M1 BIBS Orsay
Analyse spectrale et Séries Chro.
2010-2011

Travaux dirigés

Statistique descriptive

Exercice 1.1 On considère deux séries $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$. On appelle $a_{y/x}$ le coefficient directeur de la droite de régression du nuage $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ et $a_{x/y}$ celui de la droite de régression du nuage $(y_i, x_i)_{i=1,\dots,n}$.

1. Donner $a_{y/x}$ et $a_{x/y}$ en fonction des $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(y_i)_{i=1,\dots,n}$.
2. Montrer que $a_{y/x} \times a_{x/y} = \mathrm{corr}(x, y)^2$.
3. interpréter les cas $\mathrm{corr}(x, y) = 0$, $\mathrm{corr}(x, y) = 1$ et $\mathrm{corr}(x, y) = -1$.

Exercice 1.2 On considère la méthode de l'ajustement polynomial par moindres carrés ordinaires.

1. On suppose que la série peut se décomposer en
$$x_t = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, n.$$
Donner dans le cadre de l'ajustement polynomial, les valeurs de a_1, a_2 et a_3 en fonction des observations de x.
2. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On suppose que sur chaque intervalle de longueur $2q + 1$, la série peut être approchée par un polynôme de degré 2 :
$$x_{t+i} = a_1(t)i^2 + a_2(t)i + a_3(t) + e_{t+i}, \quad i \in \{-q, -q+1, \dots, q-1, q\},\ t = q+1, 2, \dots, n-q.$$
Comment procéderiez-vous pour déterminer les valeurs de a_1, a_2 et a_3 en fonction des observations de x ? Illustrer cette méthode avec $q = 2$.

Exercice 1.3 On considère une série chronologique $x = (x_1, \dots, x_n)$ qui s'écrit :
$$x_t = m_t + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$
où $(m_t)_t$ est une tendance et $(e_t)_t$ est stationnaire de moyenne nulle. Soit $q \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $t \mapsto m_t$ est linéaire alors la série obtenue par
$$\forall\, t \in \{1, \dots, n\}, \quad w_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} x_{t-j}$$
assure que
$$\forall\, t \in \{q+1, \dots, n-q\}, \quad w_t \approx m_t.$$
En particulier montrer que cette transformation permet de conserver la tendance. Montrer que cette transformation ne conserve pas les tendances polynomiales de degré 2.
2. Soit $(\theta_{-q}, \theta_{-q+1}, \dots, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{q-1}, \theta_q)$ une suite de $2q + 1$ coefficients tels que
$$\forall\, j \in \{0, \dots, q\}, \quad \theta_j = \theta_{-j}.$$
A partir de la série x, on considère la série
$$\forall\, t \in \{1, \dots, n\}, \quad w_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} \theta_j x_{t-j}.$$

a) Quelles sont les conditions que l'on doit imposer sur $(\theta_{-q}, \theta_{-q+1}, \ldots, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{q-1}, \theta_q)$ pour que cette transformation conserve les tendances constantes ?

b) Quelles sont les conditions que l'on doit imposer sur $(\theta_{-q}, \theta_{-q+1}, \ldots, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{q-1}, \theta_q)$ pour que cette transformation conserve les tendances linéaires ?

Exercice 1.4 Construire une moyenne mobile symétrique d'ordre 5 qui élimine les composantes périodiques de période 3 et laisse passer les polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Remarque : cette moyenne mobile doit donc s'écrire $M = a_2B^{-2} + a_1B^{-1} + a_0I + a_1B + a_2B^2$.

Un indice : une base des fonctions de période 3 et de moyenne nulle sur toute période est donnée par (s_1, s_2), avec :

$$s_1(0) = 1,\ s_1(1) = -1 \text{ et } s_2(0) = 1, s_2(2) = -1\ .$$

M1 BIBS Orsay
Analyse spectrale et Séries Chro.
2010-2011

Travaux dirigés

Processus stationnaires - ARMA

Exercice 2.1 Soit $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes i.i.d centrées, de variance commune σ^2 et a, b et c trois constantes réelles. Parmi les processus suivants, lesquels sont stationnaires au sens large ? Donner alors l'expression de leur fonction d'autocovariance.

$$\begin{array}{llll} (a) & Y_t = Z_t Z_{t-1} & (b) & Y_t = t + Z_t \\ (c) & Y_t = tZ_t & (d) & Y_t = a + bZ_t + cZ_{t-1} \end{array}$$

Exercice 2.2 Soient A et B deux variables aléatoires réelles centrées indépendantes, de même variance.

1. Montrer que le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par
$$X_t = A\cos(\frac{\pi}{3}t) + B\sin(\frac{\pi}{3}t),$$
est stationnaire au sens large.
2. Trouver sa fonction d'autocovariance.
3. Tracer une trajectoire de ce processus (choisir A et B) pour $t = 1, \ldots, 50$. Commenter.

Exercice 2.3 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de carré intégrable et ρ leur coefficient de corrélation :
$$\rho = \frac{\mathsf{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathsf{Var}(X)\mathsf{Var}(Y)}}\ .$$

1. Montrer que $\rho \in [-1;1]$.
2. Montrer que
$$\mid \rho \mid = 1 \iff \text{il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } X = aY + b \ p.s.$$
Calculer a et b en fonction de ρ, $\mathsf{Var}(X)$, $\mathsf{Var}(Y)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
3. Que vaut ρ quand X et Y sont indépendantes ?
4. Soit A une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0;1]$. On pose $X = \cos(2\pi A)$ et $Y = \sin(2\pi A)$. Calculer ρ. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 2.4 Soient X, Y et Z trois variables gaussiennes centrées réduites et indépendantes. On pose $U = X + Y - Z$ et $V = aX + bY$, où a et b sont dans $\mathbb{R}$.

1. Quelle est la loi de (U,V) ? Déterminer la loi de U et la loi de V.
2. Déterminer les lois de $U+V$ et $U-V$. A quelle condition $U+V$ et $U-V$ sont-elles indépendantes ?
3. Peut-on avoir U et V indépendantes ainsi que $U+V$ et $U-V$?

Exercice 2.5 Soient X une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite et Y une variable aléatoire réelle indépendante de X, ne prenant que les valeurs $+1$ et -1 avec $\mathbb{P}(Y = 1) = p$ $(0 \leqslant p \leqslant 1)$. On pose $Z = XY$.

1. Quelle est la loi de Z ? Le couple (X, Z) est-il gaussien ?
2. Montrer que pour tout $p \in [0; 1]$, X et Z ne sont pas indépendantes. Montrer cependant que pour p bien choisi, $\mathsf{Cov}(X, Z) = 0$.

Exercice 2.6 Soit (X, Y) un vecteur gaussien de matrice de covariance

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix},$$

où $\rho \in [0; 1]$. Montrer que $X+Y$ et $X-Y$ sont deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

Exercice 2.7 Soit M une moyenne mobile de la forme :

$$M = \sum_{i=-q}^{q} \theta_i B^i \ ,$$

et telle que :

1. la variance d'un bruit blanc soit réduite au maximum ;
2. les constantes soient conservées.

Montrer que M est la moyenne mobile arithmétique qui est de la forme suivante :

$$M = \frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^{q} B^{-i} \ .$$

Remarquer également que M laisse invariantes les tendances linéaires.

Exercice 2.8 On s'intéresse à l'effet d'une moyenne mobile sur un bruit blanc. Soit M une moyenne mobile de la forme :

$$M = \sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i B^{-i} \ ,$$

et $(Z_t \, , \, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc de moyenne nulle et variance σ^2. On pose :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad Y_t = M Z_t \ .$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}[Y_t] = 0$ et, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$,
$$\mathsf{Cov}[Y_t, Y_{t+k}] = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \theta_j \theta_{j-k} = \gamma(k) \ , \tag{1}$$
où on a posé $\theta_j = 0$ si $j < -m_1$ ou $j > m_2$.
2. Soit $X_t = m_t + s_t + Z_t$, avec m_t une tendance quadratique et s_t une saisonnalité de période p. On suppose que M laisse invariantes les tendances quadratiques et absorbe les saisonnalites de période p. Que vaut MX_t ? Le bruit dans la série MX_t est-il un bruit blanc ? Que vaut sa variance, et sous quelle condition est-elle plus faible que σ^2 ?
3. Montrer que γ vérifie :
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma(k) z^k = \sigma^2 M(z) M(\tfrac{1}{z}) \ ,$$
où $M(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \theta_j z^j$ est la fonction de transfert du filtre constitué par la moyenne mobile M.

M1 BIBS Orsay
Analyse spectrale et Séries Chro.
2010-2011

Travaux dirigés

Prédiction et modèles non stationnaires

Exercice 3.1 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de carré intégrable et ρ leur coefficient de corrélation. Dans cet exercice, on s'intéresse à la meilleure approximation de X par une fonction affine de Y au sens $L^2(\mathbb{P})$. C'est à dire que l'on recherche a et b de sorte que $\mathbb{E}[(X-(aY+b))^2]$ soit minimale. On note $\widehat{X}$ cette meilleure approximation.

1. On suppose que Y n'est pas constante p.s. En utilisant que $\mathbb{E}[(X-\widehat{X})Y]=0$ et $\mathbb{E}[(X-\widehat{X})]=0$, montrer que
$$\widehat{X}=\mathbb{E}(X)+\rho\sqrt{\frac{\mathsf{Var}(X)}{\mathsf{Var}(Y)}}\times(Y-E(Y)).$$
2. Montrer que la précision de l'approximation est donnée par :
$$\mathbb{E}[(X-\widehat{X})^2]=\mathsf{Var}(X)(1-\rho^2).$$

Exercice 3.2 Soit U un bruit blanc de variance σ^2. Soit X un processus AR(1), c'est-à-dire que $X_t-aX_{t-1}=U_t$, avec $a\in\mathbb{R}$. On suppose que $|a|\neq 1$.

1. Prouver que si $|a|<1$, alors
$$\forall\, t\in\mathbb{Z},\quad X_t=\sum_{k\geqslant 0}a^kU_{t-k}.$$
En déduire que l'espace vectoriel fermé H_X^n engendré par les variables $\{X_p,\quad p\leqslant n\}$ est égal à l'espace vectoriel fermé H_U^n engendré par les variables $\{U_p,\quad p\leqslant n\}$. Calculer la fonction de covariance de X.
2. Prouver que si $|a|>1$, alors
$$\forall\, t\in\mathbb{Z},\quad X_t=-\sum_{k\geqslant 1}a^{-k}U_{t+k}.$$
Calculer la fonction de covariance de X.

Exercice 3.3 Prédiction d'un $ARMA(1,1)$
Soit $X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus $ARMA$ satisfaisant
$$\forall\, t\in\mathbb{Z},\quad X_t-\frac{1}{2}X_{t-1}=U_t-\frac{1}{3}U_{t-1},\tag{2}$$
où $U=(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2. On note γ sa fonction de covariance.

1. En calculant pour $l\geqslant 2$, $\mathbb{E}(X_tX_{t-l})$, montrer alors que
$$\forall\, l\geqslant 2,\quad \gamma(l)=2^{-l+1}\gamma(1).$$

2. Montrer que

$$\forall\, t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = U_t + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} U_{t-k}$$

puis que

$$\forall\, t \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, l \in \mathbb{Z}, \quad X_{t-l} = U_{t-l} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} U_{t-l-k}. \tag{3}$$

3. En utilisant l'équation (3) avec $l = 0$ et $l = 1$ ainsi que l'équation (2), calculer $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ en fonction de σ^2.
4. Calculer la meilleure prédiction de X_{n+1} en fonction de $H_n^X = \overline{\text{vect}}(X_p,\ p \leqslant n)$.
5. On suppose que le processus W est gaussien. Donner un intervalle de confiance à 95% pour X_{n+1}.
6. Calculer la meilleure prédiction de X_{n+j} en fonction de $H_n^X = \overline{\text{vect}}(X_p,\ p \leqslant n)$ pour tout $j \geqslant 1$.
7. Calculer, à l'aide d'un ordinateur, les coefficients de la prédiction linéaire de X_{n+1} en fonction de $(X_0, \ldots, X_{n-1})$.

M1 BIBS Orsay
Analyse spectrale et Séries Chro.
2010-2011

Travaux dirigés

Statistique sur les ARMA et modèles non stationnaires

Exercice 4.1

1. Soit ϕ un réel tel que $|\phi| < 1$, Z un bruit blanc de variance σ^2 et X l'$AR(1)$ causal défini par :
$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t \ .$$
Pour $i \geqslant 0$, calculer $P_\phi(X_i|X_{i-1}, \ldots, X_0)$, la prédiction linéaire de X_i sachant $X_{i-1}, \ldots, X_0$, et $r_i(\phi)$ la variance de l'erreur de prédiction :
$$r_i(\phi) = \mathbb{E}[(X_i - P_\phi(X_i|X_{i-1}, \ldots, X_0))^2] \ .$$
2. On observe maintenant une série chronologique aléatoire $X_0, \ldots, X_{n-1}$, et on fait l'hypothèse que c'est un $AR(1)$ causal défini par une valeur $\widetilde{\phi}$ inconnue. Si on prédit séquentiellement X_i par $P_\phi(X_i|X_{i-1}, \ldots, X_0$, on note :
$$S_n(\phi, X) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(X_i - P_\phi(X_i|X_i, \ldots, X_{i-1}))^2}{r_i(\phi)}$$
la somme des carrés des erreurs de prédiction standardisées. Calculer $\widehat{\phi}^{(1)}$ la valeur de ϕ qui minimise $S_n(\phi, X)$.
3. Dans le même cadre que la question précédente, on note $\widehat{\phi}^{(2)}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\widetilde{\phi}$. Montrer que si $\phi^{(1)} \neq 0$, alors $\widehat{\phi}^{(2)} \neq \widehat{\phi}^{(1)}$.

Exercice 4.2 Soit ϕ un réel tel que $|\phi| < 1$, Z un bruit blanc de variance σ^2, Y l'$AR(1)$ causal défini par :
$$Y_t = \phi Y_{t-1} + Z_t \ ,$$
et $(X_t)_{t \geqslant 0}$ l'$ARIMA(1,1,0)$ défini par une variable X_0 décorrélé de $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et :
$$\forall t \geqslant 1, \quad X_t = X_{t-1} + Y_t \ .$$
Déterminer la prédiction linéaire à un pas de X_t sachant $X_0, \ldots, X_{t-1}$ pour $t \geqslant 1$.

Exercice 4.3 Soient α_1 et α_2 deux nombres réels, et $(x_t)_{t \geqslant 0}$ une suite déterministe définie par la récurrence suivante :
$$\begin{cases} x_0 \text{ et } x_1 \text{ donnés} \\ \forall t \geqslant 2, \quad x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} \end{cases}$$
Soit Z_t un bruit blanc. On considère un processus Y_t défini par :
$$\forall t \geqslant 0, \ Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} \ .$$
Ecrire un modèle d'état pour Y.

M1 BIBS Orsay
Analyse spectrale et Séries Chro.
2010-2011

Travaux dirigés

Analyse spectrale

Exercice 5.1 Calculer les transformées de Fourier discrètes des séries sur $\{0, \ldots, n-1\}$ définies par les fonctions suivantes :

1. $t \mapsto t$
2. $t \mapsto e^{it\omega_0}$, avec $\omega_0 \in [-\pi, \pi]$ fixé.
3. $t \mapsto sin(t\omega_0)$, avec $\omega_0 \in [-\pi, \pi]$ fixé.

Exercice 5.2 Phénomène de Gibbs discret

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $n = 2m$. On définit le vecteur x suivant :

$$\forall t \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad x(t) = \mathbb{1}_{t \leqslant m-1} \ .$$

On fixe $\alpha \in]0, 1/2]$. On pose $J = \lfloor \alpha n \rfloor$ et :

$$\forall s \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad x_J(s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-J}^{J} e^{\frac{2i\pi js}{n}} \widehat{x}(j) \ ,$$

Montrer que :

$$x_J(n-1) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{J}{n} & \text{si} \quad J \text{ est pair} \\ \frac{1}{2} - \frac{J+1}{n} & \text{si} \quad J \text{ est impair} \end{cases} \ .$$

Comparer $x_J(n-1)$ à $x(n-1)$ et commenter.

Solutions

Solution 1.4: Une moyenne mobile étant un opérateur linéaire, il suffit d'écrire ce qu'il faut sur une base des polynômes $(1, t, t^2)$ et sur une base des fonctions de période 3 et de moyenne nulle :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{Z},\ a_2 + a_1 + a_0 + a_1 + a_2 = 1 \\ \forall t \in \mathbb{Z},\ a_2(t-2) + a_1(t-1) + a_0 t + a_1(t+1) + a_2(t+2) = t \\ \forall t \in \mathbb{Z},\ a_2(t-2)^2 + a_1(t-1)^2 + a_0 t^2 + a_1(t+1)^2 + a_2(t+2)^2 = t^2 \\ \forall t \in \mathbb{Z},\ a_2 s_1(t-2) + a_1 s_1(t-1) + a_0 s_1(t) + a_1 s_1(t+1) + a_2 s_1(t+2) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{Z},\ a_2 s_2(t-2) + a_1 s_2(t-1) + a_0 s_2(t) + a_1 s_2(t+1) + a_2 s_2(t+2) = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} 2a_2 + 2a_1 + a_0 = 1 \\ 4a_2 + a_1 = 0 \\ \forall t \in \mathbb{Z},\ a_2 + a_1 - a_0 = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$a_0 = \frac{3}{9}, \quad a_1 = \frac{4}{9}, \quad a_2 = -\frac{1}{9}\ .$$

□

Solution 2.7: On cherche donc les coefficients $\theta = (\theta_{-m}, \ldots, \theta_0, \ldots, \theta_m)$, solution du problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{\theta} \displaystyle\sum_{i=-m}^{m} \theta_i^2 \\ \quad \text{s.c.} \quad \displaystyle\sum_{i=-m}^{m} \theta_i = 1 \end{cases}$$

En appliquant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on montre que la solution optimale est :

$$\forall i \in \{-m, \ldots, m\}\ , \quad \theta_i = \frac{1}{2q+1}\ .$$

□

Solution 5.1: Calculons d'abord la transformée de Fourier discrète $\mathcal{X}_n(\lambda)$ du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_n(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} e^{it\omega} e^{-it\lambda}\ , \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} e^{it(\omega-\lambda)}\ , \end{aligned}$$

où on reconnait la somme partielle d'une série géométrique. Si $\lambda = \omega$,

$$\mathcal{X}_n(\lambda) = \sqrt{n}\ .$$

Si $\lambda \neq \omega$,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_n(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{e^{in(\omega-\lambda)} - 1}{e^{i(\omega-\lambda)} - 1}\ , \\ &= \frac{e^{in(\omega-\lambda)/2}}{\sqrt{n} e^{i(\omega-\lambda)/2}} \frac{sin(n(\omega-\lambda)/2)}{sin((\omega-\lambda)/2)}\ . \end{aligned}$$

On obtient ainsi le périodogramme : si $\omega_k = \frac{2k\pi}{n}$,

$$I_n(\omega_k) = \begin{cases} n & \text{si } \omega_k = \omega \\ \frac{sin(n(\omega-\omega_k)/2)^2}{nsin((\omega-\omega_k)/2)^2} & \text{sinon.} \end{cases} .$$

Remarquons que si la fréquence ω est une des fréquences ω_k, alors le périodogramme est nul partout sauf pour $\omega_k = \omega$. Dans le cas contraire, le périodogramme ne donne plus zéro. □

Solution 2.4:

1. Comme X, Y et Z sont trois variables gaussiennes centrées, réduites et indépendantes, le vecteur $(X, Y, Z)^T$ est un vecteur gaussien de moyenne $(0, 0, 0)^T$ et de matrice de covariance I_3, la matrice identité de taille $3x3$. Le vecteur $(U, V)^T$ est l'image de $(X, Y, Z)^T$ par une application linéaire, de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} .$$

Par conséquent, $(U, V)^T$ est un vecteur gaussien, de moyenne $A.(0, 0, 0)^T = (0, 0)^T$ et de matrice de covariance :

$$\Gamma_1 = AI_3A^T = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ a+b & a^2+b^2 \end{pmatrix} .$$

Par conséquent, $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $V \sim \mathcal{N}(0, a^2 + b^2)$.

2. Le vecteur $(U + V, U - V)^T$ est l'image du vecteur gaussien $(U, V)^T$ par la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Donc, $(U + V, U - V)^T$ est un vecteur gaussien de moyenne $B.(0, 0)^T = (0, 0)^T$ et de matrice de covariance :

$$\Gamma_2 = B\Gamma_1B^T = \begin{pmatrix} 1 + 2(a + b) + a^2 + b^2 & 1 - a^2 - b^2 \\ 1 - a^2 - b^2 & 1 - 2(a + b) + a^2 + b^2 \end{pmatrix} .$$

On en déduit que $U+V \sim \mathcal{N}(0, 1+2(a+b)+a^2+b^2)$ et $(U-V) \sim \mathcal{N}(0, 1-2(a+b)+a^2+b^2)$. De plus, comme $(U+V, U-V)^T$ est un vecteur gaussien, $U+V$ et $U-V$ sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle, c'est à dire si et seulement si $a^2 + b^2 = 1$.

3. D'après la première question, U et V sont indépendantes si et seulement si $a + b = 0$ et d'après la seconde, $U + V$ et $U - V$ sont indépendantes si et seulement si $a^2 + b^2 = 1$. Donc il est possible d'avoir à la fois U et V sont indépendantes et $U + V$ et $U - V$ indépendantes. Cela se produit exactement lorsque $a = -b$ et $a^2 = 1/2$, c'est à dire $(a, b) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ ou $(a, b) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

□

Solution 2.5:

1. Z est de même loi que X, c'est à dire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Cela est dû au fait que la loi de X est symétrique, que Y est indépendante de X et ne prend que les valeurs 1 et -1. En effet,

soit A un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \in A) &= \mathbb{P}(Z \in A \text{ et } Y = 1) + \mathbb{P}(Z \in A \text{ et } Y = -1) \ , \\
&= \mathbb{P}(X \in A \text{ et } Y = 1) + \mathbb{P}(-X \in A \text{ et } Y = -1) \ , \\
&= \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(-X \in A)\mathbb{P}(Y = -1) \ , \\
&= p\mathbb{P}(X \in A) + (1-p)\mathbb{P}(-X \in A) \ , \\
&= p\mathbb{P}(X \in A) + (1-p)\mathbb{P}(X \in A) \ , \\
&= \mathbb{P}(X \in A).
\end{aligned}$$

Même si X et Z sont gaussiens, le couple (X, Z) n'est pas gaussien. Par exemple, on peut voir que $X + Z$ n'est pas gaussienne : lorsque Y vaut -1, $X + Z$ vaut zéro, et lorsque Y vaut 1, $X + Z$ vaut $2X$. Donc $X + Z$ est une variable qui vaut 0 avec probabilité 1/2, ce qui n'est jamais le cas d'une gaussienne. Comme $X + Z$ n'est pas gaussienne, le couple (X, Z) n'est pas gaussien.

2. On peut remarquer que $\mathbb{E}[(XZ)^2] = \mathbb{E}[X^4]$. Or, $\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[X^2]^2$. Donc :

$$\mathbb{E}[(XZ)^2] - \mathbb{E}[X^2]^2 = \mathsf{Var}(X^2) \ .$$

Si X et Z étaient indépendants, on aurait $\mathbb{E}[(XZ)^2] = \mathbb{E}[X^2]^2$ et donc $\mathsf{Var}(X^2) = 0$, ce qui implique que X^2 serait constante, ce qui est faux, bien sûr. Donc, X et Z ne sont pas indépendantes. Par ailleurs, en utilisant l'indépendance de X et Y,

$$\begin{aligned}
\mathsf{Cov}(X, Z) &= \mathbb{E}[XZ] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z] \ , \\
&= \mathbb{E}[X^2 Y] \ , \\
&= \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X^2] \ , \\
&= (2p-1)\mathbb{E}[X^2] \ .
\end{aligned}$$

Donc la covariance de X et Z est nulle si (et seulement si) p vaut 1/2.

□

Solution 2.6: Le vecteur $(X + Y, X - Y)^T$ est l'image du vecteur gaussien $(X, Y)^T$ par la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Donc, $(X + Y, X - Y)^T$ est un vecteur gaussien de matrice de covariance :

$$\Gamma = BKB^T = \begin{pmatrix} 2 + 2\rho & 0 \\ 0 & 2 - 2\rho \end{pmatrix} \ .$$

□

Solution ??: Y est clairement de moyenne nulle, et :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Cov}(\overline{Y_{t+h}}, Y_t) &= \mathsf{Cov}(\overline{X_{-t-h}}, X_{-t}) \ , \\
&= \mathsf{Cov}(\overline{X_{-h}}, X_0) \ , \\
&= \gamma_X(-h) \ , \\
&= \overline{\gamma_X(h)} \ .
\end{aligned}$$

Donc, Y est SLC, et, pour tout $h \in \mathbb{Z}$:

$$\gamma_Y(h) = \gamma_X(-h) = \overline{\gamma_X(h)} \ .$$

$\square$

Solution 2.2: Comme A et B sont centrées, X est clairement centré. Notons σ^2 la variance commune de A et B. Comme A et B sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= \mathsf{Cov}(A\cos(\frac{\pi}{3}t) + B\sin(\frac{\pi}{3}t, A\cos(\frac{\pi}{3}(t+h)) + B\sin(\frac{\pi}{3}(t+h)) \ , \\
&= \sigma^2 \left[\cos(\frac{\pi}{3}t)\cos(\frac{\pi}{3}(t+h)) + \sin(\frac{\pi}{3}t)\sin(\frac{\pi}{3}(t+h))\right] \ , \\
&= \sigma^2 \cos(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}(t+h)) \ , \\
&= \sigma^2 \cos(\frac{\pi}{3}h) \ ,
\end{aligned}$$

où on a utilisé $\cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. $\mathsf{Cov}(X_t, X_{t+h})$ ne dépend pas de t, donc X est stationnaire, et

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \cos(\frac{\pi}{3}h) \ .$$

$\square$

Solution 2.8:

1. Comme Y_t est combinaison linéaire des Z_t, alors par linéarité de l'espérance, on a immédiatement que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}[Y_t] = 0$.

   On peut écrire Y_t sous la forme suivante :

   $$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad Y_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \theta_j Z_{t+j} \ ,$$

   en posant $\theta_j = 0$ pour $j < -m_1$ ou $j > m_2$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$,

   $$Y_t Y_{t+k} = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \theta_j Z_{t+j}\right)\left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \theta_h Z_{t+k+h}\right) = \sum_{(j,h)\in\mathbb{Z}^2} \theta_j \theta_h Z_{t+j} Z_{t+k+h} \ .$$

   D'où,

   $$\mathsf{Cov}[Y_t, Y_{t+k}] = \mathbb{E}[Y_t Y_{t+k}] = \sigma^2 \sum_{\substack{(j,h)\in\mathbb{Z}^2 \\ j=h+k}} \theta_j \theta_h = \sigma^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \theta_j \theta_{j-k} \ .$$

   Cette covariance ne dépend pas de t mais uniquement de k. Donc, on peut poser $\mathsf{Cov}[Y_t, Y_{t+k}] = \gamma(k)$.

2. M est un opérateur linéaire, donc $MX_t = Mm_t + Ms_t + MZ_t = m_t + Y_t$. Le bruit dans la représentation additive de MX_t est Y_t. Il est bien stationnaire d'après la question précédente, mais ce n'est pas un bruit blanc, dès que la moyenne mobile n'est pas triviale, i.e dès que deux valeurs des θ_i sont non nulles. La variance de ce bruit est $\gamma(0)$, la variance de Y_t pour tout $t \in \mathbb{Z}$:

   $$\gamma(0) = \mathrm{var}[Y_t] = \sigma^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \theta_j^2 \ ,$$

d'après l'équation (1). Ainsi, une moyenne mobile transfome la variance d'un bruit blanc d'un facteur τ égal à :

$$\tau = \frac{\mathrm{var}[Y_t]}{\mathrm{var}[Z_t]} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \theta_j^2 \ .$$

La variance sera donc réduite si $\tau < 1$.

3. Pour finir, on a :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(k) z^k = \sigma^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \theta_j \theta_{j-k} z^j z^{k-j} = \sigma^2 M(z) M(\tfrac{1}{z}) \ .$$

□

Solution 5.2: Pour tout $j \neq 0$ (en se rappelant que $n = 2m$) :

$$\begin{aligned}
\widehat{x}(j) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=0}^{m-1} e^{-2itj\pi/n} \ , \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1 - e^{-2imj\pi/n}}{1 - e^{-2ij\pi/n}} \ , \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sin(j\pi/2)}{\sin(j\pi/n)} \frac{e^{-imj\pi/n}}{e^{-ij\pi/n}} \ , \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sin(j\pi/2)}{\sin(j\pi/n)} e^{i(1-m)j\pi/n} \ .
\end{aligned}$$

Pour tout s :

$$\begin{aligned}
x_J(s) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \widehat{x}(j) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{J} [e^{\frac{2i\pi js}{n}} \widehat{x}(j) + e^{-\frac{2i\pi js}{n}} \overline{\widehat{x}(j)}] \ , \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{J} \left[\frac{\sin(j\pi/2)}{\sin(j\pi/n)} e^{i(1-m)j\pi/n + 2i\pi js/n} + \frac{\sin(j\pi/2)}{\sin(j\pi/n)} e^{-i(1-m)j\pi/n - 2i\pi js/n} \right] \ , \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{J} \frac{\sin(j\pi/2)}{\sin(j\pi/n)} \cos((1-m)j\pi/n + 2j\pi s/n) \ .
\end{aligned}$$

Notamment, pour $s = (n-1)$, on a :

$$\cos((1-m)j\pi/n + 2j\pi s/n) = \cos(2j\pi - \frac{j\pi}{n} - \frac{j\pi}{2}) = \cos(j\pi/n)\cos(j\pi/2) - \sin(j\pi/n)\sin(j\pi/2) \ .$$

D'où :

$$\begin{aligned}
x_J(n-1) &= \frac{1}{2} - 2 \sum_{j=1}^{J} \frac{\sin(j\pi/2)^2}{n} \ , \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{J}{n} & \text{si} \quad J \text{ est pair} \\ \frac{1}{2} - \frac{J+1}{n} & \text{si} \quad J \text{ est impair} \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme J/n tend vers α quand n tend vers l'infini, et que $x(n-1) = 0$, on voit que $x_J(n-1) - x(n-1)$ tend vers $1/2 - \alpha$ quand n tend vers l'infini. Donc, si $\alpha < 1/2$, c'est à dire si on ne reconstruit le signal qu'avec une proportion 2α des coefficients de Fourier (en gardant les basses fréquences en priorité), on n'arrive pas à reconstruire correctement $x(n-1)$. □