Linéarité $f, g \in U$, $\lambda \in \Gamma$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f+\lambda g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$$

λ ne dépend pas de x

ok

3) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

on compose (⚠ ce n'est pas une multiplication) deux applications linéaires

$\rightarrow$ ce qui donne une application linéaire (on pouvait faire la même vérification qu'au 2))

4) Une combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire

5) S est linéaire

l'ensemble des solutions de $S(f) = 0$ c'est $\mathrm{Ker}(S)$

donc c'est un sous-espace vectoriel de U

6) $$f(x,t) = e^{\frac{i}{h}(Et - px)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{i}{h} E\, f(x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{i}{h} p\, f(x,t)$$

$$-ih \frac{\partial f}{\partial t} = Ef$$

$$\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{h^2}{2m}\left(-\frac{i}{h}p\right)^2 f = -\frac{p^2}{2m} f$$

f est solution de cette forme si et seulement si

$$E = -\frac{p^2}{2m}$$

Bonne dimension si p est la quantité de mouvement

$$\left(p = mv, \ \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2\right)$$

mais pas le bon signe

Pour avoir le bon signe on aurait pu prendre

$$f(x,t) = e^{\frac{i}{h}(px - Et)}$$

$$-E = -\frac{(-p)^2}{2m}$$

$$\Updownarrow$$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

7) erreur typographique

$$\sum_{k=1}^{3} \lambda_k e^{\frac{i}{\hbar}(E_k t - p_k x)} = 0$$

entraine-t-il $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$?

$x = 0, t = 0$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

On dérive par rapport à t

$$\sum_{k=1}^{3} \lambda_k \frac{i}{\hbar} E_k e^{\frac{i}{\hbar}(E_k t - p_k x)} = 0$$

$x = 0, t = 0$

$$\sum_{k=1}^{3} \lambda_k E_k = 0$$

On dérive une 2ème fois

$$\sum_{k=1}^{3} \lambda_k \left(\frac{i}{\hbar} E_k\right)^2 e^{\frac{i}{\hbar}(E_k t - p_k x)} = 0$$

$x = 0, t = 0$

$$\sum \lambda_k E_k^2 = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1^2 & E_2^2 & E_3^2 \end{pmatrix}}_{M(E_1, E_2, E_3)} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

8) M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$

Calcul du déterminant développement 1ère ligne

$$1 \begin{vmatrix} E_2 & E_3 \\ E_2^2 & E_3^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E_1 & E_3 \\ E_1^2 & E_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_1 & E_2 \\ E_1^2 & E_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= E_2 E_3^2 - E_2^2 E_3 - E_1 E_3^2 + E_1^2 E_3 + E_1 E_2^2 - E_1^2 E_2$$

$$(E_1 - E_2)(E_1 - E_3)(E_2 - E_3)$$

$$= (E_1^2 - E_1 E_2 - E_1 E_3 + E_2 E_3)(E_2 - E_3)$$

Autre méthode

On peut observer que $\det M(E_1, E_2, E_3)$ est nul si $E_1 = E_2$

ou si $E_1 = E_3$

ou si $E_2 = E_3$

car on aura 2 colonnes identiques

Donc $\det M(E_1, E_2, E_3)$ se factorise par $(E_1 - E_2)(E_1 - E_3)(E_2 - E_3)$

puis égal pour des raisons de degré et de coeff dominant

10/ si les E_i sont distinct 2 à 2 alors

$$\prod_{i<j} (E_i - E_j) \neq 0$$

donc det $M(E_1,E_2,E_3) \neq 0$

et la famille est libre.