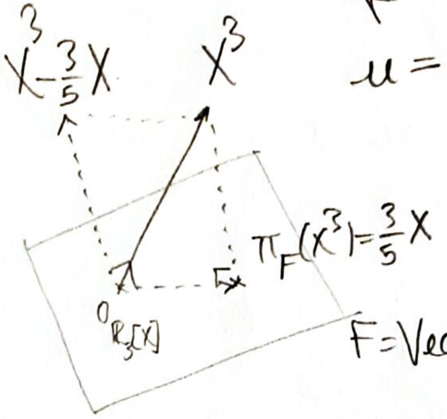
Equations définissant F ?

on cherche un vecteur non nul orthogonal à F, on peut prendre



$u = v - \pi_F(v) = X^3 - \frac{3}{5}X.$

$F = \mathrm{Vect}\{1, X, X^2\}$

Alors par le même raisonnement que dans les deux exos précédents, on a $F = (\mathrm{Vect}\{u\})^{\perp}$, càd.

$$F = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \phi(P, X^3 - \tfrac{3}{5}X) = 0 \}$$

↳ ceci est une équation pour F.

4) $v_1 = 1$ → v_1, v_2, v_3 est ϕ-orthonormée

$v_2 = \sqrt{12}\,\cancel{\frac{1}{\sqrt{12}}}\,(X - \frac{1}{2})$

$v_3 = \sqrt{180}\,\cancel{\frac{1}{\sqrt{180}}}\,(X^2 - X + \frac{1}{6})$

$\pi_F(v) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{5}X + \frac{1}{20}$

$$F = (\mathrm{Vect}\{v - \pi_F(v)\})^{\perp}$$
$$= \mathrm{Vect}\{(X^3 - \tfrac{3}{2}X^2 + \tfrac{3}{5}X - \tfrac{1}{20})\}^{\perp}$$

5) $\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\phi(\tilde{v}_1, \tilde{v}_1) = 3$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\phi\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)}{\phi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{-1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\phi(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) = \frac{8}{3}$

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$v_2 = \sqrt{\frac{3}{8}}\begin{pmatrix}1/3\\1\\0\end{pmatrix}$

$\phi(v, \tilde{v}_1) = \phi(v, \tilde{v}_2) = 0$

donc $\pi_F(V) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, et $F = (\mathrm{Vect}\{v\})^{\perp}$

5) Pour les calculs, il peut être pratique d'utiliser la matrice de ϕ dans la base canonique :

$$\phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}3&-1&0\\-1&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}.$$

Pour faire Gram-Schmidt, on pose

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \phi(\tilde{v}_1,\tilde{v}_1) = 3$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\phi\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)}{\phi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{-1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\phi(\tilde{v}_2,\tilde{v}_2) = \frac{1}{9}\phi\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{9}(1\ 3\ 0)\begin{pmatrix}3&-1&0\\-1&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}(0\ 8\ 0)\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} = \frac{8}{3}$$

Pour obtenir une base ϕ-orthonormée, on normalise (en utilisant la forme quadratique q_ϕ), càd.

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\phi(\tilde{v}_1,\tilde{v}_1)}}\tilde{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\phi(\tilde{v}_2,\tilde{v}_2)}}\tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}}}\begin{pmatrix}1/3\\1\\0\end{pmatrix}$$

Vue la forme de la matrice de ϕ dans la base canonique et le fait que $v = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $F = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, on a $\phi(v,\tilde{v}_1) = \phi(v,\tilde{v}_2) = 0$

càd. v est ϕ-orthogonal à F.

Donc $\pi_F(v) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, et $F = \{\mathrm{Vect}(v)\}^{\perp_\phi}$

càd $F = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 0\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = 0\right\}.$