# TD 3

[1]

## Exercice 1 :

a) donner la forme $\phi$ associée à A.

b) donner une base $\phi$-orthogonale, $\phi$-orthonormée

c) $\phi$ est-elle un p.s.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, soient $x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$ et $y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^2$

a) $\phi(x, y) = {}^t x A y = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$

Il s'agit du p.s usuel sur $\mathbb{R}^2$.

b) La base canonique $\left\{ \overset{e_1}{\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}} ; \overset{e_2}{\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}} \right\}$ est $\phi$-orthonormée puisque :

$(0\ 1) \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow e_1 \perp e_2$

et $\phi(e_1 ; e_1) = 1 = \phi(e_2, e_2)$

c) $\phi$ est bilinéaire, symétrique, définie et positive car :

$(\Gamma \rightarrow \geq 0)$

$\phi(x, x) = 0 \iff x_1^2 + x_2^2 = 0 \iff x_1 = 0$ et $x_2 = 0$

$\phi(x, x) = x_1^2 + x_2^2 \geqslant 0$

De manière générale on met A sous forme diagonale et on regarde :

$\longrightarrow$ pas de terme nul (définie)

$\longrightarrow$ pas de terme négatif (positive)

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $\phi_{(x,y)} = x_1 y_1 - x_2 y_2$

b) $\phi(e_1 ; e_2) = 0 = \phi(e_2 ; e_1)$ donc la base canonique est $\phi$-orthogonale

$\phi(e_1 ; e_1) = 1$ et $\phi(e_2 ; e_2) = -1 = i^2$ il faudrait aller dans $\mathbb{C}$

pour la $\phi$-orthonormaliser.

c) La forme n'est pas positive donc ce n'est pas un p.s.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\phi(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1$

b) L'algorithme de réduction de Gauss nous fournit une base $\phi$-orthogonale :

$q_\phi(x) = (x_1^2 + x_2^2 + \cancel{2 x_1 x_2})$

$= (x_1 + x_2)^2$

$\left[ 4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2 \right.$
$\left( \text{n'oubliez pas au cas où} \uparrow \right) \left. \right]$

Nous cherchons donc la base $B'$ dans laquelle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ devient $\begin{pmatrix} (x_1 + x_2) \\ a \end{pmatrix}$

$\uparrow$ ce que l'on veut.

Donc $P_{B'}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$

$\uparrow$ si $a = x_2$ (transformation la plus simple)

On l'inverse : $P_B(B') = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; on vérifie $P_B(B') P_B(B')^{-1} = Id$.

$B' = \left\{ e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et on a bien $\phi(e_1', e_2') = -1 + 0 + 1 + 0 = 0$

$B'$ est $\phi$-orthogonale.

# TD 3



## Exercice 1

3) b) Ainsi $A$ dans $B$ devient $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $B'$.

On se demande si il pourrait exister une base $B_u = \{u_1 ; u_2\}$

$\phi$-orthonormée, c-a-d :

$q_\phi(u_1) = 1$ , $q_\phi(u_2) = 1$ et $\varphi(u_1, u_2) = 0$ $\quad (*)$

Montrons que ce n'est pas possible :

On exprime $u_1$ et $u_2$ dans la base $B'$ : $u_1 = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ ; $u_2 = \begin{vmatrix} c \\ d \end{vmatrix}$

$(*) \iff a^2 = 1$ ; $c^2 = 1$ et $ac = 0 = \varphi(u_1 ; u_2)$

Si $B_u$ est $\varphi$-orthogonale alors soit $a = 0$, soit $c = 0$ ce qui

rend soit $c^2 = 1$, soit $a^2 = 1$ impossible.

Il n'existe donc pas de base $\phi$-orthonormée.

d) $A'$ contient un $0$ sur la diagonale, la forme $\phi$ n'est

donc pas définie, ce n'est pas un p.s.

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) $\phi(x, y) = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$

$= x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2$

b)

$$q_\phi(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2$$

$$= (x_1+x_2)^2 - 2x_2^2$$

La matrice de passage est $P(B)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comme au "3)".

$$P(B')_{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$B'$ est $\varphi$-orthogonale (puisque $A'$ n'a pas de termes hors diagonaux).

et $q_\phi\left(e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$ ok

$q_\phi\left(e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -2$ pas ok

Il n'existe pas de base $\phi$-orthonormée car si tel était le cas il

existerait $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tq : $u_1 = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ et $u_2 = \begin{vmatrix} c \\ d \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} q(u_1) = 1 = a^2 - 2b^2 \\ q(u_2) = 1 = c^2 - 2d^2 \end{cases} \quad \text{et } q(u_1 ; u_2) = 0 = ac - 2bd$$

$$\iff a = \frac{2bd}{c} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 1 \overset{(1)}{=} \dfrac{4b^2d^2}{c^2} - 2b^2 \overset{(2)}{\iff} 1 = \dfrac{\cancel{4b^2d^2} - 2b^2 - \cancel{4b^2d^2}}{1+2d^2} \iff \underset{>0}{1+2d^2} = \underset{\leq 0}{-2b^2} \\ 1 = c^2 - 2d^2 \iff c^2 = 1 + 2d^2 \quad (2) \end{cases}$$

$\boxed{\text{impossible}}$

c) La forme n'est pas un p.s puisqu'elle n'est pas positive $(\varphi(e_2' ; e_2') = -2)$

# TD 3 $\int_3$

## Exercice 2 :

Il y a quatre tests à effectuer :

a) bilinéaire

b) symétrique

c) définie

d) positive.

1) $(P,Q) \longmapsto \int_0^1 e^x P(x) Q(x)\, dx$

a) $\phi(P+R, Q) = \int_0^1 e^x (P(x)+R(x)) Q(x)\, dx$ (par linéarité de $\int$.)

$= \int_0^1 e^x P(x) Q(x) + \int_0^1 e^x R(x) Q(x)\, dx$

$= \phi(P,Q) + \phi(R,Q)$

on a donc la linéarité à gauche.

b) On $\int_0^1 e^x P(x) Q(x)\, dx = \int_0^1 e^x Q(x) P(x)\, dx$

Donc $\phi$ est symétrique $\Rightarrow$ linéaire à droite $\Rightarrow$ bilinéaire.

c) $\phi(P,P) = \int_0^1 e^x P^2(x)\, dx$ mais $e^x > 0$ sur $[0;1]$

tout comme $P^2(x) (\geq 0)$ donc il s'agit d'une somme de termes

positifs $\Rightarrow \phi(P,P) \geq 0 . \; \forall P \in \mathbb{R}[x]$

d) $\phi(P,P) = 0 \iff \int_0^1 e^x P^2(x)\,dx = 0$

$\iff P^2(x) = 0 \quad \forall x \in [0;1]$

$\implies P$ a une infinité de zéros, il s'agit du polynôme

nul : $P = 0$

2) $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ sur $\mathbb{R}^3$ : $x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$

La forme polaire et la forme bilinéaire associée ont même matrice :

$$A_q = A_\varphi = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & & & \\ x_2 & & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} & \\ x_3 & & & \end{array} \quad \left( \text{/!\\} \ 2x_1x_2 = x_1x_2 + x_2x_1 \right)$$

Dans $B$ = base canonique

Il faudrait donc une base dans laquelle $A_q$ serait diagonale car celle-ci contient toute l'information sous forme décodée.

On utilise donc la réduction de Gauss :

$q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$

$= (x_1 + x_2)^2 - x_2^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$

$= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$

Dans $B'$ (qu'il n'est pas nécessaire de déterminer) on a :

$A_q' = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ ses valeurs diagonales sont $> 0$

$\varphi$ est donc bien bilinéaire (matrice) ; symétrique (matrice symétrique) définie (pas de 0) et positive.

# TD 3 [4]

## Exercice 2 :

3.) $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$

Comme en 2) on applique la réduction de Gauss :

$$q(x) = x_1^2 + x_1(2x_2 - 4x_3) + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 10x_2x_3$$

$$= 1 \times l_1 + 2\left(x_2 + \frac{5}{2}x_3\right)^2 - \frac{25}{2}x_3^2 + x_3^2$$

mais $\left(1 - \frac{25}{2}\right)x_3^2$ donne une valeur négative dans la diagonale

$\varphi$ n'est donc pas positive et n'est par conséquent pas un p.s.

4) $\phi : A, B \longmapsto Tr({}^tAB)$ $\qquad$ <u>Tr est linéaire</u>

$\phi(A+B, C) = Tr({}^t(A+B)C) = Tr[{}^tAC + {}^tBC] = Tr[{}^tAC] + Tr[{}^tBC]$

Donc $\phi$ est linéaire à gauche.

$\phi(B,A) = Tr[{}^tBA]$ mais ${}^tA$ et $A$ ont la même diagonale

$\Rightarrow Tr\,{}^tA = Tr\,A$

$\Rightarrow Tr[{}^tBA] = Tr[{}^t({}^tBA)] = Tr[{}^tAB]$ $\quad$ (! ${}^t(AC) = {}^tC\,{}^tA$ !)

$\phi$ est donc symétrique $\Rightarrow$ linéaire à droite donc bilinéaire.

c) $T_r\left[{}^tAA\right] = 0 \iff \sum_{ik} a_{ik} b_{ki}$ avec ${}^tA = a_{ij}$ et $A = b_{ij}$

d'où cela sort-il ?

si A et B sont carrés de taille n

Si : $A = a_{ij}$ et $B = b_{ij} \Rightarrow AB = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = C_{ij}$

$C_{ij}$ est une matrice dont je veux sommer les éléments diagonaux $C_{ii}$

$\Rightarrow T_r\, AB = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$

On reprend $\sum_{ik} a_{ik} b_{ki} = \sum_{ik} a_{ik}^2$ car $b_{ji} = A \Rightarrow b_{ij} = {}^tA = a_{ij}$

on inverse lignes et colonnes

Donc si $\sum_{ik} a_{ik}^2 = 0$ $a_{ik} = 0$ $\forall i$ et $k$ car on somme des nombres positifs.

d) $T_r\left[{}^tAA\right] = \sum_{ik} a_{ik}^2$ = somme de nombres positifs donc $\phi(A,A) \geq 0$ $\forall A$.

$\phi$ est bien un produit scalaire.

5) $\phi : A, B \longmapsto T_r\, AB$ n'est pas un p.s car non positive.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

et $T_r(A^2) = -2$ n'est pas positif.

# $\boxed{TD\ 3}$ 5

## Exercice 3 :

1.) $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \langle x+y / x+y \rangle - \langle x-y / x-y \rangle$

$= \langle x;x\rangle + \langle y;y\rangle + 2\langle x;y\rangle - \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle + 2\langle x,y\rangle$

(Rappel : $\|x\|^2 = \phi(x,x)$
ici $\langle x;x\rangle$ ps usuel)

$= 4\langle x,y\rangle$

2.) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x;x\rangle + \langle y;y\rangle + \cancel{2\langle x;y\rangle} - \langle x;x\rangle - \langle y;y\rangle - \cancel{2\langle x;y\rangle}$

$= 2\left(\langle x;x\rangle + \langle y;y\rangle\right) = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

## Exercice 4 :

Soit $B = \{e_1 ; e_2 ; e_3\}$ ; orthonormalisons $B$ :

$e_1 \longrightarrow \tilde{e_1} = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \dfrac{e_1}{\sqrt{3}}$ nous avons notre premier vecteur.

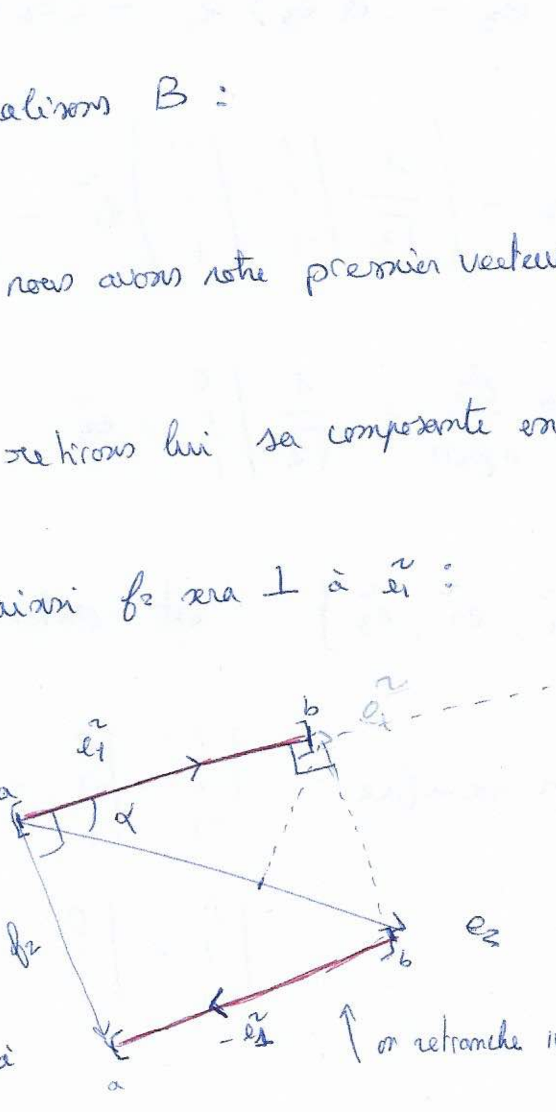
Pour construire $\tilde{e_2}$ à partir de $e_2$ retirons lui sa composante en $\tilde{e_1}$ :

$f_2 = e_2 - \langle \tilde{e_1} ; e_2 \rangle \tilde{e_1}$ ainsi $f_2$ sera $\perp$ à $\tilde{e_1}$ :

$\uparrow$

$(\|e_2\| \cos\alpha)$

(La longueur de $[a,b] = \|e_2\| \cos(\alpha)$)




$\uparrow$ on retranche $\|e_2\| \cos(\alpha)$ à $e_2$

On observe que $f_2$ est bien perpendiculaire à $\tilde{e_1}$.

Donc : $f_2 = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{e_2} + \frac{1}{3}\underbrace{\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)}_{\langle \tilde{e}_1\, e_2\rangle}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}_{\tilde{e}_1}$

$$= \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$f_2 \xrightarrow[\text{(normalisation)}]{\text{(devient)}} \tilde{e}_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

On construit $f_3$ à partir de $e_3$ en retirant ses composantes en $\tilde{e}_1$ et $\tilde{e}_2$ :

$$f_3 = e_3 - \langle \tilde{e}_1\, e_3\rangle \tilde{e}_1 - \langle \tilde{e}_2\, e_3\rangle \tilde{e}_2$$

$$= e_3 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\tilde{e}_1 - \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$f_3 \longrightarrow \frac{f_3}{\|f_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \tilde{e}_3$$

$\tilde{B}' = \{\tilde{e}_1 ; \tilde{e}_2 ; \tilde{e}_3\}$ est orthonormée !

(on vérifie : $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = 2-2=0$

$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0$ et $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 1-1=0$ )

# TD3 $\boxed{10}$

**Exercice 5** : (ici $\langle e_1, e_2 \rangle$ = $e_1$ scalaire $e_2$ au sens usuel.)

a) construction de la base de $\langle F \rangle$ = vect F

b) calcul de la projection de $v$ sur $\langle F \rangle$

c) équations de $\langle F \rangle$

1) $E = \mathbb{R}^3$, $\phi$ est le p.s canonique et $F = \left\{ e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} ; e_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}$

a) $$e_1 \xrightarrow[\text{normalisation}]{} \tilde{e}_1 = \frac{e_1}{\| e_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{orthogonalisation} \\ \| \\ O}}{e_2 \longrightarrow} f_2 = e_2 - \langle \tilde{e}_1\, e_2 \rangle \tilde{e}_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$$ k une constante de normalisation ($\neq 0$)

$$\underset{\substack{\text{normalisation} \\ \| \\ N}}{f_2 \longrightarrow} \tilde{e}_2 = \frac{f_2}{\| f_2 \|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

b) $$P_F(v) = \langle v, \tilde{e}_1 \rangle \tilde{e}_1 + \langle v\, \tilde{e}_2 \rangle \tilde{e}_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad ; \quad v = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

c) $\langle F \rangle$ est le plan perpendiculaire à $\vec{v}$ $\Rightarrow$ soit le point $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = M \in \langle F \rangle$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \vec{v} = 0 \iff x + y + z = 0$$

• ou encore : un vecteur $u = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \langle F \rangle$ si il forme une famille liée avec $\tilde{e}_1$ et $\tilde{e}_2$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \iff x + y + z = 0$$

2) $E = \mathbb{R}^4$, $\phi$ p.s.c et $F = \left\{ e_1 = \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right. ; e_2 = \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right. ; e_3 = \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right. \right\}$

a) $$e_1 \xrightarrow[N]{} \tilde{e}_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$$

$$e_2 \xrightarrow[O]{} f_2 = e_2 - \langle \tilde{e}_1 e_2 \rangle \tilde{e}_1 = \frac{1}{2} \left| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

$$f_2 \xrightarrow[N]{} \tilde{e}_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{10}} \left| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{matrix} \right.}$$

$$e_3 \xrightarrow[O]{} f_3 = e_3 - \langle \tilde{e}_1 e_3 \rangle \tilde{e}_1 - \langle \tilde{e}_2 e_3 \rangle \tilde{e}_2$$

$$= \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right. - \frac{1}{2} \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right. + \frac{1}{10} \left| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{matrix} \right. = \frac{2}{5} \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right.$$

$$f_3 \xrightarrow[N]{} \tilde{e}_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{15}} \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right.}$$

Vérification : $\tilde{e}_1 \cdot \tilde{e}_2 = 0$ $\quad \tilde{e}_2 \cdot \tilde{e}_3 = -1 - 1 - 4 + 6 = 0$ ok

b) $v = \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right.$ $\quad P_F(v) = \sum_{i=1}^{3} \langle \tilde{e}_i v \rangle \tilde{e}_i = \langle \tilde{e}_1 v \rangle \tilde{e}_1 + \langle \tilde{e}_2 v \rangle \tilde{e}_2 + \langle \tilde{e}_3 v \rangle \tilde{e}_3$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \tilde{e}_1 + 0\, \tilde{e}_2 + \frac{5}{\sqrt{15}} \tilde{e}_3 = \frac{1}{3} \left| \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right.$$

c)
Je cherche $n$ une vecteur de $\mathbb{R}^4$ normal à $\langle F \rangle$ donc perpendiculaire à chaque vecteur de base $\tilde{e}_1 ; \tilde{e}_2 ; \tilde{e}_3$ :

$$\begin{cases} \langle n\, \tilde{e}_1 \rangle = 0 = x + y \\ \langle n\, \tilde{e}_2 \rangle = 0 = x - z + t \\ \langle n\, \tilde{e}_3 \rangle = 0 = y + z + t \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ x = z \\ 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow n = \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right. \text{ et } M = \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ t \end{matrix} \right. \in \langle F \rangle$$

# $\boxed{\text{TD 3}}$ 7

Exercice 5 :

2) $M = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} \in \langle F \rangle \iff \langle n . OM \rangle = 0$

$\iff -x + y - z = 0$

3) $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(X) Q(X) dX$, $F = (\overset{e_1}{1}, \overset{e_2}{X}, \overset{e_3}{X^2})$ et $v = X^3$

a) $e_1 \xrightarrow[N]{} \tilde{e_1} = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ $\quad \|e_1\|^2 = \phi(1,1) = \int_{-1}^{1} 1 \, dX = 2$

$\boxed{\tilde{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ ici le p.s est donné par $\phi$ !!!

$e_2 \xrightarrow[O]{} f_2 = e_2 - \phi(\tilde{e_1} ; e_2)\tilde{e_1}$

$\phi(\tilde{e_1} ; e_2) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} X \, dX = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{X^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$

$f_2 = e_2 \xrightarrow[N]{} \tilde{e_2} = \frac{e_2}{\|e_2\|}$ $\quad \boxed{\tilde{e_2} = \frac{X\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$

$\|e_2\|^2 = \phi(e_2 ; e_2) = \int_{-1}^{1} X^2 dX = 2\left[\frac{X^3}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{2}{3}$

$e_3 \xrightarrow[O]{} f_3 = e_3 - \phi(\tilde{e_1} ; e_3)\tilde{e_1} - \phi(\tilde{e_2} ; e_3)\tilde{e_2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} X^2 dX = \frac{\sqrt{2}}{3}$ $\qquad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} X^3 dX = 0$

$f_3 = X^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = X^2 - \frac{1}{3}$

$$f_3 \xrightarrow[N]{} \tilde{e}_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} \quad \text{et} \quad \|f_3\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(X^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dX = \frac{8}{45}$$

$$\boxed{\tilde{e}_3 = \left(X^2 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}$$

On vérifie que $\tilde{e}_1 \cdot \tilde{e}_3 = c\int_{-1}^{1} (X^2 - \frac{1}{3}) dX = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$ ok

b) $p_F(v) = \phi(\tilde{e}_1; v)\tilde{e}_1 + \phi(\tilde{e}_2; v)\tilde{e}_2 + \phi(\tilde{e}_3; v)\tilde{e}_3$ avec $v = X^3$

$\downarrow$ (0 car $X^3$ impaire) $\quad\quad \downarrow$ (0 car $(X^2 - \frac{1}{3})X^3$ impaire)

$$\phi(\tilde{e}_2; v) = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X \times X^3 dX = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$$

$$p_F(v) = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X = \boxed{\frac{3X}{5}}$$

c) je sais que $v - p_F(v) = u$ est perpendiculaire à $\langle F \rangle$,

je m'en sers donc comme d'un vecteur normal : $\vec{OX} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} \in \langle F \rangle$ si :

$\phi(u, \vec{OX}) = 0$

$$\phi(u, \vec{OX}) = \int_{-1}^{1} (v - p_F(v))(a + bX + cX^2 + dX^3) dX = 0$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(1 + \frac{2}{5}X + X^2 + X^3\right)(a + bX + cX^2 + dX^3) dX = 0$$

$$= 2a + c\int_{-1}^{1} X^2 dX + \frac{2b}{5}\int_{-1}^{1} X^2 dX + \frac{2d}{5}\int_{-1}^{1} X^4 dX + a\int_{-1}^{1} X^2 dX + c\int_{-1}^{1} X^4 dX + b\int_{-1}^{1} X^4 dX$$

$$+ d\int^{1} X^6 dX$$