on a donc

$$\frac{2\pi^5}{5} = 2\pi \cdot \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{4}{n^2}\right)^2$$

$$= 2\frac{\pi^5}{9} + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

donc $16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right)\pi^5 = \frac{8}{45}\pi^5$

ce qui donne $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$

Exo 4.

1) f est paire donc $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

car $|x| = x$ pour $x > 0$.

car $|x|$ est paire, et on intègre entre des bornes opposées.

pour $n > 0$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\cos(nx)\,dx$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos(nx)}_{v'}\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(-\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\,dx + \left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

En d'autres termes, $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{2n+1} = -\frac{4}{\pi(2n+1)^2}.$$

2) Pour $n>0$, $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{2}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\dfrac{2}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Autre calcul : $c_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx}\,dx$

pour $k=0$, on retrouve $c_0 = a_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

pour $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} |x| e^{-ikx}\,dx + \int_{0}^{\pi} |x| e^{-ikx}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-x) e^{-ikx}\,dx + \int_{0}^{\pi} x e^{-ikx}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \frac{e^{-ikx}}{-ik}\,dx + \left[x\frac{e^{-ikx}}{+ik}\right]_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{+ik}\,dx + \left[x\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{(-ik)^2}\left[e^{-ikx}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{(-\pi)}{ik}e^{ik\pi} - \frac{1}{(ik)^2}\left[e^{-ikx}\right]_{0}^{\pi} - \frac{\pi}{ik}e^{-ik\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{k^2}(1-e^{ik\pi}) + \frac{1}{k^2}(e^{-ik\pi}-1) + \frac{\pi}{ik}\underbrace{(e^{ik\pi}-e^{-ik\pi})}_{=2i\sin(k\pi)=0}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi k^2}\left(2\cos(k\pi) - 2\right)$$

$$= \frac{1}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ -\dfrac{2}{\pi k^2} & \text{si } k \text{ impair.} \end{cases}$$ ✓

3) f est continue et C^1 par morceaux sur $[-\pi,\pi]$, donc par le théorème de Dirichlet on a

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

pour tout $x \in]-\pi,\pi[$.

càd.
$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)x)$$

pour $x=0$, on obtient

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

donc $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{2}$

et enfin $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$

Par Parseval, on a

$$\|f\|^2 = 2\pi\, a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Ici $\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 \, dx = 2 \int_0^{\pi} x^2 \, dx = 2\frac{\pi^3}{3}$

donc

$$\frac{2\pi^3}{3} = 2\pi \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\right)^2$$

$$= \frac{\pi^3}{2} + \pi \cdot \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

$$\frac{\pi^3}{6} = \frac{16}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

donc $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$

4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^4} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4}$$

séparer les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4}$$

$$\left(1 - \frac{1}{16}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15} \cdot \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exo 2:

1) Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction paire. Alors pour tout $n > 0$,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \sin(nx)}_{} dx = 0$$

bornes d'intégration opposées

fonction impaire car $f(-x)\sin(n(-x)) = -f(x)\sin(nx)$

donc la série de Fourier de f s'écrit

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

2) Si f est impaire, $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0$

bornes opposées

impaire

et pour $n > 0$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cos(nx)}_{} dx = 0$

fonction impaire car $f(-x)\cos(n(-x)) = -f(x)\cos(nx)$

donc la série de Fourier de f s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$