TD5 Séries de Fourier

Exo 1.

1) $a_2 = 1$, tous les autres coefficients sont nuls.

2) $a_0 = 3$, $a_3 = 2$, $\cancel{a}\,b_5 = 4$, tous les autres coefficients sont nuls.

3) $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

donc $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, tous les autres coeff^s sont nuls.

Rem : • $V, \langle \cdot,\cdot \rangle$ pré-hilb.
$W \subset V$ sous-espace vect.
Si $v \in W$, alors $\pi_W(v) = v$
• Les approximants de Fourier sont des projections orthogonales !

Exo 3

1) f est paire, donc $b_n = 0$ pour tout n.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \pi \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

$(n>0)$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{\cos(nx)}_{v'}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\int_0^{\pi} 2x\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\,dx + \cancel{\left[x^2\,\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}}\right)$$

↳ nul car $0 = \sin(n\pi) = \sin(0)$ $(n \in \mathbb{N})$

$$= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\frac{x}{}}_{u}\,\underbrace{\sin(nx)\,dx}_{v'}$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left(-\int_0^{\pi}\frac{-\cos(nx)}{n}\,dx + \left[x\cdot\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi}\cancel{\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}} + \frac{4}{n^2\pi}\left(\pi\cos(n\pi) - 0\right)$$

$$= (-1)^n\,\frac{4}{n^2}$$

2) pour $n>0$, $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} = (-1)^n\,\dfrac{2}{n^2}$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = (-1)^n\,\frac{2}{n^2}$$

②

$$(k\neq 0)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2}_{u}\, \underbrace{e^{-ikx}}_{v'}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{\pi} 2x\cdot\frac{e^{-ikx}}{-ik}\,dx + \left[x^2\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi i k}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx}\,dx + \frac{\pi^2}{2\pi i k}\left(e^{-ik\pi} - e^{ik\pi}\right)$$

$$\hookrightarrow -2i\sin(k\pi)=0$$

$$= \frac{1}{\pi i k}\left(-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{-ik}\,dx + \left[x\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi k^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\,dx + \frac{1}{\pi k^2}\left(\pi e^{-ik\pi} + \pi e^{ik\pi}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi k^2}\left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k^2}\cdot 2\cos(k\pi)$$

$$= \frac{1}{\pi k^3 i}\left(e^{-ik\pi} - e^{ik\pi}\right) + \frac{2}{k^2}(-1)^k$$

$$-2i\sin(k\pi)=0$$

et par $k=0$, $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = a_0 = \frac{\pi^2}{3}$.

3) On calcule $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (x^2)^2\,dx$

$$= 2\int_0^{\pi} x^4\,dx = 2\frac{\pi^5}{5}.$$

Parseval dit que

$$\|f\|^2 = \|a_0\cdot 1\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\cos(nx)\|^2$$

$$= a_0^2\,\underbrace{\|1\|^2}_{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,\underbrace{\|\cos(nx)\|^2}_{\pi} \quad \text{(cf exo 8 du TD 4)}$$

$$= 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

on a donc

$$\frac{2\pi^5}{5} = 2\pi \cdot \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{4}{n^2}\right)^2$$

$$= 2\frac{\pi^5}{9} + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

donc $16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)\pi^5 = \frac{8}{45}\pi^5$

ce qui donne $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$

Exo4

1) f est paire donc $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

car $|x| = x$ pour $x > 0$.

car $|x|$ est paire, et on intègre entre des bornes opposées.

pour $n > 0$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x| \cos(nx)\,dx$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos(nx)}_{v'}\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(-\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\,dx + \left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

En d'autres termes, $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{2n+1} = -\frac{4}{\pi(2n+1)^2}.$$