Ex 4 1) $u_n = n^\alpha \lambda^n \quad (n \geq 1)$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^\alpha \lambda^{n+1}}{n^\alpha \lambda^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \lambda$$

comme $\frac{n+1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$$

puisqu'on suppose $|\lambda|<1$, le critère de d'Alembert implique que $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ converge

2) on écrit $P(n) = \sum_{k=0}^{d} c_k n^k$ avec $c_k \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

alors $u_n = P(n)\lambda^n = (c_0 + c_1 n + \dots + c_d n^d)\lambda^n$

$= c_0 \lambda^n + c_1 \cdot n\lambda^n + \dots + c_d n^d \lambda^n$

donc le terme général est une combinaison linéaire de termes généraux de séries comme dans la question (1)

(avec $\alpha = 0, 1, \dots, d$)

les séries $\left(\sum_{n\geq 1} \lambda^n\right)$, $\left(\sum_{n\geq 1} n\lambda^n\right), \dots, \left(\sum_{n\geq 1} n^d \lambda^n\right)$ convergent par la partie (1).

Par linéarité des série, $\left(\sum_{n\geq 1} P(n) n^k\right)$ converge.

Ex 5. 1) pour tout $n \geq 3$, $\ln(n) \geq 1$, donc $\ln(n)^\beta \geq 1$

$$0 \leq \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Si $\alpha > 1$, $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge par le critère de Riemann

Par comparaison, $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right)$ converge aussi

2) $n^{\alpha-1} \cdot \ln(n)^\beta = \frac{\ln(n)^\beta}{n^{1-\alpha}}$ donne un cas d'indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$.
$(1-\alpha > 0)$

en fait $\frac{\ln(n)^\beta}{n^{1-\alpha}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

rappel: pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^\varepsilon} = 0$
(conséquence de la règle de l'Hospital,
$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$).

donc il existe n_0 t.q par $n \geq n_0$,
$\ln(n) \leq n^{\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1-\alpha}{2}}$

et alors $0 \leq \frac{\ln(n)^\beta}{n^{1-\alpha}} \leq \frac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{n^{1-\alpha}} = \frac{1}{n^{\frac{1-\alpha}{2}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

3) la suite $(n^{\alpha-1}\ln(n)^\beta)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (puisqu'elle tend vers 0 par (2)).

disons $0 \leq n^{\alpha-1}\ln(n)^\beta \leq C \qquad (C>0)$

Alors (par $n\geq 2$) $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \geq \frac{1}{n\cdot\frac{1}{C}} = \frac{C}{n}$

Comme $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\right)$ diverge, par comparaison, $\left(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right)$ diverge aussi.