

PARTIEL DU 08/11/2021 (2H)

Ordinateurs et téléphones portables interdits.

Calculatrice autorisée. Feuille recto-verso A4 manuscrite autorisée.

Toutes les réponses doivent être justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice n° 1. (5 pts) On code des entiers en base 27 à l'aide de l'alphabet et du caractère "espace", selon la correspondance suivante : $_ = 0$, $A = 1$, $B = 2$, \dots , $Z = 26$. Par exemple, le code Q correspond à 17 en base 10, et le code AE correspond à $1 \times 27 + 5 = 32$ en base 10.

1. Dans quel intervalle se situe un entier dont le code en base 27 comprend exactement cinq caractères ?
2. Ecrire en base 10 l'entier dont le code en base 27 est BRAVO.
3. Coder en base 27 l'entier s'écrivant 10695 en base 10.
4. Comment pourrait-on facilement passer de la base 27 à la base 3 et inversement ? (On ne demande pas de l'appliquer sur les exemples précédents.)
5. Donner un critère de divisibilité par 9 pouvant se lire facilement sur l'écriture d'un entier en base 27.

Exercice n° 2. (5 pts)

1. Résoudre dans \mathbb{Z} le système de congruences suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x \equiv 1986 & [76] \\ x \equiv 1998 & [33] \end{cases}$$

2. La comète de Halley est observable tous les 76 ans, et a été observée pour la dernière fois en 1986. La comète de Tempel-Tuttle est observable tous les 33 ans, et a été observée pour la dernière fois en 1998.
 - a) Quel est le rapport entre ces deux comètes et le système (S) ?
 - b) Quelle est la prochaine année où ces deux comètes seront observables en même temps ?
 - c) La comète de Grigg-Skjellerup est observable tous les 5 ans. Quel est l'écart minimal entre deux années où nos trois comètes sont observables en même temps ?

Exercice n° 3. (5 pts) On se propose de calculer le reste dans la division euclidienne de 2021^{1321} par 21, de deux manières différentes. (Attention, les deux méthodes sont demandées!)

1. Méthode 1 : effectuer le calcul par exponentiation rapide.
2. Méthode 2.
 - a) Calculer $\varphi(21)$.
 - b) Sans calcul de puissances, que vaut $\overline{2021}^{\varphi(21)}$ dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$?
 - c) Conclusion.

Exercice n° 4. (3 pts)

1. Donner la liste des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.
2. Calculer l'inverse de $\bar{5}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.
3. Résoudre l'équation $\bar{5}\bar{x} = \bar{3}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

Exercice n° 5. (2 pts) Soient a et b des entiers.

1. Montrer que si un nombre premier p divise ab et $a + b$ alors il divise a et b (on rappelle le lemme d'Euclide : si un nombre premier divise un produit d'entiers alors il divise au moins l'un des facteurs).
2. En déduire que si a et b sont premiers entre eux alors ab et $a + b$ sont premiers entre eux.