Exo 3

1) $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

$e^{\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n^2} + o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

càd. $e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{}{\overset{n\to\infty}{\sim}} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} > 0$

$\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\right)$ converge (série de Riemann de paramètre $2 > 1$)

$\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right)$ converge (linéarité des séries)

donc $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$ converge. (critère des équivalents, qu'on a le droit d'utiliser car $\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} > 0$)

2) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

donc $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

càd. $e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$

$n^{3/2}\cdot\left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2} n^{3/2}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{1/2}} > 0$

$\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{1/2}}\right)$ diverge par le critère de Riemann $\left(\frac{1}{2} < 1\right)$.

$\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2}\frac{1}{n^{1/2}}\right)$ diverge par linéarité des séries

donc $\left(\sum_{n\geq 1}\left(n^{3/2}\left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}\right)\right)\right)$ diverge par le critère des équivalents (pour les séries à termes positifs)

3) $1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

donc $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$

$\sin x = x + \underset{x\to 0}{o}(|x|)$

donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

on a alors $\frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin\frac{1}{n}} \sim \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} > 0$

$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\right)$ diverge (Série harmonique)

donc $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1-\cos(\frac{1}{n})}{\sin(\frac{1}{n})}\right)$ diverge.

4) on note $s_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\sqrt{n^\alpha} - \sqrt{(n-1)^\alpha}\right) = \cancel{1} + \left(\cancel{\sqrt{2^\alpha}} - \cancel{1}\right) + \left(\cancel{\sqrt{3^\alpha}} - \cancel{\sqrt{2^\alpha}}\right) + \ldots$

$+ \left(\cancel{\sqrt{(k-1)^\alpha}} - \cancel{\sqrt{(k-2)^\alpha}}\right) + \left(\sqrt{k^\alpha} - \cancel{\sqrt{(k-1)^\alpha}}\right)$

$= \sqrt{k^\alpha} = (k^\alpha)^{1/2} = k^{\alpha/2}$

la suite des somme partielles

converge si $\alpha < 0$, car alors $k^{\alpha/2} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

converge si $\alpha = 0$, car alors $s_k = 1$ pour tout k

diverge si $\alpha > 0$, car alors $s_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty$

5) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o_{x\to 0}(|x|^3)$

donc $\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n}) = \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$

càd. $\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n}) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{6}\frac{1}{n^3}$.

On a alors $\boxed{\sin\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{6}\frac{1}{n^3}}$. En effet:

$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$, donc $\frac{\sin(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n})}{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

(car $\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$)

ceci donne

$$\frac{\sin(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n})}{\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}} = \underbrace{\frac{\sin(\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n}))}{\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n})}}_{\downarrow n\to\infty \atop 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}}}_{\downarrow n\to\infty \atop 1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

L'équivalent encadré dit que $\left(\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n})\right)\right)$ converge, car $\frac{1}{6}\frac{1}{n^3} > 0$ et le critère des équivalents s'applique.

$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}\right)$ converge par le critère de Riemann $(3>1)$

6) $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(|x|)$

$\ln(1-x) = -x + \underset{x\to 0}{o}(|x|)$

$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \underset{x\to 0}{o}(|x|)$

donc $\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1-\frac{1}{n}) \overset{n\to\infty}{\sim} 2\cdot\frac{1}{n} > 0$

Par le critère des équivalents et le fait que $(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n})$ diverge (série harmonique), on a

$\sum_{n\geq 1} \left(\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1-\frac{1}{n})\right)$ diverge.

rem: si vous interprétez "log" comme $\log_{10}$, on a $\log_{10} \alpha = \frac{\ln \alpha}{\ln 10}$ pour tout $\alpha > 0$ donc la réponse est la même par linéarité des séries.

7) $e^{\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\sim} 1$ donc $\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$

$(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n})$ diverge, donc $(\sum_{n\geq 1} \frac{e^{1/n}}{n+1})$ diverge aussi (critère des équivalents)

8) $e^{\frac{1}{n}} - 1 \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

$\sqrt{n+1} \overset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n}$ car $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{1} = 1$

donc $\frac{e^{1/n} - 1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}} > 0$

$(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}})$ converge par le critère de Riemann ($\frac{3}{2} > 1$)

donc par le critère des équivalents, $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n+1}}\right)$ converge

9) $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{}{\overset{n\to\infty}{\sim}} \frac{1}{n}$

donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n \cdot \frac{1}{n} = 1$

le terme général de la série ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

10) $\ln(1+n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$n\ln(1+n) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n} + o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$

↳ en effet:

$$\frac{n \cdot o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

donc

$$1 - n\ln(1+n) = \frac{1}{2}\frac{1}{n} + o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

ou encore

$$1 - n\ln(1+n) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{1}{n}$$

on a vu plus haut que $\sqrt{n+1} \overset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n} = n^{1/2}$

donc

$$\frac{1 - n\ln(1+n)}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{n}}{n^{1/2}} = \frac{1}{2n^{3/2}} > 0$$

$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}\right)$ converge (critère de Riemann $\frac{3}{2} > 1$) + linéarité

et c'est une série à termes positifs

Donc par le critère des équivalents $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1-n\ln(1+n)}{\sqrt{n+1}}\right)$ converge