Feuille de TD 4 (Séries numériques)

Exo 1 on note $P(k)$ la propriété $\sum_{j=0}^{k} \lambda^j = \frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}$

- $P(0)$ est vraie, car $\sum_{j=0}^{0} \lambda^j = 1$ et $\frac{1-\lambda}{1-\lambda} = 1$ (noter $\lambda \neq 1$)
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. En effet, supposons que $P(k)$ est vraie. Alors

$$\sum_{j=0}^{k+1} \lambda^j = \left(\sum_{j=0}^{k} \lambda^j\right) + \lambda^{k+1} = \frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda} + \lambda^{k+1}$$

$$= \frac{1-\cancel{\lambda^{k+1}} + (1-\lambda)\lambda^{k+1}}{1-\lambda} = \frac{1-\lambda^{(k+1)+1}}{1-\lambda}$$

c'est-à-dire que $P(k+1)$ est vraie.

Par récurrence, on obtient que $P(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$

Exo 2

1) $0 \leq \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ (car $\sin(x) \in [-1,1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$)

on sait que $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$ converge (série de Riemann de paramètre $2>1$).

Par comparaison, $\left(\sum_{n\geq 1} \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right|\right)$ converge aussi, càd. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$ converge absolument.

Comme convergence absolue $\Rightarrow$ convergence, on obtient enfin que $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}\right)$ converge.

2) $0 \leq \frac{n^{-1/2}}{2^n} = \frac{1}{2^n n^{1/2}} = \frac{1}{2^n \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(car $n \geq 1$, donc $\sqrt{n} \geq 1$)

on sait que $\left(\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$)

par comparaison, on obtient que $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{n^{-1/2}}{2^n}\right)$ converge aussi

3) Pour tout $n \geqslant 3$, on a $\ln(n) \geqslant 1$, donc

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

On sait que $\left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}\right)$ diverge (série harmonique)

donc par comparaison, $\left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n}\right)$ diverge

4) $\left(\sum_{n \geqslant 1} u_n\right)$ avec $u_n = \frac{2^n}{n!}$

on a $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$$

donc $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Par le critère de d'Alembert, on obtient que $\left(\sum_{n \geqslant 1} u_n\right)$ converge.

(rappel: • Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \to \infty} \alpha$ avec $|\alpha| < 1$,
alors $\left(\sum_{n \geqslant 0} u_n\right)$ converge.

• Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \to \infty} \alpha$ avec $|\alpha| > 1$
alors $\left(\sum_{n \geqslant 0} u_n\right)$ diverge.

• Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \to \infty} \alpha$ avec $|\alpha| = 1$
on ne peut pas conclure en général

(par exemple: $\left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}\right)$ converge,
mais $\left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}\right)$ diverge).)