Exo 4 • $\tilde{f}_1 = e_1 \qquad \|\tilde{f}_1\|^2 = 3 \qquad f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

• $\tilde{f}_2 = e_2 - \langle e_2, f_1\rangle f_1 = e_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\langle e_2, e_1\rangle\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$f_2 = \frac{\tilde{f}_2}{\|\tilde{f}_2\|} = \frac{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

• $\tilde{f}_3 = e_3 - \langle e_3, f_1\rangle f_1 - \langle e_3, f_2\rangle f_2$

$$\langle e_3, f_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\langle e_3, f_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\tilde{f}_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-1/3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\|\tilde{f}_3\|^2 = 2$

d'où $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

La base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ obtenue par Gram-Schmidt est

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Remarques: ① par les calculs, il est souvent plus pratique de ne normaliser les vecteurs qu'à la fin :

$$\tilde{f}_1 = e_1$$

$$\tilde{f}_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, \tilde{f}_1\rangle}{\langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_1\rangle}\tilde{f}_1$$

$$\tilde{f}_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, \tilde{f}_1\rangle}{\langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_1\rangle}\tilde{f}_1 - \frac{\langle e_3, \tilde{f}_2\rangle}{\langle \tilde{f}_2, \tilde{f}_2\rangle}\tilde{f}_2$$

(pas d'extraction de racine dans les calculs d'une base orthogonale)

et on calcule ensuite $f_j = \frac{\tilde{f}_j}{\|\tilde{f}_j\|}$.

② Dans la phase de normalisation, il est parfois pratique de remplacer $\tilde{f}_j$ par un multiple $\lambda_j \tilde{f}_j$ avec $\lambda_j > 0$. noter que alors

$$\frac{\lambda_j \tilde{f}_j}{\|\lambda_j \tilde{f}_j\|} \underset{\substack{\text{propriété}\\ \text{de la}\\ \text{norme}}}{=} \frac{\lambda_j \tilde{f}_j}{|\lambda_j|\,\|\tilde{f}_j\|} \underset{\text{car } \lambda_j > 0}{=} \frac{\lambda_j \tilde{f}_j}{\lambda_j \|\tilde{f}_j\|} = \frac{\tilde{f}_j}{\|\tilde{f}_j\|}$$

(Ceci permet de se débarrasser de beaucoup de dénominateurs)

On refait l'exo en utilisant ces remarques:

$$\tilde{f}_1 = e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad \langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_1\rangle = 3 \quad , \quad \langle e_2, \tilde{f}_1\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = -1$$

$$\tilde{f}_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, \tilde{f}_1\rangle}{\langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_1\rangle}\tilde{f}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, \tilde{f}_1\rangle}{\langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_1\rangle}\tilde{f}_1 - \frac{\langle e_3, \tilde{f}_2\rangle}{\langle \tilde{f}_2, \tilde{f}_2\rangle}\tilde{f}_2$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{2}{6}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Exo 5

1) $\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_1 \rangle = 2$, $\|\tilde{e}_1\| = \sqrt{\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_1 \rangle} = \sqrt{2}$

$$\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On observe que $\langle v, e_1 \rangle = \langle v, e_2 \rangle = 0$, donc v est orthogonal à $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2\} = F$

On note $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \langle \mathcal{F} \rangle$

F droit $\quad$ F ronde

Donc $\pi_F(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(rappel: $\pi_F(v)$ est l'unique vecteur $w \in F$ tel que $(v - w) \in F^\perp$; si $v \in F^\perp$, $w = 0_F = 0_{\mathbb{R}^3}$ convient).

Equations définissant F ?

Noter que $F = (\mathrm{Vect}\{v\})^\perp$. (*)

en effet: • il est clair que $F \subset (\mathrm{Vect}\{v\})^\perp$

(puisque v est orthogonal à e_1 et à e_2, donc aussi à toute combinaison linéaire $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\langle v, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \rangle = \lambda_1 \langle v, e_1 \rangle + \lambda_2 \langle v, e_2 \rangle$
$= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$)

• $(\mathrm{Vect}\{v\})^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$

est de dimension $2 = \dim F$ donc on a l'égalité (*)

enfin on obtient $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \right\}$

c-à-d. F est l'ensemble des solutions de l'équation $x+y+z=0$.

2) $\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_1 \rangle = 2$, $\|\tilde{e}_1\| = \sqrt{\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_1 \rangle} = \sqrt{2}$

$$\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 2/5 \\ 4/5 \\ 6/5 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

base orthonormée de F:

$$e_1 = \frac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_F(v) = \frac{\langle v, \tilde{e}_1 \rangle}{\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_1 \rangle} \tilde{e}_1 + \frac{\langle v, \tilde{e}_2 \rangle}{\langle \tilde{e}_2, \tilde{e}_2 \rangle} \tilde{e}_2 + \frac{\langle v, \tilde{e}_3 \rangle}{\langle \tilde{e}_3, \tilde{e}_3 \rangle} \tilde{e}_3$$

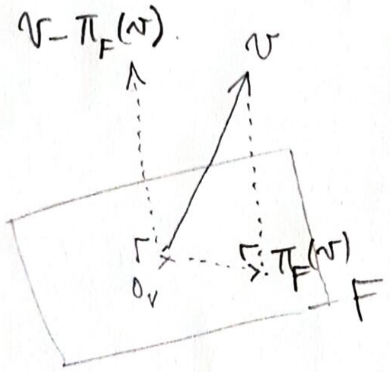
$$= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{15} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Equations pour F? On cherche un vecteur (non nul) qui est orthogonal à F.

Par définition de la projection orthogonale, on peut prendre

$$v - \pi_F(v) \quad \text{(tant que ce vecteur est non nul)}$$



Ici $v - \pi_F(v) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2/3\\4/3\\2/3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\1/3\\0\end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Donc $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \in F^{\perp}$.

De manière équivalente,

$$F \subset \left(\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right)^{\perp}$$

et par raison de dimensions, cette inclusion est une égalité, càd.

$$F = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

3) remarque préliminaire : ϕ est bien un produit scalaire (on a vu que la formule $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ définit un produit scalaire sur $V = C^0([-1,1],\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_3[X]$ peut être vu comme un sous-espace de V).

$\tilde{e}_1 = 1 \qquad \phi(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dX = 2$

$\tilde{e}_2 = X - \dfrac{\phi(X, \tilde{e}_1)}{\phi(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1)} \tilde{e}_1 = X \qquad , \phi(\tilde{e}_2, \tilde{e}_2) = \int_{-1}^{1} X \cdot X\, dX = 2\int_0^1 X^2\, dX$
$= \frac{2}{3}.$

car $\phi(X, \tilde{e}_1) = \phi(X, 1) = \int_{-1}^{1} X\, 1\, dX = 0$

$\tilde{e}_3 = X^2 - \dfrac{\phi(X^2, \tilde{e}_1)}{\phi(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1)} \tilde{e}_1 - \dfrac{\phi(X^2, \tilde{e}_2)}{\phi(\tilde{e}_2, \tilde{e}_2)} \tilde{e}_2$

$$= X^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2} 1 - 0 = X^2 - \frac{1}{3}$$

car $\phi(X^2, \tilde{e_1}) = \phi(X^2, 1) = \int_{-1}^{1} X^2 dx = \frac{2}{3}$

$\phi(X^2, \tilde{e_2}) = \phi(X^2, X) = \int_{-1}^{1} X^3 dx = 0$

(intégrale d'une fonction impaire entre des bornes opposées).

$$\phi(\tilde{e_3}, \tilde{e_3}) = \phi(X^2 - \tfrac{1}{3}, X^2 - \tfrac{1}{3})$$
$$= \|X^2 - \tfrac{1}{3}\|^2 = \|X^2\|^2 - 2\phi(X^2, \tfrac{1}{3}) + \|\tfrac{1}{3}\|^2$$

$$\|X^2\|^2 = \int_{-1}^{1} (X^2)^2 dX = 2\int_0^1 X^4 dx = \frac{2}{5}.$$

donc $\phi(\tilde{e_3}, \tilde{e_3}) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \cdot 2 = \frac{8}{45}$.

base orthonormée de F:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{e_1}, \underbrace{\sqrt{\frac{3}{2}} X}_{e_2}, \underbrace{\sqrt{\frac{45}{8}} (X^2 - \tfrac{1}{3})}_{e_3}$$

projection orthogonale de $v = X^3$ sur $F = \mathrm{Vect}\{1, X, X^2\}$?

noter que $\phi(v, e_1) = \phi(v, e_3) = 0$

(intégrale d'une fonction impaire entre des bornes opposées).

donc $\pi_F(v) = \phi(v, e_1) e_1 + \phi(v, e_2) e_2 + \phi(v, e_3) e_3$

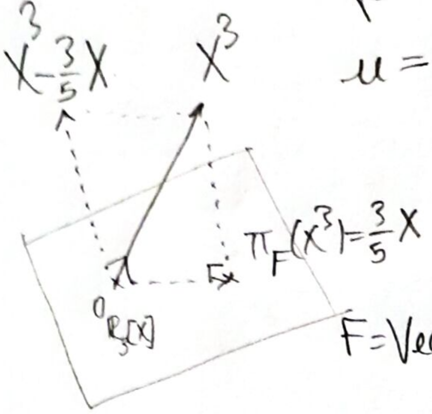
$= \phi(v, e_2) e_2$

$$\phi(\underset{X^3}{v}, \underset{\sqrt{\frac{3}{2}}X}{e_2}) = \int_{-1}^{1} X^3 \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}} X dX = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \int_{-1}^{1} X^4 dX$$
$$= \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot \tfrac{2}{5}.$$

donc $\pi_F(v) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} X = \frac{3}{5} X$

Equations définissant F ?

on cherche un vecteur non nul orthogonal à F, on peut prendre



$$u = v - \pi_F(v) = X^3 - \frac{3}{5}X.$$

$F = \text{Vect}\{1, X, X^2\}$

Alors par le même raisonnement que dans les deux exos précédents, on a

$$F = (\text{Vect}\{u\})^\perp, \text{ càd.}$$

$$F = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \phi(P, X^3 - \frac{3}{5}X) = 0 \}$$

↳ ceci est une équation pour F.