MAT232 : séries et intégrales généralisées
2013-2014

Université Joseph Fourier
Grenoble

DM n°1

Correction

Exercice 1 : cf. le cours de L1 !

Exercice 2 : Donner un développement limité à l'ordre 2 de

$$u_n = n - \frac{1}{\sin \frac{1}{n}}$$

quand n tend vers $+\infty$ (reste en $o(1/n^2)$).

Seul le quotient $\frac{1}{\sin \frac{1}{n}}$ pose problème : il s'agit de trouver son DL avec un reste en $o(1/n^2)$. Comme $1/n$ tend vers 0 en l'infini, et que $\sin x$ est équivalent à x lorsque x tend vers 0, $\sin \frac{1}{n}$ est équivalent à $1/n$ lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent, si on précise l'équivalent de sin en 0, on va obtenir :

$$\sin(x) = x + P(x) + o(x^p) \ ,$$

avec P un polynôme de terme de plus petit degré 3 et de plus haut degré p. On aura alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin \frac{1}{n}} &= \frac{1}{\frac{1}{n} + P(\frac{1}{n}) + o(\frac{1}{n^p})} \ , \\
&= n \frac{1}{1 + nP(\frac{1}{n}) + o(\frac{1}{n^{p-1}})} \ , \\
&= n \left[1 - nP(\frac{1}{n}) + o(\frac{1}{n^{p-1}}) + o(nP(\frac{1}{n})) \right] \ , \\
&= n - n^2 P(\frac{1}{n}) + o(\frac{1}{n^{p-2}}) + o(n^2 P(\frac{1}{n})) \ .
\end{aligned}$$

On voit donc qu'il faut avoir $p \geq 4$ pour avoir un $o(1/n^2)$. Le terme $o(n^2 P(\frac{1}{n}))$ pouvant être précisé en affinant le DL de $1/(1-x)$, on sent bien que le choix $p = 4$ sera suffisant. Allons-y ! Lorsque x tend vers 0,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \ .$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin\frac{1}{n}} &= \frac{1}{\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^4})}\ , \\
&= n\frac{1}{1-\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^3})}\ , \\
&= n\left[1+\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^3})+O\left(\frac{1}{n^2}\right)^2\right]\ , \\
&= n+\frac{1}{6n}+o(\frac{1}{n^2})+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\ , \\
&= n+\frac{1}{6n}+o(\frac{1}{n^2})\ .
\end{aligned}$$

Pour finir,

$$u_n = -\frac{1}{6n}+o(\frac{1}{n^2})$$

Exercice 3 : On remarque que $(u_{4n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ car $4n^2=(2n)^2$ et que $\psi : n \mapsto 2n$ est une qpplication strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Mais $(u_{4n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ car $4n^2 = 2(2n^2)$. Donc $(u_{4n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et a même limite que $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$. Ces deux dernières suites ont donc même limite.

On montre de même que $(u_{4n^2+4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ (en écrivant $4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$) et de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (en écrivant $4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1$). Donc $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite.

Donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite. D'après un résultat du cours (ou un exercice du TD), on en déduit que (u_n) converge.

Exercice 4 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x+\frac{a}{x})$. La suite est bien définie, par récurrence immédiate, si u_0 appartient au domaine de f et si l'image de f est incluse dans le domaine de f. Or, $u_0 > 0$, et pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.
2. Une conséquence de la question 1 est que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons que (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Comme $u_n > 0$ pour tout n, on en déduit que $l \geq 0$. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, mais elle n'est même pas définie en 0. Il faut donc exclure le cas $l = 0$. Nénamoins, on sait que $f(x)$ admet une limite, $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieure. Si l valait 0, u_n tendrait vers 0 par valeurs supérieures lorsque n tend vers l'infini, et donc u_{n+1} tendrait vers $+\infty$, ce qui est absurde puisque (u_{n+1}) a même limite que (u_n). Par conséquent, $l > 0$. On peut alors utiliser la continuité de f en l pour obtenir que $l = f(l)$, en faisant tendre n vers l'infini dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
l &= \frac{1}{2}(l+\frac{a}{l})\ , \\
l^2 &= \frac{1}{2}(l^2+a)\ , \\
l^2 &= a\ , \\
l &= \sqrt{a}\ ,
\end{aligned}$$

car $l > 0$. En conclusion, si (u_n) converge, c'est vers $\sqrt{a}$.

3. On peut examiner la monotonie de u_n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) - u_n \ , \\ &= \frac{1}{2}(\frac{a}{u_n} - u_n) \ , \\ &= \frac{a - u_n^2}{2u_n} \ . \end{aligned}$$

Examinons donc la position de u_n par rapport à $\sqrt{a}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) - \sqrt{a} \ , \\ &= \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) - \sqrt{a} \ , \\ &= \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{2u_n} \ , \\ &= \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} \ , \\ &\geq 0 \ . \end{aligned}$$

On en déduit que $u_n \geq \sqrt{a}$ pour tout $n \geq 1$. Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \geq 1$. Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, minorée par 0, donc elle converge, et d'après la question 2, elle converge vers $\sqrt{a}$.

4. On a calculé que :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} \ ,$$

donc, pour $n \geq 1$,

$$\frac{|u_{n+1} - \sqrt{a}|}{(u_n - \sqrt{a})^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \ ,$$

et même

$$\lim_{n\infty} \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{(u_n - \sqrt{a})^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ .$$

La convergence de u_n est donc très rapide : en gros le nombre de chiffres significatifs double à chaque itération.

5. Cet algorithme permet de calculer des approximations de racines carrés de manière précise et en utilisant des opérations élémentaires (division, somme). Si a est entier et qu'on part de $u_0 = a$, on peut remarquer que toutes les approximations sont des rationnels.