Exo 5. $b_n = 0$ pour tout n.

$$a_0 = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{2}{\pi}$$

pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos(nx) \, dx$

$$\underset{(*)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sin((n+1)x) + \sin((1-n)x) \right) dx$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} + \frac{\cos((1-n)x)}{1-n} \right]_0^\pi$$

ici on utilise $n \neq 1$.

$$= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos((n+1)\pi)}{n+1} + \frac{\cos((1-n)\pi)}{1-n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1-n} \right)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left((-1)^{n+1} - 1 \right) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{1-n} \right)$$

$$= -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{1-n^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ -\frac{4}{\pi} \frac{1}{n^2-1} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

par $(*)$, $a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(2x) \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^\pi = 0$

$$\boxed{S(f)(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}}$$

(Comme l'extension (2π)-périodique de f est C^1 par morceaux et continue, le th de Dirichlet dit que

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Exo 6 $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(ax)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(ax)}{a}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{\sin(a\pi)}{a\pi}.$$

pour $n>0$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(ax)\cos(nx)\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \big(\cos((a+n)x) + \cos((a-n)x)\big)\,dx$$
$$= +\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((a+n)x)}{a+n} + \frac{\sin((a-n)x)}{a-n}\right]_0^{\pi}$$
$$= +\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(a\pi+n\pi)}{a+n} + \frac{\sin(a\pi-n\pi)}{a-n}\right)$$

$a+n\neq 0$ et $a-n\neq 0$ car $a\notin\mathbb{Z}$.

$$= \frac{1}{\pi}(-1)^n\left(\frac{\sin(a\pi)}{a+n} + \frac{\sin(a\pi)}{a-n}\right)$$
$$= (-1)^n\frac{\sin(a\pi)}{\pi}\cdot\frac{a-\cancel{n}+a+\cancel{n}}{a^2-n^2}$$
$$= (-1)^n\frac{\sin(a\pi)}{\pi}\frac{2a}{a^2-n^2}.$$

$$S(f)(x) = \frac{\sin(a\pi)}{\pi} + 2a\frac{\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{a^2-n^2}$$

Comme l'extension (2π)-périodique de f est C^1_{mor} et continue, pour tout $x\in[-\pi,\pi]$, on a

$$\cos ax = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + 2a\frac{\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{a^2-n^2}$$

Pour $x=\pi$, ceci donne

$$\cos(a\pi) = \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(n\pi)}{a^2-n^2}\right)$$

ou encore $$\frac{\pi}{\tan(a\pi)} = \frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2-n^2}.$$

Exo7. On calcule la série de Fourier de l'extension impaire de f.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^x \sin(nx)\,dx. \quad (n>0)$$

Pour calculer $I = \int_0^\pi e^x \sin(nx)\,dx$, on fait deux intégrations par partie successives (en faisant le même "type" de choix pour u et v).

$$I = \int_0^\pi \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\sin(nx)}_{v}\,dx = -\int_0^\pi e^x (n\cos(nx))\,dx + \cancel{\left[e^x \sin nx\right]_0^\pi}$$

$$= -n\int_0^\pi \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\cos(nx)}_{v}\,dx$$

$$= -n\left(+\int_0^\pi e^x\cdot(+n\sin(nx))\,dx + \left[e^x\cos(nx)\right]_0^\pi\right)$$

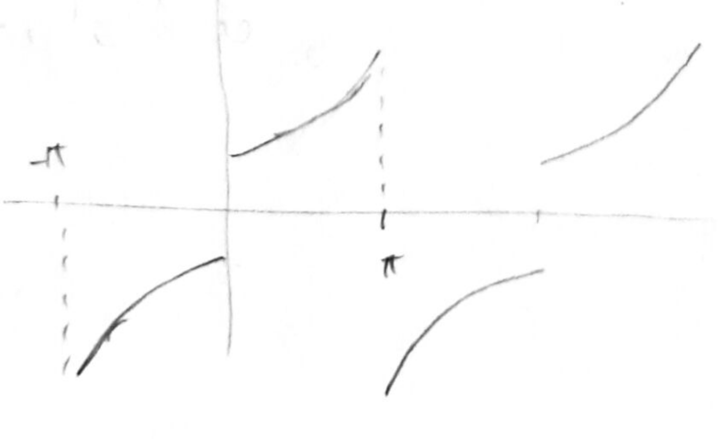
$$= -n^2\int_0^\pi e^x \sin(nx)\,dx - n\left(e^\pi\cos(n\pi) - 1\right)$$

Donc $I = -n^2 I + n(1-(-1)^n e^\pi)$

ce qui donne, en résolvant cette équation pour I,

$$I = (1-(-1)^n e^\pi)\frac{n}{1+n^2}.$$

On a donc $b_n = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{n(1-(-1)^n e^\pi)}{1+n^2}$



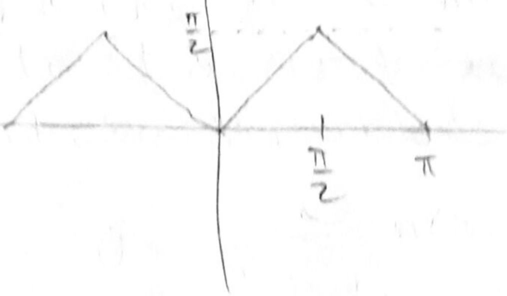
$$\boxed{S(f)(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1-(-1)^n e^\pi)}{n^2+1}\sin(nx)}$$

l'extension (2π)-périodique de l'extension impaire de f est C^1_{mor}, et continue sur $]0,\pi[$ (mais pas aux multiples de π).

Dirichlet donne $e^x = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1-(-1)^n e^\pi)}{n^2+1}\sin nx$

pour $x\in\,]0,\pi[$.

Exo 8



$$a_0 = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cancel{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$(n>0)$ $$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx$$

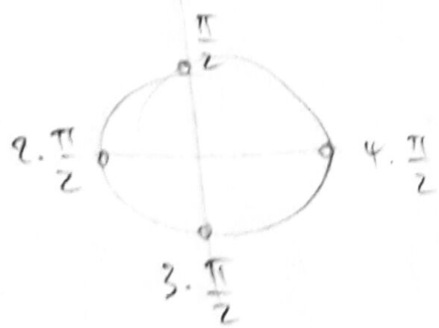
$$= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos(nx)}_{v'}\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \underbrace{(\pi - x)}_{u} \underbrace{\cos(nx)}_{v'}\,dx \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(- \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{n}\,dx + \left[x \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\pi/2}^{\pi} (+1) \frac{\sin nx}{n}\,dx + \left[(\pi - x) \frac{\sin nx}{n} \right]_{\pi/2}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(+ \frac{1}{n} \left[\frac{+\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2n} \cancel{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{n} \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{\pi}{2} \cancel{\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 - \cos(n\pi) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} \left(-1 - (-1)^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$



$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^m & \text{si } n = 2m \ (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$a_n = 0$ si n impair

$$a_{2n} = \frac{1}{\pi n^2} \left(-1 + (-1)^n \right)$$

$$a_{2n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\dfrac{2}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$S(f)(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{\pi(2n+1)^2} \cos(2(2n+1)x) \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((4n+2)x))}{(2n+1)^2}$$

Comme l'extension (2π)-périodique de l'extension paire de f est C^1_{mor} et continue, la série de fourier converge par tout $x \in [0, \pi]$ vers $f(x)$.