TD3

Exo 8

formules de linéarisation

$$\begin{cases} \cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ \sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\ \sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b)) \end{cases}$$

Soient $m, n \in \mathbb{N}$.

- $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x))\,dx \quad (*)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\pi} (\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x))\,dx$$
(on a utilisé le fait que cos est paire, et que les bornes d'intégration sont opposées)

Si $m=n=0$, l'intégrale est très facile, elle vaut $\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi$.
Sinon $m+n \neq 0$, et pour trouver une primitive dans $(*)$ il faut distinguer les cas $\underset{(m=n)}{m-n=0}$ ou $\underset{(m\neq n)}{m-n\neq 0}$.

Si $m \neq n$, $(*) = \left[\frac{\sin((m+n)x)}{m+n} + \frac{\sin((m-n)x)}{m-n}\right]_0^{\pi} = 0$
car $\sin(k\pi)=0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Si $m=n\neq 0$, $(*) = \int_0^{\pi} (\cos(2mx)+1)\,dx = \left[\frac{\sin(2mx)}{2m} + x\right]_0^{\pi} = \pi$

- $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin((m+n)x) + \sin((n-m)x))\,dx = 0$$
car on intègre une fonction impaire entre des bornes opposées.

- $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((m+n)x) - \cos((m-n)x))\,dx$$
$$= \int_0^{\pi} (\cos((m+n)x) - \cos((m-n)x))\,dx \quad (**)$$

On suppose $m, n > 0$ (sinon l'intégrale est nulle).
Si $m=n$, on a $(**) = \int_0^{\pi} (\cos(2mx) - 1)\,dx = \left[\frac{\sin(2mx)}{2m} - x\right]_0^{\pi}$
$= \pi$

Si $m\neq n$, $(**) = \left[\frac{\sin((m+n)x)}{m+n} - \frac{\sin((m-n)x)}{m-n}\right]_0^{\pi} = 0$.

Ces calculs traitent les questions 1 et 2.

3). on note $f_0 = 1$, $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \cos(2x)$
$g_1(x) = \sin x$, $g_2(x) = \sin(2x)$.
et $f(x) = x$.
Si $W = \mathrm{Vect}\{f_0, f_1, f_2, g_1, g_2\}$, on vient de voir que f_0, f_1, f_2, g_1, g_2 est une famille orthogonale pour le produit scalaire usuel sur $C^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$.
Une base orthonormée est donnée par

$$\frac{f_0}{\|f_0\|} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{(attention au 2)}}, \quad \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{f_1}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{f_2}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{g_1}{\|g_1\|} = \frac{g_1}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{g_2}{\sqrt{\pi}}.$$

donc

$$\pi_W(f) = \left\langle f, \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} + \left\langle f, \frac{f_1}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \frac{f_1}{\sqrt{\pi}} + \left\langle f, \frac{f_2}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \frac{f_2}{\sqrt{\pi}}$$
$$+ \left\langle f, \frac{g_1}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \frac{g_1}{\sqrt{\pi}} + \left\langle f, \frac{g_2}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \frac{g_2}{\sqrt{\pi}}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\langle f, f_0\rangle f_0 + \frac{1}{\pi}\langle f, f_1\rangle f_1 + \frac{1}{\pi}\langle f, f_2\rangle f_2$$
$$+ \frac{1}{\pi}\langle f, g_1\rangle g_1 + \frac{1}{\pi}\langle f, g_2\rangle g_2.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\langle f, f_k\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}}_{\text{bornes opposées}} \underbrace{x\cos(kx)}_{\text{fonction impaire}}\,dx = 0.$$

et pour $k > 0$,

$$\langle f, g_k\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{\sin(kx)}_{v'}\,dx \underset{\uparrow}{=} 2\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{\sin(kx)}_{v'}\,dx$$

par symétrie, $x\sin(kx)$ est paire et on intègre entre des bornes opposées.

$$\underset{\uparrow}{=} 2\left\{ -\int_0^{\pi}\left(1\cdot\frac{(-\cos(kx))}{k}\right)dx + \left[x\cdot\frac{(-\cos(kx))}{k}\right]_0^{\pi} \right\}$$

intégration par parties
$\int_a^b uv' = -\int_a^b u'v + [uv]_a^b$

$$= 2\left\{ -\cancel{\left[\frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}}^{\,0} - \frac{\pi\cos(k\pi)}{k} \right\}$$

$$= 2\,\frac{\pi}{k}(-1)^{k+1}$$

(noter que comme $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } k \text{ est impair}\end{cases}$)

$$\boxed{\pi_W(f) = 2g_1 - g_2}$$ càd $\pi_W(f)(x) = 2\sin x - \sin 2x$.