FEUILLE DE TD 3

Exo 1

1) $\phi\left(\binom{x}{y},\binom{x'}{y'}\right) = xx' + yy'$ (produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$)

la base canonique $e_1 = \binom{1}{0}$, $e_2 = \binom{0}{1}$ est ϕ-orthonormée

2) $\phi\left(\binom{x}{y},\binom{x'}{y'}\right) = xx' - yy'$

la base canonique $e_1 = \binom{1}{0}$, $e_2 = \binom{0}{1}$ est ϕ-orthogonale, mais il n'existe pas de base de $\mathbb{R}^2$ qui soit ϕ-orthonormée en d'autres termes, ϕ n'est pas un produit scalaire :

La forme quadratique associée

$q(x,y) = x^2 - y^2$ n'est pas positive,

$q(0,1) = -1 < 0$.

3) $\phi\left(\binom{x}{y},\binom{x'}{y'}\right) = xx' + xy' + yx' + yy'$.

forme quadratique associée :

$$q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

est de signature $(1,0)$, et $1 \neq 2 = \dim \mathbb{R}^2$, donc ϕ n'est pas un produit scalaire.

Noter que q est bien positive, $q(x,y) \geq 0$ pour tout x,y mais elle n'est pas définie positive, car

$q(x,y)$ peut être nul sans que (x,y) soit nul

par exemple

$q(1,-1) = 0$.

Comme pour toute forme bilinéaire symétrique, il existe une base ϕ-orthogonale. Pour en trouver une, on écrit

$$q(x,y) = (x+y)^2 + 0 \cdot L_2(x,y)^2$$

où $L_2(x,y)$ est une forme linéaire telle que $L_1(x,y) = x+y$ et L_2 sont indépendantes.

On peut prendre $L_2(x,y) = y$, par exemple.

Les nouvelles variables sont alors

$$\begin{cases} x' = x+y \\ y' = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' - y' \\ y = y' \end{cases}$$

$$\iff \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \binom{x'}{y'}$$

matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B} = \binom{1}{0}, \binom{-1}{1}$

la base $B=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est alors ϕ-orthogonale,
et la matrice de ϕ dans la base B est
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

4) $\phi\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right) = xx' + xy' + yx' - yy'$

$$q(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$$
$$= (x+y)^2 - 2y^2 = (x')^2 - 2(y')^2$$

où $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'-y' \\ y = y' \end{cases}$

$B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est ϕ-orthogonale
(et la matrice de la forme dans cette base est $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$)

il n'y a pas de base ϕ-orthonormée, et ϕ n'est pas un produit scalaire, car la forme quadratique associée n'est pas positive, par exemple $q(0,1) = -1$.

Exo 2

1) $\phi(P,Q) = \phi(Q,P)$ car $P(x)Q(x) = Q(x)P(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
(donc ϕ est symétrique)

si $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[x]$, $\phi(P_1+P_2, Q) = \int_0^1 e^x (P_1+P_2)(x)\, Q(x)\, dx$
$$= \int_0^1 e^x (P_1(x)+P_2(x))\, Q(x)\, dx$$
$$= \int_0^1 \left(e^x P_1(x)Q(x) + e^x P_2(x)Q(x)\right) dx$$
$$= \int_0^1 e^x P_1(x)Q(x)\,dx + \int_0^1 e^x P_2(x)Q(x)\,dx$$
$$= \phi(P_1, Q) + \phi(P_2, Q)$$

si $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\phi(\lambda P, Q) = \int_0^1 (\lambda P)(x)\, Q(x)\, dx$$
$$= \int_0^1 \lambda P(x)\, Q(x)\, dx$$
$$= \lambda \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx = \lambda\phi(P,Q)$$

donc ϕ est symétrique par rapport à sa 1ère variable

Par symétrie, elle est linéaire aussi par rapport à sa 2e variable

ϕ est donc une FBS. On regarde la forme quadratique associée, $q(P) = \int_0^1 e^x P(x)^2 dx \geq 0$

car $e^x P(x)^2 \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

de plus, si $q(P) = 0$, $\int_0^1 \underbrace{e^x P(x)^2}_{\text{fonction positive, continue}} dx = 0$

donc $e^x P(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$

Comme $e^x \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ceci donne $P(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$

càd P est un polynôme avec une infinité de racines, donc $P = 0$.

2) $q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$

$= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$

les formes linéaires $x_1 + x_2, x_2 - 2x_3, x_3$ sont indépendants car on a utilisé l'algorithme de Gauss.

Donc la signature de q est $(3,0) = (\dim \mathbb{R}^3, 0)$, càd il existe une base q-orthonormée de $\mathbb{R}^3$, donc ϕ = forme polaire de q est un produit scalaire.

3) $q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$

$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 10x_2x_3$

$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (x_3 + 5x_2)^2 - 25x_2^2 + 2x_2^2$

$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (x_3 + 5x_2)^2 - 23x_2^2$

q est de signature $(2,1)$, càd pas positive, donc la forme polaire ϕ de q n'est pas un produit scalaire