{ t.q. } A_t = 0\}$ alors $T_{i+1} - T_i$ est la taille de la *i*-ème composante connexe explorée et $T_1 = T$. Remarquons que $A_{t+1} = A_t + L_{t+1} - 1$, sauf lorsque t est l'un des T_i , auquel cas $A_{t+1} = A_t + L_{t+1}$. De plus, conditionnellement au passé jusqu'à l'instant t-1 compris, L_t est de loi $\mathcal{B}(N_{t-1} - \mathbb{1}_{A_{t-1}=0}, p)$. On a donc :

$$\tilde{N}_{0} = n - 1, \quad A_{0} = 1$$

$$\forall t \geq 1 \begin{cases}
\tilde{L}_{t} \sim \mathcal{B}(\tilde{N}_{t-1} - \mathbb{1}_{A_{t-1}=0}, p) \text{ conditionnellement à } \tilde{N}_{t-1} \\
A_{t} = A_{t-1} + \tilde{L}_{t} - 1 + \mathbb{1}_{A_{t-1}=0} \\
\tilde{N}_{t} = \tilde{N}_{t-1} - \tilde{L}_{t} - \mathbb{1}_{A_{t-1}=0}
\end{cases} (4.8)$$

A obéit à une équation similaire à (4.4). Remarquons que $(A_t)_{t\geq 0}$ n'est pas une marche aléatoire au sens usuel, notamment car les variables aléatoires \tilde{L}_t ne sont pas i.i.d. L'irruption du terme $\mathbb{1}_{A_{t-1}=0}$ dans la définition de \tilde{L}_t est la plus gênante. On définit un processus plus simple de la façon suivante :

$$N_0 = n - 1, \quad S_0 = 1$$

$$\forall t \ge 1 \begin{cases} L_t \sim \mathcal{B}(N_{t-1}, p) \text{ conditionnellement à } N_{t-1} \\ S_t = S_{t-1} + L_t - 1 \\ N_t = N_{t-1} - L_t \end{cases}$$

$$(4.9)$$

On peut voir ce processus de la façon suivante, sur le graphe d'Erdös-Rényi : on explore les composantes connexes de la façon classique, sauf qu'à chaque fois qu'on a fini d'explorer une composante, on introduit un nouveau sommet, qu'on relie aux sommets neutres par des arêtes selon la loi de Bernoulli usuelle, puis ce sommet meurt tout de suite. S_t désigne alors le nombre de sommets vivants dans la composante connexe en cours d'exploration moins le nombre de composantes déjà totalement explorées. L'avantage principal de S_t est qu'on peut calculer simplement sa loi à l'instant t, et le comparer qu processus original A_t .

Proposition 4.1.4. A chaque instant $t \geq 0$,

$$S_t + N_t + t = n \text{ et } A_t + \tilde{N}_t + t = n .$$

De plus, S_t est de loi $\mathcal{B}(n-1,1-(1-p)^t)-t+1$ et on peut coupler A et S de sorte que pour tout $t \geq 0$:

$$A_t \ge S_t \ge A_t - \sum_{s=0}^{t-1} \mathbb{1}_{A_s = 0} .$$

Notamment, $A_t = S_t$ tant que $t \leq T$.

Enfin, si $0 \le t_1 \le t_2$, conditionnellement à S_{t_1} , $S_{t_2} - S_{t_1}$ suit une loi $\mathcal{B}(n - S_{t_1} - t_1, 1 - (1 - p)^{t_2 - t_1}) - t_2 + t_1$.

Démonstration: Il est clair que $S_t+N_t+t=n$, puisque $S_t-S_{t-1}=N_{t-1}-N_t-1$ et que $S_0+N_0=n$. De même, $A_t-A_{t-1}=\tilde{N}_{t-1}-\tilde{N}_t-1$ montre que $A_t+\tilde{N}_t+t=n$.

Soit $(X_{t,i})_{t\geq 1,i\geq 1}$ une collection de variables aléatoires i.i.d de loi de Bernoulli de paramètre p. $X_{t,i}$ va désigner l'état de la i-ème arête inspectée au temps t, lorsqu'on examine les voisins possibles d'un sommet. On peut coupler A et S comme suit :

$$\forall t \ge 1 \begin{cases} \tilde{L}_t = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_{t-1} - \mathbb{1}_{A_{t-1} = 0}} X_{t,i} \\ A_t = A_{t-1} + \tilde{L}_t - 1 + \mathbb{1}_{A_{t-1} = 0} \\ \tilde{N}_t = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_{t-1} - \mathbb{1}_{A_{t-1} = 0}} (1 - X_{t,i}) \end{cases}$$

et:

$$\forall t \ge 1 \begin{cases} L_t = \sum_{i=1}^{N_{t-1}} X_{t,i} \\ S_t = S_{t-1} + L_t - 1 \\ N_t = \sum_{i=1}^{N_{t-1}} (1 - X_{t,i}) \end{cases}$$

On voit donc (par une récurrence immédiate) que pour tout $t, \tilde{N}_t \leq N_t$. Comme $S_t + N_t + t = n$ et $A_t + \tilde{N}_t + t = n$, on en déduit que $S_t \leq A_t$. Et d'après les

formules pour L_t et \tilde{L}_t , on en déduit aussi que $L_t \geq \tilde{L}_t$. Et donc que $S_t \geq A_t - \sum_{s=0}^{t-1} \mathbbm{1}_{A_s=0}$.

Par ailleurs, on peut aussi réaliser les N_t de la façon suivante :

$$N_t = \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{s=1}^t (1 - X_{s,i}) ,$$

en voyant la situation depuis le stock des n-1 sommets neutres du début : à chaque instant t, le sommet i est retiré du stock des neutres si $X_{t,i} = 1$. Donc N_t suit une loi $\mathcal{B}(n-1,(1-p)^t)$, et par conséquent S_t est de loi $\mathcal{B}(n-1,1-(1-p)^t)-t+1$. On voit aussi que pour $t_1 \leq t_2$,

$$N_{t_1} - N_{t_2} = \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{s=1}^{t_1} (1 - X_{s,i}) \left(1 - \prod_{s=t_1+1}^{t_2} (1 - X_{s,i}) \right) = \sum_{i=1}^{N_{t_1}} \left(1 - \prod_{s=t_1+1}^{t_2} (1 - X_{s,i}) \right) .$$

Donc conditionnellement à N_{t_1} , $N_{t_1} - N_{t_2}$ suit une loi $\mathcal{B}(N_{t_1}, 1 - (1-p)^{t_2-t_1})$, et donc conditionnellement à S_{t_1} , $S_{t_2} - S_{t_1}$ suit une loi $\mathcal{B}(n - S_{t_1} - t_1, 1 - (1-p)^{t_2-t_1}) - t_2 + t_1$.

4.2 Cas sous-critique et sur-critique : premiers résultats

Nous allons d'abord démontrer quelques résultats du Théorème 4.0.1 qui ont lieu loin de la transition, c'est à dire quand p = c/n avec c fixé différent de 1. Dans cette section, on utilise les notations du processus de branchement de graphe.

4.2.1 Cas sous-critique

Nous allons montrer que lorsque p=c/n avec c<1 fixé, pour tout $\delta>0,$ a.p.s,

$$L_1 \le \frac{(1+\delta)}{J(c)} \log n \;,$$

où

$$J(c) = c - 1 - \log c.$$

On peut aussi montrer une inégalité dans l'autre sens, mais ceci sera fait de manière plus générale plus tard. Soit $t\geq 0$. Remarquons que

$$\mathbb{P}(|C(v)| > t) = \mathbb{P}(T > t) < \mathbb{P}(S_t > 1) .$$

En utilisant la proposition 4.1.4,

$$\mathbb{P}(S_t > 1) = \mathbb{P}(\mathcal{B}(n-1, 1-(1-p)^t) > t)$$
.

On veut montrer que ceci est petit lorsque $t = \frac{(1+\delta)}{J(c)} \log n$. Dans ce cas, $1-(1-p)^t$ est d'ordre tp, donc on ne perd pas grand chose à majorer $1-(1-p)^t$ par tp et n-1 par n. On obtient :

$$\mathbb{P}(S_t \ge 1) \le \mathbb{P}(\mathcal{B}(n, tp) \ge t) .$$

On utilise alors la borne de Cramér-Chernoff (cf. chapitre 3):

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}(n,q) \ge t) \le e^{-n\Lambda_{\mathcal{B}(q)}^*(t/n)},$$

Or,

$$\Lambda_{\mathcal{B}(q)}^*(u) = u \log \frac{u}{q} + (1 - u) \log \frac{1 - u}{1 - q}$$
,

On va l'utiliser avec u=t/n et q=tp=tc/n, donc u et q tendent vers 0 et u/q tend vers 1/c. On a alors :

$$\Lambda_{\mathcal{B}(q)}^*(u) = u \log \frac{1}{c} + cu - u + o(u) = uJ(c) + o(u) .$$

Donc:

$$n\Lambda_{\mathcal{B}(tp)}^*(t/n) = J(c)t + o(t)$$
.

D'où:

$$\mathbb{P}(|C(v)| > t) \le e^{-(1+\delta)(1+o(1))\log n}$$

Donc,

$$\mathbb{P}(L_1 > t) \le n \mathbb{P}(|C(v)| > t) = o(1) .$$

4.2.2 Cas sur-critique

Nous allons montrer les résultats suivants lorsque p=c/n avec c>1 fixé.

- 1. $L_1 \sim ny(c)$,
- $2. L_2 = O(\log n) ,$
- 3. la complexité de C_1 est au moins d'ordre n, les autres composantes connexes sont simples.

Existence d'une grande composante

L'idée générale est simple : soit $\alpha \in \mathbb{R}^+ *$ et $t \leq n$ de la forme $t = ny(c)\alpha$. On remarque que :

$$\mathbb{E}(S_t) = n(1 - (1 - p)^t) - t + 1,$$

$$= n\left(1 - \frac{t}{n} - e^{-\frac{tc}{n}}\right) + O(1),$$

$$\mathbb{E}(S_t) = n\phi(y(c)\alpha) + O(1). \tag{4.10}$$

où $\phi(x) = 1 - x - e^{-cx}$. De plus, une inégalité de concentration comme celle d'Hoeffding (cf. chapitre3) montre que les fluctuations de S_t autour de sa moyenne

sont au plus d'ordre \sqrt{n} . Or ϕ est strictement concave, s'annule exactement en 0 et en y(c). Donc elle est strictement positive sur]0, y(c)[et strictement négative sur $]y(c), +\infty$. Fixons $\delta \in]0, 1/3[$. Ainsi, avec très grande probabilité, on va voir que S_t est strictement négative pour $t \geq (1+\delta)ny(c)$ et strictement positive pour t dans $[\delta ny(c), (1-\delta)ny(c)]$. Le premier point permettra de montrer qu'a.p.s,

$$L_1 \le ny(c)(1+\delta) \ . \tag{4.11}$$

Le second point implique que $A_t > 0$ sur cet intervalle de temps, et donc que :

$$L_1 > ny(c)(1-2\delta) \tag{4.12}$$

On peut alors trouver $\delta = \delta_n$ une suite tendant vers 0 telle que les convergences aient encore lieu, ce qui montre que $L_1 \sim ny(c)$, a.p.s.

Prouvons (4.11). Pour $t = ny(c)(1 + \delta)$, $\mathbb{E}(S_t)$ est éngative d'après (4.10). En utilisant l'inégalité de Hoeffding,

$$\begin{split} \mathbb{P}(|C(v)| > t) & \leq & \mathbb{P}(S_t \geq 0) \;, \\ & = & \mathbb{P}(S_t - \mathbb{E}(S_t) \geq -\mathbb{E}(S_t)) \;, \\ & \leq & e^{-2\frac{\mathbb{E}(S_t)^2}{n}} \;, \\ & = & e^{-2n\phi^2(y(c)(1+\delta)) + O(1)} \;. \end{split}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(L_1 \ge ny(c)(1+\delta)) \le ne^{-2n\phi^2(y(c)(1+\delta)) + O(1)} = o(1) .$$

Passons à la preuve de (4.12). Pour $t \in [\delta ny(c), (1-\delta)ny(c)], \mathbb{E}(S_t)$ est positive, donc :

$$\begin{split} \mathbb{P}(S_t \leq 0) & \leq & \mathbb{P}(S_t - \mathbb{E}(S_t) \leq -\mathbb{E}(S_t)) , \\ & \leq & e^{-2\frac{\mathbb{E}(S_t)^2}{n}} , \\ & = & e^{-2n\phi^2(y(c)(1+\delta)) + O(1)} . \end{split}$$

Ainsi,

$$\begin{split} \mathbb{P}(L_1 \leq (1-2\delta)ny(c)) & \leq & \mathbb{P}(\exists t \in [\delta ny(c), (1-\delta)ny(c)] \ S_t \leq 0) \ , \\ & \leq & \sum_{t=\delta ny(c)}^{(1-\delta)ny(c)} \mathbb{P}(S_t \leq 0) \ , \\ & \leq & ne^{-2n\phi^2(y(c)(1+\delta))+O(1)} \ , \\ & = & o(1) \end{split}$$

Unicité de la grande composante

On a montré que si p = c/n avec c > 1 fixé, la plus grande composante connexe a une taille équivalente à ny(c). On veut maintenant montrer qu'il ne

peut y avoir deux composantes de cette taille. On choisit $p_2 = n^{-3/2}$ et on pose $p' = 1 - (1 - p)(1 - p_2) \sim c/n = p$. Prenons maintenant un graphe G de loi $\mathcal{G}(n, p)$ et un graphe G_2 indépendant de G et de loi $\mathcal{G}(n, p_2)$. Alors $G' := G \cup G_2$ est de loi $\mathcal{G}(n, p')$. Si G contenait au moins deux composantes de taille équivalente à ny(c), avec probabilité tendant vers 1, ces deux composantes seraient reliées dans $G \cup G_2$. En effet, ces deux composantes étant fixées, il y a un nombre équivalent à $y(c)^2 n^2$ arêtes qui les relient. La probabilité qu'aucune de ces arêtes ne soit dans G_2 est inférieure $(1 - p_2)^{y(c)^2 n^2 (1 - o(1))} = o(1)$. On aurait donc une composante de taille équivalente à 2ny(c) dans G'. Mais d'après le paragraphe précédent, a.p.s G' ne contient pas de composante de taille supérieure à $(1 + \delta)ny(c)$. Donc, G ne contient pas plus d'une composante géante.

Dualité

Soit $G \sim \mathcal{G}(n,p)$. Maintenant, on considère la loi du graphe $G \setminus \mathcal{C}_1$, où on a enlevé la plus grande composante connexe (qui est unique avec proba tendant vers 1). A isomorphisme près, et conditionnellement à $|\mathcal{C}_1| = n - k$, la loi de ce graphe est la loi $\mathcal{G}(k,p)$ conditionnée à ne pas contenir de composante de taille supérieure ou égale à n-k (cf. Lemme 4.2.1 et le fait qu'avec proba tendant vers 1 il n'y a qu'une composante connexe de taille maximale). Or, avec proba tendant vers 1, $|\mathcal{C}_1|$ est équivalente à ny(c). Pour un entier k équivalent à n(1-y(c)),

$$p = \frac{c}{n} = \frac{1}{k}c\frac{k}{n} \sim \frac{1}{k}c(1 - y(c))$$
.

Or c(1 - y(c)) < 1, car :

$$y = \frac{1}{c} \log \frac{1}{1-y} < \frac{1}{c} \left(\frac{1}{1-y} - 1 \right) = \frac{y}{c(1-y)}$$
.

On est donc dans la phase sous-critique : $\mathcal{G}(k,p) = \mathcal{G}(k,(c^*+o(1))/k)$ avec $c^* = c(1-y(c))$. Ainsi, si $\delta > 0$, a.p.s. $\mathcal{G}(k,p)$ ne possède pas de composante de taille supérieure à $\frac{1+\delta}{J(c^*)}\log k$, et donc pas de composante de taille supérieure à n-k. Ainsi, pour tout ce qui est propriété de graphe, la loi de $G \setminus \mathcal{C}_1$ est, sachant $|\mathcal{C}_1| = n-k$ (à un évènement de proba tendant vers 0 près) la loi de $\mathcal{G}(k,(c^*+o(1))/k)$. Notamment, $G \setminus |\mathcal{C}_1|$ ne contient pas de composante connexe de taille plus grande que $\frac{1+\delta}{J(c^*)}\log k$, donc $L_2 \lesssim \frac{1}{J(c^*)}\log n$.

Lemme 4.2.1. Soit l et k deux entiers tels que $l + k \le n$. Soit \mathcal{G} distribué comme $\mathcal{G}(n,p)$. On note \mathcal{C} la réunion de toutes les composantes connexes de \mathcal{G} de taille supérieure ou égale à l et $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \setminus \mathcal{C}$. Alors, pour tout graphe G à k sommets,

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}' \in O_n(G)|card(V(\mathcal{G}')) = k) = \mathbb{P}(\mathcal{G}(k,p) \in O_k(G)|card(\mathcal{C}_1(\mathcal{G}(k,p))) < l).$$

où $O_n(G)$ l'orbite de G dans K_n .

Démonstration: Soit G = (V, E) un sous-graphe de la clique K_n tel que |V| = k et tel que $\mathcal{C}_1(G)$ soit d'ordre strictement inférieur à l. On note $B(V^c)$ l'évènement " V^c est la réunion de composantes connexes (pas nécessairement toutes) de \mathcal{G} de tailles supérieures ou égales à l". C'est un évènement indépendant de $\mathcal{G}[V]$. De plus, sa probabilité ne dépend que de k: notons-la α_k .

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}' = G) = \alpha_k \mathbb{P}(\mathcal{G}[V] = G) .$$

Si $C_1(G) \geq l$, $\mathbb{P}(G' = G) = 0$. Donc,

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}' \in O_n(G)) = \sum_{H \in O_n(G)} \alpha_k \mathbb{P}(\mathcal{G}[V(H)] = H) ,$$

$$= \alpha_k \binom{n}{k} \sum_{H \in O_k(G)} \mathbb{P}(\mathcal{G}[K_k] = H) ,$$

$$= \alpha_k \binom{n}{k} \mathbb{P}(\mathcal{G}(k, p) \in O_k(G)) .$$

De même,

$$\begin{split} \mathbb{P}(|V(calG')| = k) &= \sum_{\substack{G \subset K_n \\ |\mathcal{C}_1(G)| < l \\ |V(G)| = k}} \mathbb{P}(calG' = G) \;, \\ &= \alpha_k \binom{n}{k} \sum_{\substack{H \subset K_k \\ |\mathcal{C}_1(H)| < l}} \mathbb{P}(\mathcal{G}[K_k] = H) \;, \\ &= \alpha_k \binom{n}{k} \mathbb{P}(|\mathcal{C}_1(\mathcal{G}(k, p))| < l) \;. \end{split}$$

Donc, pour tout sous-graphe G de la clique K_n tel que |V| = k,

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}' \in O_n(G)) = \mathbb{P}(|V(\mathcal{G}')| = k)\mathbb{P}(\mathcal{G}(k, p) \in O_k(G)|card(\mathcal{C}_1(\mathcal{G}(k, p))) < l) \ .$$

Et plus généralement, pour tout sous-graphe G de la clique K_n ,

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}' \in O_n(G)) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(|V(\mathcal{G}')| = k) \mathbb{P}(\mathcal{G}(k, p) \in O_k(G) | card(\mathcal{C}_1(\mathcal{G}(k, p))) < l) .$$

Dit autrement,

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}' \in O_n(G)|card(V(\mathcal{G}')) = k) = \mathbb{P}(\mathcal{G}(k,p) \in O_k(G)|card(\mathcal{C}_1(\mathcal{G}(k,p))) < l).$$

Complexité de la composante géante

On note $p_1 = (1 + (c - 1)/2)/n$ et p_2 tel que $p = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$. Soit $G_1 \sim \mathcal{G}(n, p_1)$ et $G_2 \sim \mathcal{G}(n, p_2)$ indépendants et $G = G_1 \cup G_2 \sim \mathcal{G}(n, p)$. On remarque que $p_2 \sim (c - 1)/(2n)$ et que c' = 1 + (c - 1)/2 > 1. Donc il existe a.p.s. une unique composante connexe de taille équivalente à ny(c') dans G_1 . Dans $G_1 \cup G_2$, il existe une unique composante connexe \mathcal{C}_1 de taille équivalente à ny(c), et cette composante connexe est la seule de taille supérieure à $\frac{1}{J(c)}\log n$ donc la composante géante de G_1 est en fait incluse dans celle de G. Mais l'ajout de G_2 apporte un grand nombre d'arêtes internes en excès à cette composante connexe : un nombre qui suit au moins une loi $\mathcal{B}(\binom{ny(c)(1-\delta)}{2}) - ny(c) + 1, c'/n)$, donc un nombre d'arêtes qui est équivalent à $ny^2(c)c'(1-\delta)^2/4 = \Omega(n)$. Par dualité, on montre également que les autres composantes connexes sont simples.

4.3 Explication de la paramétrisation dans le cas à peine sur-critique

On peut maintenant comprendre la paramétrisation justifiant que la composante géante apparaisse après $(1+\lambda n^{-1/3})/n$. En se souvenant du cas surcritique, on voit que l'apparition d'une composante géante est dûe à la forme de la fonction $t\mapsto \mathbb{E}(S_t)$ donnée par (4.10). Cette moyenne dépasse 0 sur une longueur d'ordre ny(c) qui est équivalent à $2n\varepsilon$ lorsque ε tend vers 0 (cf. Lemme 4.3.1). Après $ny(c)(1+\delta)$, la moyenne plonge trop vite pour qu'on puisse encore explorer une grande composante. Mais quand t est d'ordre $n\varepsilon$ (pour t/n dans l'intervalle $]0,y(c)[), S_t$ a une moyenne d'ordre $(c-1)t\sim n\varepsilon^2$ et des fluctuations d'ordre $\sqrt{ct}\sim \sqrt{n\varepsilon}$. Ainsi, S_t ne va suivre sa moyenne d'assez près et rester positive sur presque tout [0,ny(c)] que si les fluctuations sont petites devant sa moyenne, c'est à dire si $\sqrt{n\varepsilon}\ll n\varepsilon^2$, ce qui donne $\varepsilon\gg n^{-1/3}$.

Lemme 4.3.1 (Probabilité de survie du processus de Poisson quand ε tend vers 0). On suppose que $\varepsilon > 0$ et on note y(c) la probabilité de survie d'un processus de Galton-Watson ayant une loi de reproduction de Poisson de paramètre c. Alors, quand ε tend vers 0^+ ,

$$y(1+\varepsilon) = 2\varepsilon + o(\varepsilon)$$
.

Démonstration: On note y la probabilité de survie. D'après l'équation (4.2), on sait qu'elle est définie comme la plus petite solution de :

$$y > 0$$
 et $1 - y = e^{-cy}$.

Donc, en utilisant $y \neq 0$ pour diviser par y:

$$1 - y = 1 - yc + \frac{y^2}{2} + o(y^2) ,$$

$$\frac{y^2}{2} + o(y^2) = y\varepsilon ,$$

$$y + o(y) = 2\varepsilon .$$

35

D'où le résultat.

4.4 Cas critique

Nous voulons montrer que L_1 est d'ordre $n^{2/3}$ dans le cas critique, c'est à dire lorsque $p=(1+\varepsilon)/n$ et $\varepsilon=\lambda n^{-1/3}$ avec λ d'ordre 1. Lorsqu'on veut analyser plus en finesse l'exploration d'une composante connexe dans le graphe d'Erdös-Rényi, on se retrouve naturellement avec trois processus de branchement. En effet, on peut penser que si p=c/n, et tant que t n'est pas trop grand, le processus de branchement du graphe va se comporter comme un processus de Galton-Watson de loi de reproduction $\mathcal{B}(n-1,c/n)$, qui lui-même va se comporter comme un processus de Galton-Watson de loi de reproduction $\mathcal{P}(c)$. On a donc 3 processus différents : le processus de graphe, le processus binomial et le processus de Poisson. On utilisera les annotations gr pour graphe, bin pour binomial et po pour Poisson pour distinguer ces trois processus lorsque ce sera nécessaire. On indiquera leurs paramètres en indice.

4.4.1 Borne supérieure sur L_1

Nous allons majorer la taille d'une composante connexe par la taille d'un arbre de Galton-Watson poissonien.

Lemme 4.4.1. Pour tout $t \geq 1$,

$$\mathbb{P}(|C(v)| \ge t) \le \mathbb{P}(T_{n-1,p}^{bin}) \ge t) \ .$$

et si c > 3/2, pour n assez grand, et pour tout $t \ge 1$,

$$\mathbb{P}(T_{n-1,p}^{bin}) \geq t) \leq \mathbb{P}(T_c^{po}) \geq t) \; .$$

Démonstration: La première inégalité est claire, puisque les incréments de S_t dans le processus de graphe sont majorés par des incréments de loi $\mathcal{B}(n-1,p)-1$. Soit X une v.a de loi $\mathcal{B}(c/(n+1))$ et Y une v.a de loi $\mathcal{P}(c/n)$.

$$\begin{split} \mathbb{P}(X=0) &= 1 - \frac{c}{n+1} \;, \\ &= 1 - \frac{c}{n} + \frac{c}{n^2} + O(n^{-3}) \;, \\ &= \mathbb{P}(Y=0) + \frac{c - \frac{c^2}{2}}{n^2} + O(n^{-3}) \;, \\ &\geq \mathbb{P}(Y=0) \;, \end{split}$$

pour n assez grand, si $c \in]0,3/2]$. On en déduit que X est inférieure stochastiquement à Y, donc que $\mathcal{B}(n-1,p)$ est inférieure à $\mathcal{P}(c)$, et donc que $T_{n-1,p}^{bin}$ est inférieure à T_c^{po} .

L'analyse du processus de branchement de Poisson dans le cas presque critique est menée dans le Lemme 4.5.1. Soit A>0 un nombre réel. On obtient :

$$\mathbb{P}(+\infty > T_c^{po} \ge An^{2/3}) \lesssim \frac{|\lambda|}{n^{1/3}} \int_{A\lambda^2}^{+\infty} x^{-3/2} e^{-x} dx$$
.

De plus, $\mathbb{P}(T_c^{po} = +\infty) \sim \max(2\varepsilon, 0)$. Donc :

$$\mathbb{P}(L_1 \ge An^{2/3}) \le \frac{n}{An^{2/3}} \mathbb{P}(|C(v)| \ge An^{2/3}) ,$$

$$\lesssim \frac{n^{1/3}}{A} \mathbb{P}(T_c^{po} \ge An^{2/3}) ,$$

$$\lesssim \frac{n^{1/3}}{A} \left(\max(2\varepsilon, 0) + \frac{|\lambda|}{n^{1/3}} \int_{A\lambda^2}^{+\infty} x^{-3/2} e^{-x} dx \right) ,$$

$$\lesssim \frac{|\lambda|}{A} \left(2 + \int_{A\lambda^2}^{+\infty} x^{-3/2} e^{-x} dx \right) ,$$

$$\lesssim \frac{2|\lambda|}{A} \left(1 + \frac{1}{|\lambda|\sqrt{A}} \right) ,$$

Ce qui montre que $L_1 = O_P(n^{2/3})$.

4.4.2 Le cas des arbres

Nous allons montrer qu'a.p.s, il existe au moins un arbre d'ordre $n^{2/3}$ dans la fenêtre de transition. Pour simplifier les calculs, on prendre p=1/n exactement. On note T_k le nombre de composantes connexes qui sont des arbres d'ordre k, et pour b>a>0 fixés, on note

$$X = \sum_{k=an^{2/3}}^{bn^{2/3}} T_k .$$

On calcule d'abord le premier moment de X.

$$\mathbb{E}(T_k) = \binom{n}{k} k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{k(n-k) + \binom{k}{2} - (k-1)}.$$

En utilisant la formule de Stirling pour k de l'ordre de $n^{2/3}$,

et:

$$(1-p)^{k(n-k)+\binom{k}{2}-(k-1)} = (1-p)^{kn-\frac{k^2}{2}}(1+o(1)),$$

$$= e^{(kn-\frac{k^2}{2})(-p+O(p^2))}(1+o(1)),$$

$$= e^{-knp+\frac{k^2p}{2}}(1+o(1)).$$

D'où, pour $p = n^{-1}$:

$$\mathbb{E}(T_k) = \frac{n}{k^{5/2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^3}{6n^2}} (1 + o(1)) .$$

Ainsi, en posant $x_k = \frac{k}{n^{2/3}}$, $x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n^{2/3}}$,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=an^{2/3}}^{bn^{2/3}} \frac{n}{k^{5/2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^3}{6n^2}} (1+o(1)) ,$$

$$= \sum_{k=an^{2/3}}^{bn^{2/3}} \frac{1}{x_k^{5/2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^3}{6}} (x_{k+1} - x_k)(1+o(1)) ,$$

$$\sim \int_a^b \frac{e^{-\frac{x^3}{6}}}{x^{5/2}\sqrt{2\pi}} dx .$$

On remarque que cette limite tend vers $+\infty$ lorsque a tend vers 0. Par ailleurs,

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{\substack{T \neq T' \\ \det \text{taille} \in [an^{2/3},bn^{2/3}]}} \mathbb{P}[TetT' \text{ sont des c.c.}],$$

$$= \sum_{k=an^{2/3}}^{bn^{2/3}} \sum_{k'=an^{2/3}}^{bn^{2/3}} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k'} k^{k-2} (k')^{k'-2} p^{k-1+k'-1}$$

$$\times (1-p)^{(k+k')(n-k-k')+kk'+\binom{k}{2}+\binom{k'}{2}-k+1-k'+1},$$

$$= \sum_{k=an^{2/3}}^{bn^{2/3}} \sum_{k'=an^{2/3}}^{bn^{2/3}} \mathbb{E}(T_k) \mathbb{E}(T_{k'}) \frac{\binom{n-k}{k'}}{\binom{n-k}{k'}} (1-p)^{kk'}.$$

Or,

$$\frac{\binom{n-k}{k'}}{\binom{n-k}{k'}} = \frac{e^{k-\frac{k^2}{2n} - \frac{k^3}{6n^2} + o(1)} \frac{n^k}{k^k \sqrt{2\pi k}}}{e^{k-\frac{k^2}{2n} - \frac{k^3}{6n^2} + o(1)} \frac{n^k}{k^k \sqrt{2\pi k}}},$$

$$= e^{-\frac{kk'}{n} - \frac{kk'^2}{2n^2} - \frac{k^2k'^2}{2n^2} + o(1)},$$

et

$$(1-p)^{-kk'} = e^{\frac{kk'}{n} + o(1)}$$
,

Donc:

$$\mathbb{E}[X(X-1)] \lesssim \mathbb{E}(X)^2 .$$

Soit A l'évènement "il existe une c.c. qui soit un arbre de taille supérieure à $an^{2/3}$ ".

$$\mathbb{P}(A) \geq \frac{\mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(X^2)},$$

$$\gtrsim \frac{1}{1 + \frac{1}{\mathbb{E}(X)}}.$$

Et ce nombre tend vers 1 quand a tend vers 0.

4.5 Analyse du processus de branchement de Poisson

Dans cette section, on analyse la formule (4.6) avec $c \in \mathbb{R}_+^*$. Lorsque c = 1, on obtient :

$$\mathbb{P}(T_1 = t) = \frac{e^{-k}k^{k-1}}{k!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}} .$$

Ainsi, $\mathbb{P}(T_1 \geq t) \sim \sqrt{\frac{2}{t\pi}}$ qui décroit lentement vers 0. Remarquons que T_1 est p.s. fini, mais de moyenne infinie. En général, quand t tend vers l'infini,

$$\mathbb{P}(T_c = t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-3/2} c^{-1} (ce^{1-c})^t (1 + o_t(1)) . \tag{4.13}$$

Remarquons déjà que ceci décroit vers 0 à vitesse exponentielle si $c \neq 1$ est fixe. Dans ce cas,

$$\mathbb{P}(+\infty > T_c \ge u) < e^{-u(J(c) + o(1))} , \qquad (4.14)$$

où $J(c)=c-1-\ln c>0$. Pour analyser les cas critique et à peine sous- ou sur-critique, il faut aussi comprendre la distribution de $T_{1+\varepsilon}$ avec ε qui tend vers 0 par valeurs positives ou négatives. Le lemme suivant résume le comportement de $\mathbb{P}(+\infty > T_c \ge u)$ lorsque u tend vers l'infini. On note $\Gamma_{-1/2}(x)$ la fonction gamma incomplète de paramètre -1/2:

$$\Gamma_{-1/2}(x) = \int_{x}^{+\infty} t^{-3/2} e^{-t} dt \sim_{x \to +\infty} x^{-3/2} e^{-x}$$
.

Lemme 4.5.1. On suppose que u tend vers l'infini. Alors,

$$\frac{J^{1/2}(c)}{c\sqrt{2\pi}}\Gamma_{-1/2}(uJ(c)) \lesssim \mathbb{P}(+\infty > T_c \ge u) \lesssim \frac{J^{1/2}(c)}{c\sqrt{2\pi}}\Gamma_{-1/2}((u-1)J(c)).$$

Notamment, si $c = 1 + \varepsilon$ avec ε tendant vers 0, positif ou négatif, et uJ(c) tend vers l'infini,

$$\mathbb{P}(+\infty > T_c \ge u) \sim \frac{2u^{-3/2}}{\varepsilon^2 \sqrt{2\pi}} e^{-u\varepsilon^2/2}$$
.

 $D\'{e}monstration:$

$$\mathbb{P}(+\infty > T_c \ge u) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \left(\sum_{t \ge u} t^{-3/2} e^{-tJ(c)} \right) (1 + o_u(1)) .$$

Or,

$$\int_{u}^{+\infty} t^{-3/2} e^{-tJ(c)} \ dt \leq \sum_{t > u} t^{-3/2} e^{-tJ(c)} \leq \int_{u-1}^{+\infty} t^{-3/2} e^{-tJ(c)} \ dt \ ,$$

et:

$$\int_u^{+\infty} t^{-3/2} e^{-tJ(c)} \ dt = J^{1/2}(c) \Gamma_{-1/2}(uJ(c)) \ .$$

On en déduit le résultat.

Rappelons que nous avons vu dans le Lemme ref que $\mathbb{P}(T_{1+\varepsilon} = +\infty) \sim 2\varepsilon$ lorsque ε tend vers 0^+ .

4.6 Compléments

Les cas à peine sous-critique et à peine sur-critique n'ont pas été vus en cours, faute de temps. Vous pourrez trouver des preuves dans le Chapitre A.

Chapitre 5

Coloriages, nombre clique et nombre d'indépendance

Un coloriage (par sommets) d'un graphe est une fonction de l'ensemble des sommets du graphe dans un ensemble fini, l'ensemble des couleurs, de sorte que deux sommets voisins ne se voient pas associés la même couleur. Le but de ce chapitre est principalement de montrer que minimal de couleurs nécessaire pour colorier $\mathsf{G}(n,1/2)$ est équivalent à $\frac{n}{2\log_2 n}$. Ce nombre est appelé le nombre chromatique.

5.1 Introduction

Historiquement, il semble qu'un rôle important dans le développement de cette notion ait été joué par le coloriage des cartes planaires. A une carte géographique, on peut associer un graphe où chaque pays est représenté par un sommet et une frontière entre deux pays est représentée par une arête. On obtient alors un graphe planaire. Francis Guthrie conjectura en 1852 que toutes les cartes géographiques pouvaient être coloriées avec au plus 4 couleurs. Le théorème des 4 couleurs fut démontré en 1976 par Appel et Haken : tout graphe planaire peut être colorié avec au plus 4 couleurs.

A part le cas des graphes planaires, la coloration de graphes joue un rôle important en algorithmique. Tout d'abord, c'est un problème utile. Imaginons par exemple que l'on doive planifier un certain nombre de réunions, chacune réquérant la présence d'un ensemble de participants déterminé, et que chaque réunion dure, disons une demi-journée. Combien de demi-journées seront nécessaires ? Cela peut se formaliser en termes de coloriage d'un graphe. Par ailleurs, c'est un problème difficile : pour $k \geq 3$, le problème de décider si un graphe est coloriable avec k couleurs ou moins est un des 21 problèmes NP-complets de Karp. La difficulté du coloriage est illustrée par le problème du Sudoku, qui peut se voir comme un coloriage de graphe où certains sommets du graphe ont une couleur imposée et où il un unique coloriage optimal (à 9 couleurs).

Notamment, on ne connait pas d'algorithme efficace, général, pour colorier un graphe avec le nombre minimal de couleurs possibles. Donnons tout de même quelques idées naïves. Tout d'abord, ce qu'on appelle l'algorithme glouton consiste, étant donnée une liste ordonnée des sommets (cette donnée est loin d'être innoncente) à parcourir la liste dans l'ordre, et à colorier chaque sommet avec la première couleur disponible (les couleurs peuvent être identifiées à N) cetteà dire la première couleur qui ne soit pas déjà empruntée par les voisins du sommet courant. En général, on utilisera toujours au plus $\Delta(G) + 1$ couleurs, où $\Delta(G)$ est le degré maximal. On s'aperçoit vite qu'on a intérêt à colorier d'abord les sommets de plus grands degrés, et à garder les sommets de petit degré pour la fin : ils seront moins contraints. Notamment, si G a n sommets, on peut procéder de la sorte : on pose v_n un sommet de degré minimal $\delta(G)$, puis on l'enlève de G, et on recommence en posant v_{n-1} un sommet de degré minimal dans $G \setminus \{v_n\}$. On obtient alors une liste v_1, \ldots, v_n avec la propriété que pour tout i, v_i est de degré minimal dans $G|_{\{v_1,\ldots,v_i\}}$. Pour colorier v_i avec l'algorithme glouton, il faudra au plus cette valeur plus un. Ainsi,

$$\chi(G) \le 1 + \max_{H \subset G} \delta(H) .$$

Remarquons qu'il existe un unique sous-graphe de G de degré minimal supérieur ou égal à k qui soit maximal pour l'inclusion. Ce sous-graphe (éventuellement vide) est appelé le k-coeur du graphe. On peut également l'obtenir en enlevant récursivement les sommets de degré strictement inférieur à k.

Donnons quelques définitions qui nous seront utiles par la suite. La maille (ou circonférence) d'un graphe G, notée $\gamma(G)$ est la longueur de son plus petit cycle. Le nombre d'indépendance d'un graphe G, noté $\alpha(G)$ est la taille du plus grand ensemble indépendant de sommets (on parle aussi de stable). Un ensemble indépendant de sommets est un ensemble de sommets ne contenant aucune arête intérieure. Le nombre clique de G, égal à l'ordre de la plus grande clique contenue dans G, est noté $\omega(G)$. Ainsi, $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

Colorier un graphe avec k couleurs revient à partitionner l'ensemble de ses sommets en k ensembles indépendants (ce qui revient à dire que G est k-parti). On obtient ainsi la borne suivante pour un graphe G=(V,E):

$$\alpha(G)\chi(G) > |V|$$
.

Remarquons que cette borne est assez bonne s'il existe un coloriage optimal tel que le nombre de sommets de chaque couleur est à peu près le même.

Bien sûr, une clique d'ordre k n'est pas coloriable avec moins de k couleurs, donc :

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$
.

Néanmoins, cette borne est en général très mauvaise. Une première façon de le voir est la construction suivante, dûe à Mycielski.

Théorème 5.1.1. Pour tout entier k il existe un graphe G sans triangle tel que $\chi(G) > k$.

Démonstration: Disposant d'un graphe G sans triangle tel que $\chi(G) = k$, on construit un graphe G' sans triangle tel que $\chi(G) = k+1$. On part d'une copie de G avec ensemble de sommets v_1, \ldots, v_n , et on se donne n+1 autres sommets v'_1, \ldots, v'_n, w . Pour tout i, on place alors une arête entre v'_i et chaque voisin de v_i . Puis on place une arête entre w et v'_i pour tout i. On appelle G' le graphe ainsi construit. Il est facile de voir que si G est sans triangle, G' est également sans triangle. On suppose que $\chi(G) = k$, et on considère un coloriage à k couleurs de la copie de G contenue dans G'. Il existe un ensemble de sommets w_1, \ldots, w_k tel que pour tout i w_i soit colorié avec la couleur i et les voisins de w_i utilisent les (k-1) couleurs restantes. Ainsi, w'_i (le sommet v'_j si $w_i = v_j$) ne peut être colorié qu'avec la même couleur que w_i . Et ainsi w nécessite une nouvelle couleur. Ceci montre que $\chi(G') = k+1$.

Le Théorème 5.1.1 a d'abord été généralisé par Erdös en utilisant la méthode probabiliste.

Théorème 5.1.2 (Erdös (1959)). Pour tous entiers k et l il existe un graphe G tel que $\gamma(G) > l$ et $\chi(G) > k$.

Démonstration: On pose $p = n^{\theta-1}$ avec $\theta \in [0,1]$. On note X le nombre de cycles de longueur inférieure ou égale à l dans $\mathcal{G}(n,p)$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=3}^{l} \frac{(n)_i}{2i} p^i ,$$

$$\leq \sum_{i=3}^{l} \frac{n^{\theta i}}{2i} = o(n) .$$

Donc,

$$\mathbb{P}(X \ge n/2) = o(1) .$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{P}(\alpha(\mathcal{G}(n,p)) \ge x) \le \binom{n}{x} (1-p)^{\binom{x}{2}},$$

$$\le (xe^{-p(x-1)/2})^x.$$

Donc, si $x=3\frac{\log n}{p}$, $\mathbb{P}(\alpha(G)\geq x)=o(1)$. Donc pour n assez grand, il existe un graphe G à n sommets ayant au plus n/2 cycles de longueur inférieure ou égale à l et vérifiant $\alpha(G)\leq x$. En supprimant au plus un sommet par cycle de longueur inférieure ou égale à l, on obtient un graphe G' ayant au moins n/2 sommets et de maille $\gamma(G')>l$. Par ailleurs,

$$\chi(G') \ge \frac{n}{2\alpha(G')} \ge \frac{n}{2\alpha(G)} = \frac{n^{\theta}}{3\log n}$$
.

Donc pour n assez grand, on obtient $\chi(G') \geq k$.

Remarquons que les graphes obtenus par Erdös sont bien plus petits que ceux obtenus par Mycielski dans le cas où l=3: pour obtenir $\chi(G') \geq k$, il suffit d'un nombre de sommet polynomial en $k: n \geq k^l (1+\varepsilon)$, alors que le graphe de Mycielski a un nombre de sommets exponentiel en k.

Dans la suite, nous commencerons par étudier le nombre d'indépendance de $\mathcal{G}(n,p)$, puis nous l'utiliserons pour approcher $\chi(\mathcal{G}(n,p))$. On se restreindra au cas où p est loin de 0 et de 1, ce qu'on appelle le cas dense. De plus, pour simplifier les écritures, on prendra p=1/2, mais tout ce qui suit peut se faire de manière identique avec p fixé dans]0,1[.

5.2 Nombre d'indépendance et nombre clique dans $\mathcal{G}(n, 1/2)$

Notons X_k le nombre de cliques d'ordre k contenues dans $\mathcal{G}(n, 1/2)$. Examinons le premier moment de X_k .

$$f(k) := \mathbb{E}(X_k) = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}$$
.

Pour $1 \ll k \ll \sqrt{n}$, on a :

$$\mathbb{E}(X_k) \sim 2^{k \log_2 n - k^2/2 - \log_2(k!)}$$
.

De plus,

$$\log_2(k!) = k \log_2 k - \frac{1}{\log 2} k + \frac{1}{2} \log_2(2\pi k) + o(1) \; .$$

On voit donc que $\mathbb{E}(X_k)$ passe rapidement d'un $\omega(1)$ à un o(1) pour des valeurs de k équivalentes à $2\log_2 n$. Par exemple, si $k \leq 2\log_2 n - 2\log_2\log_2 n - \frac{2}{\log 2} - 2$, f(k) tend vers l'infini. Mais si $k \geq 2\log_2 n - 2\log_2\log_2 n$, alors f(k) tend vers 0. Plus précisément, lorsque $k \sim 2\log_2 n$,

$$\frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{n-k}{k+1} 2^{-k} = n^{-1+o(1)} .$$

Notons $k_0 = k_0(n)$ tel que :

$$f(k_0-1) > 1 > f(k_0)$$
.

Alors, $k_0 \sim 2\log_2 n$. $f(k_0+1)$ tend vers 0, donc a.p.s $\omega(G) \leq k_0$. On suppose dans la suite que $k \sim 2\log_2 n$. Regardons la valeur du terme de covariance Δ défini dans le chapitre 1.

$$\Delta = \binom{n}{k} \sum_{i=2}^{k-1} \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} p^{2\binom{k}{2} - \binom{i}{2}},$$
$$= \mathbb{E}(X)^2 \sum_{i=2}^{k-1} g(i),$$

οù

$$g(i) = \frac{\binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i}}{\binom{n}{k}} 2^{\binom{i}{2}}.$$

On remarque que:

$$\frac{g(i+1)}{g(i)} = \frac{2^i(k-i)^2}{(i+1)(n-2k+i)} \ .$$

Lorsque $i \leq \log_2 n - K \log \log n$ pour K assez grand, g(i+1)/g(i) tend vers 0, et lorsque $i \geq \log_2 n + K \log \log n$ pour K assez grand, g(i+1)/g(i) tend vers $+\infty$. Ainsi, dans Δ , les valeurs de g(i) pour $i \leq \log_2 n - K \log \log n$ sont majorées par g(2), et les valeurs de g(i) pour $i \geq \log_2 n + K \log \log n$ sont majorées par g(k-1). Pour les valeurs intermédiaires, soit $i \in [\log_2 n \pm K \log \log n]$ et prenons l petit devant $\log n$ mais grand devant $\log \log n$. Alors,

$$\frac{g(i_0+l)}{g(i_0)} \ge \frac{2^{li+l(l-1)/2}}{(i+l)^l n^l} \gg 1.$$

Ainsi, $g(i_0)$ est majoré par $g(i_0) + l$ qui lui-même est majoré par g(k-1). De plus,

$$g(2) \sim \frac{k^4}{n^2} \; ,$$

et

$$g(k-1) \sim \frac{2kn}{2^k \mathbb{E}(X)}$$
.

Notamment, si on prend $k = k_0 - 2$, on a $\mathbb{E}(X) = f(k_0 - 2) \gg 1$ donc $\Delta = o(1)$ et $\mathbb{P}(X = 0)$ tend vers 0. Ainsi, $\omega(G) \geq k_0 - 2$ donc $\omega(G) \in \{k_0 - 2, k_0 - 1, k_0\}$ a.p.s. Remarquons qu'en faisant un peu plus attention, on peut montrer qu'il y a concentration sur deux points seulement (cf. [AS08], section 10.2).

5.3 Nombre chromatique

Théorème 5.3.1. Asymptotiquement presque sûrement,

$$\chi(\mathsf{G}(n,1/2)) \sim \frac{n}{2\log_2 n} \; .$$

Démonstration: On note G un graphe de loi $\mathcal{G}(n,p)$ pour p=1/2. La borne inférieure est une conséquence simple de la section 5.2. En effet, $\alpha(G)$ est équivalent (a.p.s) à $2\log_2 n$, puisque $\alpha(G)=\omega(\overline{G})$. Ainsi,

$$\chi(G) \ge \frac{n}{2\log_2 n} (1 + o(1))$$
.

On aimerait maintenant "inverser" (approximativement) l'inégalité $\chi(G)\alpha(G) \ge n$. On peut y arriver si on parvient à recouvrir presque tous les sommets (c'est à dire tous sauf un $o(n/\log n)$) par des ensembles indépendants d'ordre $2\log_2 n$.

En effet, on pourra alors colorier chaque ensemble indépendant d'une couleur, puis utiliser $o(n/\log n)$ couleurs pour les sommets qui restent. L'idée est alors de trouver une valeur $m=o(n/\log n)$ telle que tout sous-ensemble de m sommets contienne un ensemble indépendant de taille équivalente à $2\log_2 n$. Pour mener à bien ceci, il faut qu'il y ait beaucoup d'ensembles indépendants d'ordre $2\log_2 n$. La première chose est donc de choisir un k équivalent à $2\log_2 n$ mais tel que le nombre moyen d'ensembles indépendants soit grand. Prenons $k=k_0(n)-4$. On a alors :

$$f(k) > n^{3+o(1)}$$
,

et le second moment donne :

$$\Delta \sim \frac{f(k)^2 k^4}{n^2} \; ,$$

Par conséquent l'inégalité de Janson (cf. Chapitre B) donne :

$$\mathbb{P}(X=0) \le e^{-\frac{n^2}{2k^4}} \ .$$

On choisit maintenant $m = n/(\log n)^2$ et $k = k_0(m) - 4$. Alors, pour tout sous-ensemble de sommets S de cardinal m,

$$\mathbb{P}(\alpha(G|_S) < k) \le e^{-\frac{m^2}{2k^4}}.$$

Donc,

$$\mathbb{P}(\exists S \text{ t.q. } |S| = m \text{ et } \alpha(G|S) < k) \leq \binom{n}{m} e^{-\frac{m^2}{2k^4}} = o(1) \ .$$

Donc, avec proba tendant vers 1, tout sous-ensemble de m sommets contient un ensemble indépendant d'ordre $k \sim 2\log_2 n$. On peut alors successivement tirer un ensemble indépendant d'ordre k, le colorier, le retirer du graphe, retirer un ensemble indépendant d'ordre k, le colorier etc. jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un ensemble de sommets d'ordre inférieur à m, auquel on donne au plus m couleurs. On a alors :

$$\chi(G) \le \frac{n}{k} + m \le \frac{n}{2\log_2 n} (1 + o(1))$$
.

5.4. EXERCICES 47

5.4 Exercices

Exercice 5.1 Soit G un graphe à m arêtes. Montrer que :

$$\chi(G) \le \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}} \ .$$

Exercice 5.2 Soit G un graphe connexe, et v un sommet tel que $G \setminus \{v\}$ ne soit plus connexe, mais soit la réunion de r composantes connexes C_1, \ldots, C_r . On note B_i le graphe induit par $C_i \cup v$. Calculer le nombre chromatique de G en fonction de ceux des B_i .

Exercice 5.3 Trouver un graphe et un ordre sur ses sommets tels que l'algorithme glouton ne soit pas optimal.

Exercice 5.4 Montrer que pour tout k, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout n assez grand, il existe des graphes G à n sommets tels que $\chi(G) > k$ et pourtant $\chi(G|_S) \leq 3$ pour tout ensemble de sommets S de taille au plus εn .

Exercice 5.5 Montrer que tout graphe planaire peut être colorié avec au plus 5 couleurs.

Annexe A

Compléments sur la transition de phase d'Erdös-Rényi

Les cas à peine sous-critique et à peine sur-critique n'ont pas été vus en cours, faute de temps. Voici des preuves.

A.1 Cas à peine sous-critique

Nous allons d'abord comparer les 3 processus (cf. Proposition A.1.1), et enfin appliquer ces approximations pour obtenir une preuve du Théorème 4.0.1 dans les cas sous-critique.

A.1.1 Comparaison des trois processus

Le but de cette section est de compléter la comparaison des trois processus initiée au Lemme 4.4.1. Tout d'abord, on peut approcher également par endessous le processus de branchement de graphe par le processus de branchement binomial.

Proposition A.1.1. *Pour tout* $t \ge 1$,

$$\mathbb{P}(T_{n-t,p}^{bin} \geq t) \leq \mathbb{P}(T_{n,p}^{gr} \geq t) = \mathbb{P}(|C(v)| \geq t) \leq \mathbb{P}(T_{n-1,p}^{bin} \geq t) \; .$$

Démonstration: La majoration a été vue au Lemme 4.4.1. On conserve les notations du processus de graphe (4.9) en ajoutant des exposants gr. La proposition est une conséquence du fait que :

$$T_{n,p}^{gr} = \inf\{t \ge 0, \text{ t.q. } N_t^{gr} = n - t\}$$
.

On peut alors coupler les processus de la manière suivante. On définit un processus 2 par $N_0^{(2)}=n-t,\quad S_0^{(2)}=1$

$$\forall s \geq 1 \begin{cases} L_s^{(2)} \sim \mathcal{B}(N, p) \text{ conditionnellement à } N_{s-1} = N \\ S_s^{(2)} = S_{s-1}^{(2)} + L_s^{(2)} - 1 \\ N_s^{(2)} = N_{s-1}^{(2)} \end{cases}$$

De plus, pour tout $s\geq 1$, tant que $N_{s-1}^{gr}\geq n-t$, on peut coupler à l'étape s les trois variables aléatoires L_s et $L_s^{(2)}$ de sorte que :

$$L_s \le L_s^{(2)} .$$

Ainsi, tant que $s \leq T_{n,p}^{gr}$, on a toujours $S_s^{(2)} \leq S_s$, ce qui implique que $T^{(1)} \leq T_{n,p}^{gr}$, où $T^{(1)} = \inf\{s \geq 0 \text{ t.q. } S_s^{(1)} = 0\}$.

Le processus de branchement de Poisson est plus agréable à manipuler que le processus de branchement binomial. On a déjà vu au Lemme 4.4.1 une comparaison lorsque c < 3/2.

Pour la minoration, ou pour c>3/2, on doit utiliser des résultats plus précis. On suppose que p=c/n, avec $c=\Theta(1)$ et $c=1+\varepsilon$, avec ε de signe quelconque.

Lemme A.1.2 (Comparaison). Soient t et k tels que $k \ge 1$ et $0 \le t \ll n$. On pose

$$Q_k = \frac{\mathbb{P}(T_{n-t,p}^{bin} = k)}{\mathbb{P}(T_{n-t,p}^{co} = k)}.$$

Alors, $si\ t = 0$,

$$\sup_{k} Q_k \le 1 + o(1) \ .$$

Sinon, si $k \ll n$ et $kt^3 = o(n^3)$, alors:

$$\log Q_k = \frac{kt}{2n^2}(2n\varepsilon - t) + o(1) .$$

Démonstration: On omet l'indice k dans Q_k . D'après le Théorème 4.1.2,

$$Q = \frac{\mathbb{P}(S_k^{bin, n-t, p} = 0)}{\mathbb{P}(S_k^{po, c} = 0)} .$$

Ainsi,

$$Q = \frac{\binom{(n-t)k}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-t)k-k+1}}{e^{-kc}\frac{(kc)^{k-1}}{(k-1)!}},$$

$$= \frac{(nk-tk)!e^{kc}(1-\frac{c}{n})^{nk-tk-k+1}}{(nk-tk-k+1)!(nk)^{k-1}}.$$

Grâce à la formule de Stirling, en utilisant que t = o(n),

$$\begin{split} \log Q &= (k(c-1)+1) + k(n-t) \log[k(n-t)] \\ &+ (k(n-t-1)+1) \left[\log(1-\frac{c}{n}) - \log(k(n-t-1)+1) \right] \\ &- (k-1) \log(nk) + o(1) \;, \\ &= k\varepsilon + 1 + (nk-tk) \log(1-\frac{t}{n}) \\ &+ (k(n-t-1)+1) \left[\log(1-\frac{c}{n}) - \log(1-\frac{t}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{nk}) \right] + o(1) \;, \\ &= k\varepsilon + 1 + k \log(1-\frac{t}{n}) \\ &+ k(n-t-1) \left[\log(1-\frac{t}{n}) + \log\frac{1-\frac{c}{n}}{1-\frac{t}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{nk}} \right] + o(1) \;. \end{split}$$

Or,

$$\frac{(1-\frac{t}{n})(1-\frac{c}{n})}{1-\frac{t}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^k}}=1+\frac{(-\varepsilon-\frac{1}{k}+\frac{tc}{n})}{n-t-1}\;.$$

Notamment, si t = 0, en utilisant $\log(1 - x) \le x$,

$$\log Q \le k\varepsilon + 1 + k(-\varepsilon - \frac{1}{k}) + o(1) = o(1) .$$

Sinon, en général on remarque que :

$$\frac{(1-\frac{t}{n})(1-\frac{c}{n})}{1-\frac{t}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{nk}} = O(n^{-1}) .$$

Donc, si k est petit devant n.

$$\left(\frac{\left(-\varepsilon - \frac{1}{k} + \frac{tc}{n}\right)}{n - t - 1}\right)^2 = o\left(\frac{1}{nk}\right).$$

Donc:

$$\log Q = 1 + k \left[\varepsilon + \log(1 - \frac{t}{n}) - \varepsilon - \frac{1}{k} + \frac{tc}{n} \right] + o(1) ,$$

$$= k \left[\frac{t\varepsilon}{n} + \log(1 - \frac{t}{n}) + \frac{t}{n} \right] + o(1) ,$$

$$= \frac{kt}{2n^2} (2n\varepsilon - t) + o(1) ,$$

en utilisant à la dernière ligne que $kt^3 = o(n^3)$.

On commence par compléter la majoration pour c grand :

Lemme A.1.3 (Majoration (bis)). Pour tout $u \ge 1$,

$$\mathbb{P}(+\infty > T_{n,p}^{bin} \geq u) \leq \mathbb{P}(+\infty > T_c^{po} \geq u)(1+o(1)) \;.$$

Démonstration: On prend t = 0 dans le Lemme A.1.2:

$$\begin{split} \mathbb{P}(+\infty > T_{n,p}^{bin} \geq u) &= \sum_{k \geq u} \frac{1}{k} \mathbb{P}[S_k^{bin,n-1,p} = 0] \;, \\ &\leq \quad (1 + o(1)) \sum_{k \geq u} \frac{1}{k} \mathbb{P}[S_k^{po,c} = 0] \;, \\ &= \quad \mathbb{P}(+\infty > T_c^{po} \geq u) (1 + o(1)) \;. \end{split}$$

Puis, on obtient les minorations utiles.

Lemme A.1.4 (Minoration). Soient u, u_2 et t petis devant n tels que $u_2 \ge u$ et $u_2t^3 \ll n^3$. Alors,

$$\mathbb{P}(+\infty > T_{n-t,p}^{bin} \geq u) \geq [\mathbb{P}(+\infty > T_{c}^{po} \geq u) - \mathbb{P}(+\infty > T_{c}^{po} \geq u_{2})]e^{-\frac{u_{2}t}{2n^{2}}(t-2n\varepsilon)_{+}}(1+o(1)) \ .$$

Notamment, si $t \ll n$, $u \ll n$, $ut^3 \ll n^3$, uJ(c) tend vers l'infini et $\frac{ut}{2n^2}(t-2n\varepsilon)_+ \ll 1$,

$$\mathbb{P}(+\infty > T_{n-t,p}^{bin} \geq u) \geq \mathbb{P}(+\infty > T_{c}^{po} \geq u)(1+o(1)) \; .$$

Démonstration: On écrit :

$$\begin{split} & \mathbb{P}(+\infty > T_{n-t,p}^{bin} \geq u) \\ & \geq \sum_{k=u}^{u_2} \frac{1}{k} \mathbb{P}[S_k^{bin,n-1,p} = 0] \;, \\ & \geq (1+o(1)) e^{-\frac{u_2t}{2n^2}(t-2n\varepsilon)_+} \sum_{k \geq u} \frac{1}{k} \mathbb{P}[S_k^{po,c} = 0] \;, \\ & \geq \left[\mathbb{P}(+\infty > T_c^{po} \geq u) - \mathbb{P}(+\infty > T_c^{po} \geq u_2) \right] e^{-\frac{u_2t}{2n^2}(t-2n\varepsilon)_+} \;. \end{split}$$

Pour le deuxième point, on choisit u_2 tel que $u \ll u_2 \ll n$, $u_2 t^3 \ll n^3$ et $\frac{u_2 t}{2n^2} (t - 2n\varepsilon)_+ \ll 1$ puis on utilise le Lemme 4.5.1 qui assure que :

$$\mathbb{P}(+\infty > T_c^{po} \ge u_2) \ll \mathbb{P}(+\infty > T_c^{po} \ge u) .$$

Enfin, on obtient l'analogue du Lemme 4.3.1 pour le branchement binomial, lorsque ε tend vers 0^+ .

Lemme A.1.5 (Probabilité de survie). On suppose que $\varepsilon > 0$ et $t = o(\varepsilon n)$. Alors, quand ε tend vers 0^+ ,

$$\mathbb{P}(T_{n-t,p}^{bin} = +\infty) = 2\varepsilon + o(\varepsilon) \; .$$

Démonstration: On note y la probabilité de survie. D'après l'équation (4.3), on sait qu'elle est définie comme la plus petite solution de :

$$y > 0$$
 et $1 - y = (1 - \frac{yc}{n})^{n-t}$.

On remarque que:

$$\log\left[\left(1 - \frac{yc}{n}\right)^{n-t}\right] = (n-t)\left(-\frac{yc}{n} + o\left(\frac{y^2}{n}\right)\right),$$
$$= -yc + o(y^2) + o(y\varepsilon).$$

Donc, en utilisant $y \neq 0$ pour diviser par y:

$$1 - y = 1 - yc + o(y^2) + o(y\varepsilon) + \frac{y^2}{2} + o(y^2) ,$$

$$\frac{y^2}{2} + o(y^2) = y\varepsilon + o(y\varepsilon) ,$$

$$y + o(y) = 2\varepsilon + o(\varepsilon) .$$

D'où le résultat. \Box

A.1.2 Phase à peine sous-critique

Le fait que les composantes connexes de $\mathcal{G}(n,p)$ soient simples dans les phases sous-critique et à peine sous-critique a été vu dans l'exercice 0.4.

Il nous faut maintenant contrôler la taille des plus grandes composantes connexes, en utilisant le travail fait jusqu'ici, qui concerne la taille d'une composante connexe particulière. Un argument assez général basé sur une méthode du premier moment est contenu dans le lemme suivant.

Lemme A.1.6. On note:

$$m = \mathbb{E}(|C(v)|) .$$

(i) Soit $u = u_n$ tel que

$$\frac{n}{u}\mathbb{P}(|C(v)| \ge u) = o(1) . \tag{A.1}$$

Alors,

$$\mathbb{P}(L^{(1)} \ge u) = o(1) .$$

(ii) Soient $u' = u'_n$, $\beta = \beta_n$ et $T = T_n$ telles que

$$\beta = \omega(1)$$
,

$$T\beta m < n$$
,

et

$$T\mathbb{P}_{n-T\beta m,p}(|C(v)| \ge u') \gg 1$$
,

où $\mathbb{P}_{l,p}$ désigne la proba selon $\mathcal{G}(l,p)$. Alors,

$$\mathbb{P}(L^{(1)} \le u') = o(1)$$
.

(iii) On suppose de plus que

$$\mathbb{P}_{n-T\beta m,p}(|C(v)| \ge u'_n) = \Theta(\mathbb{P}(|C(v)| \ge u'_n)) .$$

Alors, pour tout r fixé,

$$\mathbb{P}(L^{(r)} \le u_n') = o(1) .$$

 $D\acute{e}monstration$: Notons X le nombre de sommets qui appartiennent à une composante connexe d'ordre au moins u. On a :

$$\mathbb{E}(X) \le n\mathbb{P}(|C(v)| \ge u) .$$

De plus, s'il existe une composante connexe d'ordre au moins u, alors X est supérieure à u. Donc,

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{P}(L^{(1)} \geq u) & \leq & \mathbb{P}(X \geq u) \; , \\ & \leq & \frac{\mathbb{E}(X)}{u} \; , \\ & \leq & \frac{n\mathbb{P}(|C(v)| \geq u)}{u} \; , \end{array}$$

ce qui montre le premier point.

Pour la minoration, on explore les composantes connexes du graphe de la façon suivante. Tous les sommets du graphe sont ordonnés et on va explorer les T premières composantes connexes selon cet ordre (l'ordre d'une composante connexe étant déterminé par le plus petit sommet lui appartenant).

On examine $C(v_1)$, avec $v_1=1$, qui est de taille supérieure à u' avec probabilité $q=\mathbb{P}(|C(v)|\geq u')$. puis on examine $C(v_2)$ où v_2 est le premier sommet n'appartenant pas à $C(v_1)$. Conditionnellement à $|C(v_1)|=k$, $C(v_2)$ vit dans $\mathcal{G}(n-k,p)$. Conditionnellement à $|C(v_1)|< u'$, la taille de cette seconde composante connexe est donc minorée par la taille de C(v), avec v fixé, dans $\mathcal{G}(n-u',p)$. On continue comme ça jusqu'à la T-ième composante connexe. Remarquons que :

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{T} |C(v_i)| \ge \beta T m) \le \beta^{-1} = o(1) .$$

La probabilité qu'aucune de ces composantes connexes ne soit de taille supérieure à u' est donc inférieure à :

$$\prod_{i=1}^{T} \mathbb{P}_{n-\beta T m, p}(|C(v_i)| < u') \le e^{-T\mathbb{P}_{n-\beta T m, p}(|C(v)| \ge u')} + o(1).$$

Ceci montre le deuxième point.

Pour le troisième point, notons Y le nombre de composantes connexes, parmi les T premières, qui sont de taille supérieure ou égale à u'. On note :

$$q = \mathbb{P}_{n-T\beta m,p}(|C(v)| \ge u')$$
,

et

$$\tilde{q} = \mathbb{P}_n(|C(v)| \ge u')$$
.

Quitte à augmenter u', on peut supposer que q tend vers 0. Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y \leq r) = \mathbb{P}(Y \leq r \text{ et } \sum_{i=1}^{T} |C(v_i)| < \beta T m) + o(1) ,$$

$$\leq \sum_{\substack{b \in \{0,1\}^T \\ |b| \leq r}} \mathbb{P}(\forall i \leq T, \ \mathbb{1}_{|C(v_i)| \geq u'} = b_i \text{ et } \sum_{j=1}^{i} |C(v_i)| < \beta T m) + o(1) ,$$

$$\leq \sum_{\substack{b \in \{0,1\}^T \\ |b| \leq r}} \prod_{i=1}^{T} \mathbb{P}_{n-\beta T m,p}(|C(v_i)| < u')^{1-b_i} \mathbb{P}_{n,p}(|C(v_i)| \geq u')^{b_i} + o(1) ,$$

$$\leq \sum_{\substack{b \in \{0,1\}^T \\ |b| \leq r}} (1-q)^{T-|b|}(\tilde{q})^{|b|} + o(1) ,$$

$$\leq (r+1)(T\tilde{q})^r e^{-(T-r)q}(1+o(1)) + o(1) ,$$

$$= o(1) ,$$

puisque par hypothèse, q et \tilde{q} sont du même ordre et Tq tend vers l'infini.

La taille d'une composante connexe fixée est facilement majorée par la Proposition A.1.1 et les Lemmes 4.4.1 et 4.5.1. On a, pour tout sommet v fixé :

$$\begin{split} \frac{n}{u}\mathbb{P}(|C(v)| > u) & \leq & \frac{n}{u}\mathbb{P}(T_c^{po} > u) \;, \\ & \leq & \frac{ne^{-uJ(c)}}{u^{5/2}cJ(c)\sqrt{2\pi}} \;. \end{split}$$

On pose $\lambda = n^{1/3}J^{1/2}(c)$, qui permet d'englober les cas sous-critique et à peine sous-critique. En effet, dans le cas sous-critique, lorsque $c=1-\varepsilon$ avec ε tend vers 0^+ mais grand devant $n^{-1/3}$, on a λ tend vers l'infini et $\lambda \sim n^{1/3}\varepsilon$. En choisissant

$$u = \frac{\log(nJ^{3/2}(c))}{J(c)} = \frac{3\log(\lambda)}{J(c)}$$
,

on obtient:

$$\frac{n}{u}\mathbb{P}(|C(v)| > u) = \Theta(\log^{-5/2}\lambda) = o(1).$$

Pour la minoration, on pose

$$u' = \frac{\log(nJ^{3/2}(c))}{J(c)}(1 - \delta) ,$$

avec $\delta \in]0,1[$ fixé. On remarque que d'après le Lemme 4.5.1 :

$$\frac{n}{u'}\mathbb{P}(T_c^{po} > u') \geq \frac{ne^{-u'J(c)}}{(u')^{5/2}cJ(c)\sqrt{2\pi}}(1 + o(1)),$$

$$= \Omega\left(\lambda^{3\delta}/(\log \lambda)^{5/2}\right).$$

Si on trouve T et β tels que :

$$\mathbb{P}_{n-\beta Tm,p}(|C(v)| > u') \ge \mathbb{P}(T_c^{po} > u')(1 + o(1)) , \qquad (A.2)$$

et

$$\frac{Tu'\lambda^{3\delta}}{n(\log\lambda)^{5/2}} \gg 1 , \qquad (A.3)$$

on aura fini. Remarquons que |C(v)| est inférieure stochastiquement à $T^{po},$ donc :

$$m = \mathbb{E}(|C(v)|) \le \mathbb{E}(T^{po}) = \frac{1}{1-c} = \varepsilon^{-1}$$
.

Pour appliquer le Lemme A.1.4, et obtenir (A.2) il suffit d'avoir (en prenant β tendant vers l'infini assez lentement) :

$$u'(Tm)^2 = o(n^2), \quad u'(Tm)\varepsilon = o(n).$$

Donc, il suffit d'avoir :

$$T = o(n\varepsilon/(u')^{1/2}), \quad T = o(n/u').$$

Or,

$$n\varepsilon/(u')^{1/2} = \Theta(\lambda^2 n^{1/3}/\sqrt{\log \lambda}), \quad n/(m\varepsilon u') = \Theta(\lambda^2 n^{1/3}/\log \lambda).$$

Et la condition (A.3) est équivalente à :

$$T \gg n^{1/3} (\log \lambda)^{3/2} \lambda^{2-3\delta}$$
.

Il suffit donc de prendre par exemple $T=n^{1/3}\lambda^2/(\log\lambda)^{3/2}$. On peut donc appliquer le Lemme A.1.6, et on obtient que :

$$\mathbb{P}(L^{(1)} \ge 3\log \lambda/J(c)) = o(1) ,$$

et pour tout r fixé (et tout $\delta' \in]0,1[$),

$$\mathbb{P}(L^{(r)} < 3(1-\delta)\log \lambda/J(c)) = o(1).$$

A.2 Cas à peine sur-critique

A.2.1 Existence de la composante géante

Nous allons montrer que lorsque p=c/n avec $c=1+\varepsilon, \, \varepsilon=\lambda n^{-1/3}$ et $\lambda\gg 1$, il existe une plus grande composante géante de taille équivalente à ny(c), et il n'existe pas de composante de taille supérieure à $ny(c)(1+\delta)$. Fixons $\delta>0$ et notons $t_1=ny(c)\delta$ et $t_2=ny(c)(1-\delta)$. Le point crucial est d'arriver à montrer que :

$$\mathbb{P}(\exists t \in [t_1, t_2] \text{ s.t. } S_t \leq 0) = o(1) ,$$

mais ici, on ne peut plus utiliser une borne d'union comme dans le cas surcritique : on perdrait trop. Il faut comprendre que la borne d'union est en général très mauvaise. En effet, si $S_k = 0$ pour un k dans $[ny(c)\delta, ny(c)(1-\delta)]$, alors cela va influer, négativement, sur la valeur de $S_{ny(c)(1-\delta)}$.

Lemme A.2.1. Pour tout $\lambda \leq 0$,

$$\mathbb{P}(\exists t \in [t_1, t_2] \ s.t. \ S_t \le 0) \le e^{-\lambda \varepsilon (t_2 - t_1)} \mathbb{E}(e^{\lambda S_{t_2}}) \ .$$

Démonstration: Pour $k \in [t_1, t_2]$, notons B_k l'évènement $\{X_i > 0 \forall i \in [t_1, k-1], \text{ et } X_k = 0\}$. Notons également B l'évènement $\{\exists t \in [t_1, t_2] \text{ s.t. } S_t \leq 0\}$. Alors, B est l'union disjointe des évènements B_k , pour $k \in [t_1, t_2]$. Pour comprendre l'influence de B_k sur la valeur de S_{t_2} , écrivons :

$$\mathbb{E}(e^{\lambda S_{t_2}} \mathbb{1}_{B_k} | S_{t_1}, \dots, S_k) = \mathbb{1}_{B_k} e^{\lambda(S_k)} \mathbb{E}(e^{\lambda(S_{t_2} - S_k)} | S_{t_1}, \dots, S_k) ,
= \mathbb{1}_{B_k} \mathbb{E}(e^{\lambda(S_{t_2} - S_k)} | S_k) ,$$

or d'après la Proposition 4.1.4, pour $\lambda \leq 0$:

$$\mathbb{E}(e^{\lambda(S_{t_2}-S_k)}|S_{t_1},\dots,S_k) \geq e^{\lambda\mathbb{E}(S_{t_2}-S_k|S_k)},$$

$$= e^{\lambda[(n-S_k-k)(1-(1-p)^{t_2-k})-t_2+k]},$$

$$\geq e^{\lambda[(n-S_k)p(t_2-k))-t_2+k]},$$

$$= e^{\lambda(t_2-k)(c(1-S_k/n)-1)},$$

Donc:

$$\mathbb{E}(e^{\lambda S_{t_2}} \mathbb{1}_{B_k} | S_{t_1}, \dots, S_k) \ge \mathbb{1}_{B_k} e^{\lambda (t_2 - k)\varepsilon},$$

D'où:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=t_1}^{t_2} \mathbb{P}(B_k) \le e^{-\lambda(t_2 - t_1)\varepsilon} \mathbb{E}(\sum_{k=t_1}^{t_2} e^{\lambda S_{t_2}} \mathbb{1}_{B_k}) = e^{-\lambda(t_2 - t_1)\varepsilon} \mathbb{E}(e^{\lambda S_{t_2}}).$$

Notons B l'évènement $\{\exists t \in [t_1, t_2] \text{ s.t. } S_t \leq 0\}$. En optimisant en $\lambda \leq 0$ le Lemme A.2.1, et en notant que $\varepsilon(t_2 - t_1) \sim ny(c)\varepsilon(1 - 2\delta) \leq \mathbb{E}(S_{t_2})ny(c)\varepsilon(1 - \delta)$,

$$\mathbb{P}(A) \le e^{-\Lambda_{S_{t_2}}^*(\varepsilon(t_2 - t_1))}$$

Or, d'après la Proposition 4.1.4, S_{t_2} suit une loi $\mathcal{B}(n-1,1-(1-p)^{t_2})$. Comme $t_2p \sim 2\varepsilon(1-\delta)$, $\mathsf{Var}(S_{t_2}) \sim 2n\varepsilon(1-\delta)$ et $\mathbb{E}(S_{t_2}) \sim (1-\delta)2n\varepsilon^2$. En utilisant l'inégalité de Bernstein (on pourrait aussi utiliser la transformée de Cramér de la binomiale), on obtient :

$$\begin{split} \mathbb{P}(A) & \leq & e^{-\Lambda_{S_{t_2}}^* (\varepsilon(t_2 - t_1))} \,, \\ & \leq & e^{-\frac{(\mathbb{E}(S_{t_2} - \varepsilon(t_2 - t_1))^2}{2(\operatorname{Var}(S_{t_2}) + (\mathbb{E}(S_{t_2} - \varepsilon(t_2 - t_1))/3))}} \,, \\ & = & e^{-\frac{\left(2n\delta\varepsilon^2\right)^2}{4n\varepsilon(1 - \delta)}(1 + o(1))} \,, \\ & = & e^{-\lambda^3(1 + o(1))/(1 - \delta)} \,, \\ & = & o(1) \,. \end{split}$$

Ainsi, a.p.s. on est en train d'explorer une composante de taille supérieure à $t_2 - t_1$ entre les instants t_1 et t_2 . Nous allons montrer maintenant que l'exploration de cette composante s'arrête nécessairement avant l'instant $ny(c)(1+\delta)$. D'après (4.10), $\mathbb{E}(S_t)$ est négative lorsque $t = ny(c)(1+\delta)$, et plus précisément, par concavité :

$$\mathbb{E}(S_t) \le n\delta y(c)\phi'(y(c)) + O(1) \sim -2n\delta\varepsilon^2.$$

De plus, $Var(S_t) \sim ntp \sim 2n\varepsilon(1+\delta)$. Donc en utilisant Bernstein,

$$\begin{split} \mathbb{P}(S_t \geq 0) &= \mathbb{P}(S_t - \mathbb{E}(S_t) \geq -\mathbb{E}(S_t)) \;, \\ &\leq e^{-\frac{\left(\mathbb{E}(S_t)^2}{2(\mathrm{Var}(S_t) + \mathbb{E}(S_t/3))}\right)} \;, \\ &= e^{-\frac{\left(2n\delta\varepsilon^2\right)^2}{4n\varepsilon(1+\delta)}(1+o(1))} \;, \\ &= e^{-\lambda^3(1+o(1))} \;. \end{split}$$

On obtient donc qu'il existe une composante connexe de taille supérieure à $ny(c)(1-2\delta)$, explorée entièrement entre les instants 0 et $ny(c)(1+\delta)$.

Pour prouver l'unicité de cette composante, on ne peut plus utiliser la borne d'union, mais on peut la voir comme une conséquence de la dualité.

A.2.2 Dualité, unicité et complexité

Soit $G \sim \mathcal{G}(n,p)$, et soit C la réunion de toutes les composantes connexes de taille comprise entre $ny(c)(1-2\delta)$ et $ny(c)(1+\delta)$. On considère la loi de $G \setminus C$. Comme dans le cas sur-critique, la loi de ce graphe est celle d'un G(n,k) avec k de l'ordre de $ny(c)(1-2\delta)$ au moins (et on sait que n-k est d'ordre n, l'ordre du nombre de sommets isolés), conditionné à ne pas avoir de composante connexe de taille entre $ny(c)(1-2\delta)$ et $ny(c)(1+\delta)$. Pour un entier k supérieur à $ny(c)(1-2\delta) \sim 2n\varepsilon(1-2\delta)$,

$$p = \frac{c}{n} = \frac{1}{n-k}c(1-\frac{k}{n}) \lesssim \frac{1}{n-k}(1+\varepsilon)(1-2\varepsilon(1-2\delta)) = \frac{1}{n-k}(1-\varepsilon(1-4\delta)+o(\varepsilon)) \;,$$

et si δ est assez petit, on se retrouve ainsi dans la phase à peine sous-critique. On verra alors (cf. section A.1) qu'avec probabilité tendant vers 1 les r plus grandes composantes, pour r fixé, sont d'ordre $\varepsilon^{-2} \ln \lambda$. Notamment, il n'y a pas de composante de taille comprise entre $ny(c)(1-2\delta)$ et $ny(c)(1+\delta)$, donc le conditionnement ci-dessus ne change pas les propriétés de graphes a.p.s. On en déduit donc qu'il n'y a pas non plus, dans le graphe initial, de composante de taille supérieure à $ny(c)(1+\delta)$. On peut alors faire le même argument que dans le cas sur-critique pour l'unicité de la composante géante et sa complexité.

Annexe B

Inégalités de corrélation

Ce chapitre est un deuxième interlude technique à propos des inégalités de corrélation. Il nous servira pour l'étude du nombre chromatique (cf. chapitre 5).

B.1 Inégalité de Harris

Si les indicatrices qui composent X_G , la variable aléatoire qui compte le nombre de copies d'un graphe G dans $\mathcal{G}(n,p)$, sont corrélées, il semble qu'il y ait un sens dans cette corrélation : elles sont positivement corrélées, car lorsque l'une d'elles vaut 1, cela a tendance a aider les autres à valoir 1. Cet argument semble indiquer que :

$$\mathbb{P}(X_G \ge 1) \ge \prod_{S \in O(G)} \mathbb{P}(S \subset \mathcal{G}(n, p))$$
.

Nous allons voir que c'est effectivement le cas grâce à *l'inégalité de Harris*. Celleci est très simple à montrer dans le cadre d'un espace produit (elle se généralise à des cadres plus généraux).

Théorème B.1.1. Soient f et g deux fonctions mesurables réelles définies sur un espace de probabilité produit $(\prod_{i=1}^n \mathcal{X}_i, \otimes_{i=1}^n \mu_i)$ où chaque \mathcal{X}_i est totalement ordonné. Si f et g sont des fonctions croissantes (pour l'ordre coordonnée par coordonnée sur $\prod_{i=1}^n \mathcal{X}_i$), et X est un vecteur aléatoire de loi μ , alors :

$$\mathbb{E}(f(X)g(X)) \ge \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(X)) .$$

Démonstration: On montre le résultat par récurrence sur n. Si n=1, c'est ce qu'on appelle l'inégalité d'association positive de Tchebychev (ou "l'autre inégalité de Tchebychev"). On considère X et X' deux variables aléatoires indépendantes de loi μ_1 . Comme \mathcal{X}_1 est totalement ordonné et que f et g sont croissantes,

$$(f(X) - f(X'))(g(X) - g(X')) \ge 0$$
.

En prenant l'espérance, on obtient le résultat pour n = 1. Si $n \ge 2$,

$$\mathbb{E}(f(X)g(X)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X)g(X)|X_1,\ldots,X_{n-1})).$$

L'inégalité pour n = 1 montre que :

$$\mathbb{E}(f(X)g(X)|X_1,...,X_{n-1}) = \mathbb{E}(f(X)|X_1,...,X_{n-1})\mathbb{E}(g(X)|X_1,...,X_{n-1}),$$

Enfin, comme $\mathbb{E}(f(X)|X_1,\ldots,X_{n-1})$ et $\mathbb{E}(g(X)|X_1,\ldots,X_{n-1})$ sont des fonctions croissantes de (X_1,\ldots,X_{n-1}) , l'hypothèse de récurrence au rang (n-1) montre que :

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X)|X_1,\ldots,X_{n-1})\mathbb{E}(g(X)|X_1,\ldots,X_{n-1}))$$

$$\geq \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X)|X_1,\ldots,X_{n-1}))\mathbb{E}(\mathbb{E}(g(X)|X_1,\ldots,X_{n-1})),$$

$$= \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(X)).$$

Cela donne le résultat au rang n.

Cette inégalité a une forme plus générale, satisfaite par des mesures qui ne sont pas nécessairement de forme produit, connue sous le nom d'inégalité FKG.

B.2 Inégalité de Janson

On considère le cadre de l'hypercube $\{0,1\}^n$, muni d'une mesure produit $\mu = \bigotimes_{i=1}^n \mu_i$. On note G un vecteur aléatoire de loi μ qu'on identifie à un sous-ensemble aléatoire de [n] par la correspondance $G \mapsto \{i \in [n] \text{ t.q. } G_i = 1\}$. Soit Γ une collection de sous-ensembles de [n]. Pour $\alpha \in \Gamma$, on note :

$$I_{\alpha} = \mathbb{1}_{\alpha \subset G} \quad p_{\alpha} = \mathbb{E}(I_{\alpha}) .$$

On note $\alpha \sim \beta$ si $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. On définit :

$$W = \sum_{\alpha \in \Gamma} I_{\alpha} ,$$

$$\lambda = \mathbb{E}(W)$$
,

et

$$\Delta = \sum_{\alpha \sim \beta} \mathbb{E}(I_{\alpha}I_{\beta}) \ .$$

Le résultat suivant permet d'obtenir une majoration de $\mathbb{P}(W=0)$ qui est notamment bien meilleure que l'approximation poissonienne du Chapitre 1 lorsque λ , l'espérance de W, est grande.

Théorème B.2.1 (Inégalité de Janson). *Pour tout* $\varepsilon \in [0,1]$,

$$\mathbb{P}(W \le (1 - \varepsilon)\lambda) \le e^{-\frac{\lambda}{1 + \frac{\Delta}{\lambda}}(\varepsilon + (1 - \varepsilon)\log(1 - \varepsilon))}.$$

Notamment,

$$\mathbb{P}(W=0) \le e^{-\frac{\lambda}{1+\frac{\Delta}{\lambda}}} \ .$$

Démonstration: Pour $t \geq 0$, on note $\psi(t) = \mathbb{E}[e^{-tW}]$. Alors,

$$\psi'(t) = -\mathbb{E}[We^{-tW}] = -\sum_{\alpha} \mathbb{E}(I_{\alpha}e^{-tW}) .$$

On note, pour $\alpha \in \Gamma$, $W'_{\alpha} = I_{\alpha} + \sum_{\beta \sim \alpha} I_{\beta}$ et $W''_{\alpha} = W - W'_{\alpha}$. Ainsi, W''_{α} est indépendante de I_{α} . Maintenant,

$$\mathbb{E}(I_{\alpha}e^{-tW}) = p_{\alpha}\mathbb{E}(e^{-tW'_{\alpha}}e^{-tW''_{\alpha}}|I_{\alpha} = 1) .$$

Le fait de conditionner par $I_{\alpha} = 1$ revient à fixer à 1 les valeurs de G_i pour $i \in \alpha$. Ainsi, l'inégalité de Harris implique que :

$$\begin{split} \mathbb{E}(I_{\alpha}e^{-tW}) & \geq & p_{\alpha}\mathbb{E}(e^{-tW'_{\alpha}}|I_{\alpha}=1)\mathbb{E}(e^{-tW''_{\alpha}}|I_{\alpha}=1) \;, \\ & = & p_{\alpha}\mathbb{E}(e^{-tW'_{\alpha}}|I_{\alpha}=1)\mathbb{E}(e^{-tW''_{\alpha}}) \;, \\ & \geq & p_{\alpha}\mathbb{E}(e^{-tW'_{\alpha}}|I_{\alpha}=1)\mathbb{E}(e^{-tW}) \;. \end{split}$$

Ainsi, en utilisant Jensen,

$$\psi'(t) \leq -\psi(t) \sum_{\alpha} p_{\alpha} \mathbb{E}(e^{-tW'_{\alpha}} | I_{\alpha} = 1) ,$$

$$\leq -\psi(t) \sum_{\alpha} p_{\alpha} e^{-\mathbb{E}(tW'_{\alpha} | I_{\alpha} = 1)} ,$$

$$= -\lambda \psi(t) \sum_{\alpha} \frac{p_{\alpha}}{\lambda} e^{-\mathbb{E}(tW'_{\alpha} | I_{\alpha} = 1)} ,$$

$$\leq -\lambda \psi(t) e^{-\sum_{\alpha} \frac{p_{\alpha}}{\lambda} \mathbb{E}(tW'_{\alpha} | I_{\alpha} = 1)} ,$$

$$= -\lambda \psi(t) e^{-\frac{t}{\lambda} \sum_{\alpha} \mathbb{E}(W'_{\alpha} I_{\alpha})} ,$$

$$= -\lambda \psi(t) e^{-(1+\frac{\Delta}{\lambda})t} .$$

En intégrant cette inéquation différentielle, on trouve :

$$\log \psi(t) \le -\frac{\lambda}{1 + \frac{\Delta}{\lambda}} (1 - e^{(1 + \frac{\Delta}{\lambda})t}).$$

On passe alors à la transformée de Legendre.

Bibliographie

- [AS08] Noga Alon and Joel H. Spencer. *The probabilistic method*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, third edition, 2008. With an appendix on the life and work of Paul Erdős.
- [BHJ92] A. D. Barbour, Lars Holst, and Svante Janson. *Poisson approximation*, volume 2 of *Oxford Studies in Probability*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1992. Oxford Science Publications.
- [Bol01] Béla Bollobás. Random graphs, volume 73 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2001.
- [Dur10] Rick Durrett. Random graph dynamics. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [JLR00] Svante Janson, Tomasz Łuczak, and Andrzej Rucinski. *Random graphs*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, New York, 2000.

Table des matières

In	\mathbf{trod}	uction	i
	0.1	Présentation du personnage principal : $\mathcal{G}(n,p)$	i
	0.2	Plan	iii
	0.3	Phénomènes de seuil	iii
	0.4	Notions élémentaires de théorie des graphes	iv
	0.5	Les méthodes du premier et du second moment	v
	0.6	Remarques sur les notations	v
	0.7	Références principales	v
	0.8	Exercices	vi
1	Pet	its sous-graphes	1
	1.1	Seuil pour les petits sous-graphes	1
	1.2	A l'intérieur du seuil	3
		1.2.1 Convergence en loi et distance en variation totale	3
		1.2.2 Approximation poissonienne par couplage	6
		1.2.3 Méthode des moments	8
	1.3	Exercices	10
2	Cor	nnexité	11
	2.1	Disparition des sommets isolés	11
	2.2	Connexité	12
	2.3	Exercices	14
3	Iné	galités de concentration	15
	3.1	Méthode de Cramér-Chernoff	16
	3.2	Inégalités de Hoeffding, Bennett et Bernstein	17
	3.3	Exercices	20
4	Tra	nsition de phase d'Erdös-Rényi	21
	4.1	Processus de Galton-Watson	22
		4.1.1 Construction par génération	22
		4.1.2 Codage par une marche aléatoire	25
		4.1.3 Processus de branchement du graphe	27
	4.2	Cas sous- et sur-critique	29

		4.2.1 Cas sous-critique	29
		4.2.2 Cas sur-critique	30
	4.3	Explication de la paramétrisation	34
	4.4	Cas critique	35
		4.4.1 Borne supérieure sur L_1	35
		4.4.2 Le cas des arbres	36
	4.5	Analyse du processus de branchement de Poisson	38
	4.6	Compléments	39
5	Nor	nbre chromatique	41
	5.1	Introduction	41
	5.2	Nombre d'indépendance et nombre clique dans $\mathcal{G}(n,1/2)$	44
	5.3	Nombre chromatique	45
	5.4	Exercices	47
A	Con	npléments sur la transition	49
	A.1	Cas à peine sous-critique	49
		A.1.1 Comparaison des trois processus	49
		A.1.2 Phase à peine sous-critique	53
	A.2	Cas à peine sur-critique	57
		A.2.1 Existence de la composante géante	57
		A.2.2 Dualité, unicité et complexité	58
В	Inég	galités de corrélation	61
	B.1	Inégalité de Harris	61
	B.2	Inégalité de Janson	62