MAT232 : séries et intégrales généralisées
2013-2014

Université Joseph Fourier
Grenoble

DM n°2

Correction

Soient a et b deux réels. On considére la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{a^n}{n+b^n}$.

1. On suppose $|b| \leq 1$. Pour quelles valeurs de a la série est-elle absolument convergente ?
   Lorsque n tend vers l'infini,
   $$|u_n| \sim \frac{|a|^n}{n} .$$
   Si $|a| \geq 1$, $\frac{|a|^n}{n} \geq \frac{1}{n}$, or $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum \frac{|a|^n}{n}$ diverge (par comparaison de séries à TG positifs), donc $\sum |u_n|$ diverge (encore par comparaison ...).
   Si $|a| < 1$, $\frac{|a|^n}{n} \leq |a|^n$, or $\sum |a|^n$ converge (série géométrique de raison de module inférieur à 1), donc $\sum \frac{|a|^n}{n}$ converge (par comparaison de séries à TG positifs), donc $\sum |u_n|$ converge (encore par comparaison ...).
   En conclusion, lorsque $|b| \leq 1$, $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $|a| < 1$.
2. Même question pour $|b| > 1$.
   Lorsque n tend vers l'infini,
   $$|u_n| \sim \frac{|a|^n}{|b|^n} = \left(\frac{|a|}{|b|}\right)^n .$$
   La série $\sum \left(\frac{|a|}{|b|}\right)^n$ est une série géométrique, elle converge si et seulement si sa raison est de module strictement inférieur à 1. Donc $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $|a| < |b|$.
3. On suppose $a = -1$. Pour quelles valeurs de b la série est-elle convergente ?
   Si $|b| > 1$, d'après la question 2, $\sum |u_n|$ converge, donc $\sum u_n$ converge.
   Si $|b| \leq 1$, on sait d'après la question 1 que $\sum u_n$ ne converge pas absolument. Mais peut-être y a-t-il semi-convergence. Comme $\frac{b^n}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$,
   $$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1+\frac{b^n}{n}} , \\ &= \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{b^n}{n} + o\left(\frac{b^n}{n}\right)\right) , \\ &= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-b)^n}{n^2} + o\left(\frac{b^n}{n^2}\right) , \end{aligned}$$

donc :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + v_n \ ,$$

avec $v_n = -\frac{(-b)^n}{n^2} + o\left(\frac{b^n}{n^2}\right)$. Le critère des séries alternées assure la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. Par ailleurs, lorsque n tend vers l'infini,

$$|v_n| \sim \frac{|b|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \ ,$$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc par comparaison de séries à TG positifs, $\sum v_n$ converge absolument, donc $\sum v_n$ converge. Finalement, $\sum u_n$ est semi-convergente lorsque $a = -1$ et $|b| \leq 1$.

4. Représenter dans le plan les points de coordonnées (a, b) tels que la série est absolument convergente, convergente, divergente.
   Il reste quelques cas en suspens.
   Si $|b| > 1$ et $|a| \geq |b|$, u_n ne tend pas vers 0 (cf. l'équivalent de la question 1). Donc $\sum u_n$ diverge.
   Si $|b| \leq 1$ et $|a| > 1$, u_n ne tend pas vers 0 (cf. l'équivalent de la question 2). Donc $\sum u_n$ diverge.
   Si $|b| \leq 1$ et $a = 11$, $u_n \sim \frac{1}{n}$. Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge par comparaison de séries à TG positifs.