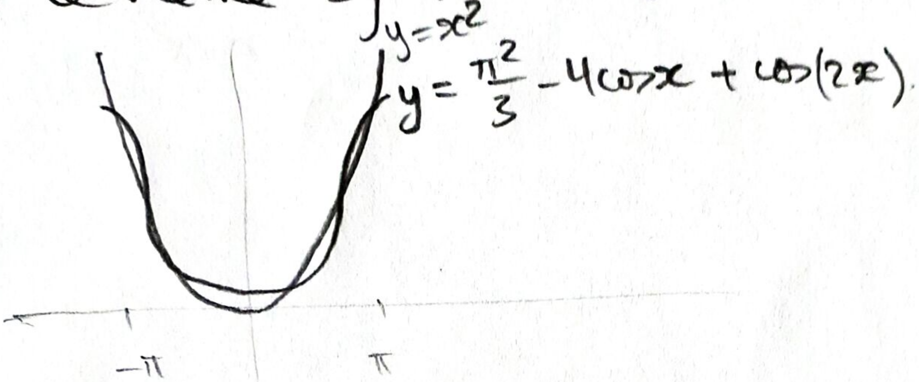
Pour vérifier, on pourra tracer les graphes de $f(x) = x^2$ et de $g(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos(2x)$ sur le même système d'axes :



Exo 17

1) $\det(A_1 - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 - L_3 \\ L_1 \to L_1 + (\lambda - 1) L_3}}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 2\lambda - \lambda^2 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda - \lambda^2 \\ -\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \lambda^2(3-\lambda)$$

valeurs propres : $\lambda = 0$ et $\lambda = 3$.

Sous-espaces propres correspondants ?

$$E_0 = \mathrm{Ker}(A_1 - 0 \cdot I_3) = \mathrm{Ker}(A_1)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

la deuxième partie génératrice est obtenue par Gram-Schmidt, en calculant

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

base orthonormée de E_0:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$E_3 = \mathrm{Ker}(A_1 - 3I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

pivot de Gauss

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1\\ L_3 \to L_3 + 2L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \to -\frac{1}{3}L_2\\ L_3 \to L_3 + L_2}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \to L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_3 \iff \begin{cases} x - z = 0\\ y - z = 0\end{cases} \iff \begin{cases} x = z\\ y = z\end{cases}$$

$$E_3 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Note: on peut aussi aller plus vite en devinant que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Ker}(A_1 - 3I_3)$ et en observant que $\dim E_3 = 1$ (car $\lambda = 3$ est une racine de multiplicité 1 du polynôme caractéristique) base orthonormée de E_3 : $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

valeur propre 0

Conclusion: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ← valeur propre 3.

est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, formée de vecteurs propres de A_1. On a donc

$$P^{-1}A_1P = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

où $P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$. [en k-ème position sur la diagonale, on trouve la valeur propre du k-ème vecteur de base

Noter que comme la base formée par les colonnes de P est orthonormée par le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$, on a que P est une <u>matrice orthogonale</u>, c'est-à-dire

$$P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

2) $A_2 = \begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}$, $\det(A_2 - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 2\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}$

$$= (2-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left((\lambda-1)^2 - 2^2\right)$$

$$= (2-\lambda)\left((\lambda-1)+2\right)\left((\lambda-1)-2\right)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3)$$

valeurs propres: $\lambda = -1, 2, 3$.

$$E_{-1} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_2 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_3 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale

et on a

$$P^{-1}A_2P = {}^tPA_2P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3) $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A_3 - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & \lambda^2-10\lambda+24 & 12-2\lambda \\ -1 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 12-2\lambda & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

$L_1 \to L_1 - (\lambda-5)L_2$
$L_3 \to L_3 + 2L_2$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & (\lambda-6)(\lambda-4) & -2(\lambda-6) \\ -1 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 2(6-\lambda) & (6-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= -(\lambda-6)^2 \det\begin{pmatrix} 0 & \lambda-4 & -2 \\ -1 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -(\lambda-6)^2 \det\begin{pmatrix} \lambda-4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -(\lambda-6)^2 \cdot \lambda$$

$$E_6 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y-2z=0 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$E_0 = \mathrm{Ker}\, A_3$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \to \frac{1}{3}L_3 \\ L_2 \to L_2 \\ L_3 \to L_1}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - 5L_1}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \to \frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \to L_3 + L_2}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 - L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \iff \begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 0 \\ y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

donc $E_0 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale ($P^{-1} = {}^tP$)

et on a

$$P^{-1}A_3P = {}^tPA_3P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exo 18

1) M = matrice de q dans la base canonique

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

car $q(x,y,z) = (x \ \ y \ \ z)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

valeurs propres de M?

$$\det(M-\lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \to L_1+L_2+L_3}{=} \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda & -1-\lambda \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(1+\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \to L_2+L_1 \\ L_3 \to L_3+L_1}}{=} -(1+\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(1+\lambda)(2-\lambda)^2$$

Les valeurs propres sont $\lambda = -1$ et $\lambda = 2$.

$$E_{-1} = \mathrm{Ker}(M-(-1)I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

(déjà calculé dans l'exo 17)

$$E_2 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$ est une matrice

orthogonale, càd $P^{-1} = {}^tP$ et on a

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donc

$${}^tP M P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $e_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

diagonalise la forme quadratique, càd (e_1, e_2, e_3) est q-orthogonale.

2)

$$q(x,y,z) = (x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 4 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donc la matrice de q dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 4 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(M - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 4-\lambda & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} - \det \begin{pmatrix} 2 & 4-\lambda & 2\sqrt{2} \\ 2-\lambda & 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2-\frac{1}{2}\lambda & \sqrt{2} \\ 2-\lambda & 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \to L_2 - (2-\lambda)L_1 \\ L_3 \to L_3 + \sqrt{2} L_1}}{=} -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2-\frac{1}{2}\lambda & \sqrt{2} \\ 0 & -2+3\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2 & -\sqrt{2}(3-\lambda) \\ 0 & \sqrt{2}(4-\frac{1}{2}\lambda) & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -2 \det \begin{pmatrix} -2+3\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2 & -\sqrt{2}(3-\lambda) \\ \sqrt{2}(4-\frac{1}{2}\lambda) & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -2(3-\lambda) \det \begin{pmatrix} -2+3\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}(4-\frac{1}{2}\lambda) & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2(3-\lambda)\left(-2+3\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2 + 2(4-\frac{1}{2}\lambda)\right)$$

$$= -2(3-\lambda)\left(-\frac{1}{2}\lambda^2+2\lambda+6\right)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-12)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda-6)(\lambda+2)$$

Valeurs propres $-2, 3, 6$.

$$E_{-2} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 6 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \underset{L_2 \to \frac{1}{2}L_2}{=} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -\sqrt{2} \\ 1 & 3 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 \to L_1 - 4L_2 \\ L_3 \to L_3 + \sqrt{2}L_2}}{=} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -10 & -5\sqrt{2} \\ 1 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 5\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 \to -\frac{1}{10}L_1 \\ L_3 \to \frac{1}{5\sqrt{2}}L_3}}{=} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{=} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-2} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$$

$$E_3 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 1 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_1 \to -L_1$
$L_2 \to L_2 + 2L_1$
$L_3 \to L_3 - \sqrt{2}L_1$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_6 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -5 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 2 & -\frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$L_2 \to \frac{1}{2}L_2$
$L_3 \to \frac{1}{\sqrt{2}}L_3$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3\sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -3/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$L_1 \to L_1 + 4L_2$
$L_3 \to L_3 + L_2$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -3/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

On a alors $P^{-1} M P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = {}^tP\, M\, P$

par $P = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 1/\sqrt{12} \\ -1/2 & 0 & 3/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, les colonnes de P forment une base q-orthogonale, qui est orthonormée par le produit scalaire usuel