Exercice 1.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ différent de 1. Démontrer par récurrence sur k la formule : $1+\lambda+\ldots+\lambda^k = \frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}$.

Exercice 2. Déterminer si les séries suivantes convergent ou non (utiliser une comparaison).

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^{-1/2}}{2^n}$
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n!}$

Exercice 3. Pour chaque série ci-dessous, déterminer si elle converge.

1. $(\sum_{n\geq 1} e^{\frac{1}{n^2}} - \cos(\frac{1}{n}))$
2. $(\sum_{n\geq 1} n^{\frac{3}{2}}(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1))$
3. $(\sum_{n\geq 1} \frac{1-\cos(\frac{1}{n})}{\sin(\frac{1}{n})})$
4. $(\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n^\alpha} - \sqrt{(n-1)^\alpha}))$ (selon les valeurs de α).
5. $(\sum_{n\geq 1} \sin(\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n}))$
6. $(\sum_{n\geq 1} \log(1+\frac{1}{n}) - \log(1-\frac{1}{n}))$
7. $(\sum_{n\geq 1} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1})$
8. $(\sum_{n\geq 1} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n+1}})$
9. $(\sum_{n\geq 1} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right))$
10. $(\sum_{n\geq 1} \frac{1-n\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{n+1}})$

Exercice 4.
On considère dans cet exercice des séries de la forme $(\sum_{n\geq 1} n^\alpha \lambda^n)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| < 1$.

1. En utilisant une comparaison, montrer que si $\alpha \leq 0$ alors cette série converge.
2. Quelle est la limite quand $n \to \infty$ de $n^\alpha \lambda^{n/2}$?
3. Justifier l'existence d'une constante C telle que $n^\alpha \lambda^n \leq C\lambda^{n/2}$ pour tout n. En déduire que pour tout α et tout λ tel que $|\lambda| < 1$ la série $(\sum_{n\geq 1} n^\alpha \lambda^n)$ converge.
4. En déduire que pour tout polynôme P et tout λ tel que $|\lambda| < 1$ la série $(\sum_{n\geq 1} P(n)\lambda^n)$ converge.

Exercice 5.
On considère dans cet exercice des séries de la forme $(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta})$ avec α, β des nombre réels strictement positifs.

1. Par comparaison avec $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, montrer que cette série converge lorsque $\alpha > 1$.
2. On suppose maintenant $\alpha < 1$. Quelle est la limite quand $n \to \infty$ de $n^{\alpha-1}\log(n)^\beta$?
3. En supposant toujours que $\alpha < 1$, démontrer l'existence d'une constante C telle que pour tout n $\frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta} \geq \frac{C}{n}$.
   En déduire que dans ce cas la série $(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta})$ diverge quelque soit β.

Exercice 1. Donner les coefficients de Fourier trigonométriques des fonctions suivantes, définies sur $[-\pi, \pi]$:
1. $f(x) = \cos(2x)$,
2. $f(x) = 3 + 2\cos(3x) + 4\sin(5x)$,
3. $f(x) = \cos^2(x)$.

Exercice 2. Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.
1. Montrer que si f est paire alors sa série de Fourier est une série de cosinus.
2. Montrer que si f est impaire alors sa série de Fourier est une série de sinus.

Exercice 3.

1. Trouver les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$.
2. En déduire les coefficients de Fourier exponentiels de f, c_k. Vérifier qu'on a bien $c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}$.
3. En déduire, en utilisant le théorème de Parseval, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 4.

1. Trouver les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = |x|$.
2. En déduire les coefficients de Fourier exponentiels de f, c_k. Vérifier qu'on a bien $c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}$.
3. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 5. Soit de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = |\sin(x)|$. Calculer le développement en série de Fourier de f.

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \cos(ax)$. Calculer le développement en série de Fourier de f et montrer que

$$\frac{\pi}{\tan(a\pi)} = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}.$$

Exercice 7. Déterminer le développement en série de sinus de la fonction

$$f :]0, \pi[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x.$$

Exercice 8. Déterminer le développement en série de cosinus de la fonction

$$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{si } x \geq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Exercice 9. On considère la fonction 2π-périodique définie sur par $f(x) = x$ pour $x = [-\pi, \pi[$. Calculer les coefficients de Fourier de f, et étudier la convergence de la série de Fourier $S(f)(x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$ en utilisant le théorème de Dirichlet (on pourra traiter séparément les cas $x = \pm\pi$).

Exercice 10. On considère la fonction 1-périodique définie sur par $f(x) = x$ pour $x = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Calculer la série de Fourier $S(f)(x)$ et étudier sa convergence (on pourra soit calculer les coefficients de Fourier directement en utilisant les formules du cours pour les fonctions 1-périodiques, soit faire un changement de variables dans la série de Fourier de l'exercice précédent).

Exercice 11. (Juin 2019) Dans cet exercice, on admettra que pour n entier non nul, on a :

$$\int_0^\pi x^3 \sin(nx)\, dx = -\pi(n^2\pi^2 - 6)\frac{(-1)^n}{n^3}$$

Soit $S(f)$ la série de Fourier de la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(t) = t^3$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f
2. Montrer que $S(f)(t) = f(t)$ pour $t \in]-\pi, \pi[$ en appliquant le théorème de Dirichlet (on justifiera que les hypothèses sont vérifiées).
3. La formule pour $S(f)(t)$ de la question précédente est-elle valable pour $t = \pi$? Sinon, que vaut $S(f)(\pi)$?
4. Déterminer la valeur de la série de Fourier au point $t = \pi/2$. En déduire une série convergente dont la somme vaut $\pi^3/8$.
5. Montrer que l'identité de Parseval s'applique. En déduire une formule pour :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2\pi^2 - 6)^2}{n^6}$$
6. Les séries suivantes sont-elles convergentes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$?
7. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$, sachant que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$