M2MFA
Grandes Déviations
2010–2011

Examen
Correction

12 janvier 2011

Exercice 1

1. (a) Y_n suit un PGD de bonne fonction de taux I, de vitesse a_n et H est une fonction continue, donc par le principe de contraction, H_n suit un PGD de bonne fonction de taux J et de vitesse a_n, avec :
$$J(u) = \inf_{H^{-1}(u)} I \ .$$

(b) Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^d$ rencontrant $\mathrm{Dom}(J)$. On a alors, par le PGD de H_n sous $\mu^{\otimes n}$:
$$\liminf_{n\infty} \frac{1}{a_n} \log \mu^{\otimes n}(H_n \in V) \geqslant -\inf_V J > -\infty \ .$$
Donc, pour n assez grand, μ_n^V est bien définie. En utilisant les PGD pour Y_n et pour H_n, sous $\mu^{\otimes n}$, on a :
$$\begin{aligned}
\limsup_{n\infty} \frac{1}{a_n} \log \mu_n^V(Y_n \in A) &\leqslant \limsup_{n\infty} \frac{1}{a_n} \log \mu^{\otimes n}(Y_n \in A \cap H^{-1}(V) - \liminf_{n\infty} \frac{1}{a_n} \log \mu^{\otimes n}(H_n \in V) \ , \\
&\leqslant -\inf_{\overline{A\cap H^{-1}(V)}} I + \inf_V J \ , \\
&\leqslant -\inf_{\overline{A}\cap H^{-1}(\overline{V})} I + \inf_V J \ .
\end{aligned}$$
De même,
$$\begin{aligned}
\liminf_{n\infty} \frac{1}{a_n} \log \mu_n^V(Y_n \in A) &\geqslant \liminf_{n\infty} \frac{1}{a_n} \log \mu^{\otimes n}(Y_n \in A \cap H^{-1}(V) - \limsup_{n\infty} \frac{1}{a_n} \log \mu^{\otimes n}(H_n \in V) \ , \\
&\geqslant -\inf_{\overset{o}{A\cap H^{-1}(V)}} I + \inf_{\overline{V}} J \ , \\
&\geqslant -\inf_{\overset{o}{A}\cap H^{-1}(V)} I + \inf_{\overline{V}} J \ .
\end{aligned}$$

(c) Soit $u \in \mathrm{Dom}(J)$. Comme I est une bonne fonction de taux et H continue,
$$\sup_{r>0} \inf_{\overline{A}\cap H^{-1}(\overline{V_r(u)})} I \geqslant \inf_{\overline{A}\cap H^{-1}(u)} I \ .$$
En effet, si $\sup_{r>0} \inf_{\overline{A}\cap H^{-1}(\overline{V_r(u)})} I = +\infty$, il n'y a rien à prouver. Sinon, soit $\alpha > \sup_{r>0} \inf_{\overline{A}\cap H^{-1}(\overline{V_r(u)})} I$. Posons :
$$K_r = \{I \leqslant \alpha\} \cap \overline{A} \cap H^{-1}(\overline{V_r(u)}) \ .$$
Comme I est bonne, les K_r forment une suite décroissante de compacts non vides. Or, comme $\bigcap_{r>0} \overline{V_r(u)} = \{u\}$,
$$\bigcap_{r>0} K_r = \{I \leqslant \alpha\} \cap \overline{A} \cap H^{-1}(u) \ .$$
Donc il existe y dans l'intersection des K_r, ce qui implique :
$$\inf_{\overline{A}\cap H^{-1}(u)} I \leqslant \alpha \ .$$

Puis on fait tendre α vers $\sup_{r>0} \inf_{\overline{A}\cap H^{-1}(\overline{V_r(u)})} I$. Avec la question précédente, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\limsup_{r\to 0}\limsup_{n\infty} \frac{1}{a_n}\log \mu_n^{V_r(u)}(Y_n\in A) &\leqslant \limsup_{r\to 0}\left(-\inf_{\overline{A}\cap H^{-1}(\overline{V_r(u)})} I + \inf_{V_r(u)} J\right) ,\\
&\leqslant \sup_{r>0} -\inf_{\overline{A}\cap H^{-1}(\overline{V_r(u)})} I + J(u) ,\\
&\leqslant -\inf_{\overline{A}\cap \overline{H^{-1}(u)}} I + J(u) ,\\
&= -\inf_{\overline{A}} I^u(x) .
\end{aligned}$$

De l'autre côté,

$$\begin{aligned}
\liminf_{r\to 0}\liminf_{n\infty} \frac{1}{a_n}\log \mu_n^{V_r(u)}(Y_n\in A) &\geqslant \inf_{r>0}\left(-\inf_{\mathring{A}\cap H^{-1}(V_r(u))} I + \inf_{\overline{V_r(u)}} J\right) ,\\
&\geqslant -\inf_{\mathring{A}\cap H^{-1}(u)} I + \inf_{r>0}\inf_{\overline{V_r(u)}} J ,
\end{aligned}$$

Comme J est s.c.i, $\inf_{r>0}\inf_{\overline{V_r(u)}} J = J(u)$. Donc :

$$\liminf_{r\to 0}\liminf_{n\infty} \frac{1}{a_n}\log \mu_n^{V_r(u)}(Y_n\in A) \geqslant -\inf_{\mathring{A}\cap H^{-1}(u)} I + J(u) = -\inf_{\mathring{A}} I^u(x) .$$

(d) La fonction I^u est clairement positive ou nulle et s.c.i, car $H^{-1}(u)$ est un fermé. Enfin, elle est bonne, car pour tout $\alpha \geqslant 0$,

$$\{I^u \leqslant \alpha\} = \{I \leqslant J(u)+\alpha\}\cap H^{-1}(u) ,$$

qui est compact.

2. C'est l'application directe du corollaire du Lemme de Varadhan, en utilisant le fait que H est continue bornée et I bonne. On obtient :

$$I_\beta(x) = I(x) + \langle \beta, H(x)\rangle - \inf_{y\in\mathcal{X}}\{I(y) + \langle\beta, H(y)\rangle\} ,$$

et I_β est une bonne fonction de taux.

3. (a) I^u et I_β sont bonnes, donc $\mathcal{E}^u$ et E_β sont des compacts. Le nom de ces ensembles vient des propriétés suivantes. Si A est sous ensemble de $\mathcal{X}$ tel que $\overline{A}\cap\mathcal{E}^u = \emptyset$, alors,

$$\limsup_{r\to 0}\limsup_{n\infty} \frac{1}{a_n}\log \mu_n^{V_r(u)}(Y_n\in A) \leqslant -\inf_{\overline{A}} I^u < 0 ,$$

où on a utilisé le fait que I^u est bonne. Ainsi, la loi de Y_n (le macro-état) sous la mesure microcanonique se concentre (à vitesse exponentielle en a_n) autour de $\mathcal{E}^u$.
De même, si A est sous ensemble de $\mathcal{X}$ tel que $\overline{A}\cap\mathcal{E}_\beta = \emptyset$, alors,

$$\limsup_{n\infty} \frac{1}{a_n}\log \mu_{n,\beta}(Y_n\in A) \leqslant -\inf_{\overline{A}} I_\beta < 0 ,$$

où on a utilisé le fait que I_β est bonne. Ainsi, la loi de Y_n (le macro-état) sous la mesure canonique se concentre (à vitesse exponentielle en a_n) autour de $\mathcal{E}_\beta$.

(b) Soit $x\in\mathcal{E}^u\cap\mathcal{E}_\beta$. Cela signifie que :

$$I^u(x) = I_\beta(x) = 0 .$$

Donc $H(x) = u$, $J(u) = I(x)$, et :

$$I(x) + \langle\beta, H(x)\rangle = \inf_{y\in\mathcal{X}}\{I(y) + \langle\beta, H(y)\} .$$

Or,

$$\begin{aligned}\inf_{y\in\mathcal{X}}\{I(y)+\langle\beta,H(y)\rangle\} &= \inf_{v\in H(\mathcal{X})}\inf_{y\in H^{-1}(v)}\{I(y)+\langle\beta,H(y)\rangle\}\ ,\\ &= \inf_{v\in\mathbb{R}^d}\{J(v)+\langle\beta,v\rangle\}\ ,\end{aligned}$$

Ainsi,

$$J(u)+\langle\beta,u\rangle = I(x)+\langle\beta,H(x)\rangle = \inf_{v\in\mathbb{R}^d}\{J(v)+\langle\beta,v\rangle\}\ ,$$

ce qui signifie :

$$\forall v\in\mathbb{R}^d,\ J(u)+\langle\beta,u\rangle \leqslant J(v)+\langle\beta,v\rangle\ ,$$

ou encore :

$$\forall v\in\mathbb{R}^d,\ J(v)-J(u)\geqslant\langle-\beta,v-u\rangle.$$

(c) Si J n'est pas convexe, il existe un point u dans $\mathcal{X}$ tel que :

$$\forall\beta\in\mathbb{R}^d,\exists v\in\mathbb{R}^d,\ J(v)-J(u)<\langle-\beta,v-u\rangle.$$

Ce qui implique donc que $\mathcal{E}^u\cap\mathcal{E}_\beta=\emptyset$ pour tout $\beta\in\mathbb{R}^d$. Autrement dit, les macro-états d'équilibres micro-canoniques d'énergie u n'ont pas d'équivalent canonique.

4. On prend $Y_n(\omega)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\delta_{\omega_i}$, et H, définie de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$H(\nu)=-\int_{\mathbb{R}^2}h(x,y)\ d\nu(x)d\nu(y)\ .$$

On a bien $H_n(\omega)=H(Y_n(\omega))$, et H continue bornée (la continuité se traite comme dans l'exercice 5.1(a)). De plus, par le théorème de Sanov, Y_n satisfait, sous $\mu^{\otimes n}$ un PGD de bonne fonction de taux I définie par :

$$I(\nu)=K(\nu|\mu)\ ,$$

où K est la divergence de Kullback. On obtient :

$$J(u)=\inf\{K(\nu|\mu)\text{ t.q. }\nu\in\mathcal{M}_1(\Sigma)\text{ et }\int h(x,y)\ d\nu(x)d\nu(y)=u\}\ .$$

I^u s'en déduit aisément. Pour $\beta\in\mathbb{R}$,

$$I_\beta(\nu)=K(\nu|\mu)-\beta\int_{\mathbb{R}^2}h(x,y)\ d\nu(x)d\nu(y)-\text{constante}\ .$$

On peut aussi prendre $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\delta_{\omega_i}\otimes\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\delta_{\omega_i}$, comme dans l'exercice 5.1(a), ce qui donne des formules un peu différentes, mais la même valeur de J, bien sûr (unicité de la fonction de taux). Notamment, on peut voir que le domaine de J est égal à l'enveloppe convexe de $h(supp(\mu)^2)$.

Exercice 2

1. L'inégalité $I(A)=\inf_{x\in A}I(x)$ est évidente. Montrons l'autre sens. En utilisant la convexe-réularité de μ_n puis la borne sup faible du PGD,

$$\begin{aligned}I(A) &= \inf_n -\frac{1}{n}\log\mu_n(A)\ ,\\ &= \inf_n\inf_{K\text{ convexe }compact\subset A}-\frac{1}{n}\log\mu_n(K)\ ,\\ &= \inf_{K\text{ convexe }compact\subset A}\inf_n-\frac{1}{n}\log\mu_n(K)\ ,\\ &\geqslant \inf_{K\text{ convexe }compact\subset A}\inf_{x\in K}I(x)\ ,\\ &\geqslant \inf_{x\in A}I(x)\ .\end{aligned}$$

Remarque : on a utilisé le fait que :

$$\inf_n-\frac{1}{n}\log\mu_n(K)\geqslant\liminf_{n\infty}-\frac{1}{n}\log\mu_n(K)\ .$$

C'est bien vrai, selon les premières étapes du lemme sous-additif.

2. Soit $x \in \overline{\mathrm{Dom}(I)}^c$. Il existe un voisinage V de x tel que $V \subset \mathrm{Dom}(I)^c$. Donc, d'après la question précédente :
$$I(V) = \inf_{y \in V} I(y) = +\infty \ .$$
Ainsi, $x \notin \mathrm{supp}(\mu)$. On a montré que $\mathrm{supp}(\mu) \subset \overline{\mathrm{Dom}(I)}$. Or, I est convexe, donc son support est convexe, donc l'enveloppe convexe de $\mathrm{supp}(\mu)$ est incluse dans $\overline{\mathrm{Dom}(I)}$.
Pour l'autre sens, soit x appartenant au complémentaire de $\overline{Conv(\mathrm{supp}(\mu))}$. Il existe donc $A \in \mathcal{C}$ contenant x tel que $A \cap Conv(\mathrm{supp}(\mu)) = \emptyset$. Or $\mu(Conv(\mathrm{supp}(\mu))) = 1$ car $\mu(\mathrm{supp}(\mu)) = 1$ (cf. ci-dessous). Donc $\mu_n(Conv(\mathrm{supp}(\mu))) = 1$, pusque pour un convexe mesurable C, $\mu_n(C) \geqslant \mu(C)^n$. Ainsi, $\mu_n(A) = 0$ pour tout n, ce qui implique que $I(A) = +\infty$, et donc $x \in \mathrm{Dom}(I)^c$.
On a utilisé le fait que pour tout $A \in \mathcal{C}$, $\mu(A) > 0 \Leftrightarrow A \cap \mathrm{supp}(\mu) \neq \emptyset$. Donnons une preuve, qui utilise la régularité de la mesure μ (conséquence bien sûr de la convexe-régularité). Le sens $\Leftarrow$ est évident. Pour l'autre sens, supposons que $A \subset \mathrm{supp}(\mu)^c$. Soit K un compact inclus dans A. Comme $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \text{ t.q. } K \subset A\}$, il suffit de montrer que $\mu(K) = 0$. Or, $K \subset \mathrm{supp}(\mu)^c$ donc pour tout x de K, il existe $A_x \in \mathcal{C}$ tel que $\mu(A_x) = 0$ et $x \in A_x$. Les A_x recouvrent K, on peut en extraire un recouvrement fini, et comme ils sont de μ-mesure nulle, $\mu(K) = 0$.
Pour finir, montrons d'une autre façon que $\mathrm{Dom}(I) \subset \overline{Conv(\mathrm{supp}(\mu))}$. Soit $x \notin \overline{Conv(\mathrm{supp}(\mu))}$. Par Hahn-Banach, il existe un demi-espace ouvert H tel que $x \in H$ et $\overline{H} \cap \overline{Conv(\mathrm{supp}(\mu))}$. Soit α dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathcal{X}^*$ tels que :
$$H = \{y \in \mathcal{X} \text{ t.q.} \langle \lambda, y \rangle > \alpha\} \ .$$
Alors,
$$\forall y \in \mathrm{supp}(\mu), \quad \langle \lambda, y \rangle \leqslant \alpha \ .$$
Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \Lambda^*_\mu(x) &\geqslant \langle t\lambda, x \rangle - \log \int_{\mathrm{supp}(\mu)} e^{\langle \lambda, y \rangle} \, d\mu(y) \ , \\ &\geqslant \langle t\lambda, x \rangle - t\alpha \ , \end{aligned}$$
qui tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$, car $x \in H$. Comme $I \geqslant \Lambda^*$, on obtient $I(x) = +\infty$.