

N.B. : Les exercices marqués par \heartsuit sont à faire en priorité, ceux marqués d'un \spadesuit sont plus difficiles.

Exercice 0, rappels de géométrie analytique, complexes et trigonométrie \heartsuit

- \heartsuit Déterminer la pente, le vecteur directeur et l'équation cartésienne de la tangente au graphe de $f(x) = x^2 - 1$ au point d'abscisse $x = 3$. Faire une représentation graphique.
- \heartsuit Donner le vecteur directeur de la tangente au cercle de centre $C(-1, -2)$ et de rayon 5 passant par le point $(2, 2)$, puis une équation paramétrique de cette tangente, puis une équation cartésienne. Faire une figure.
- \heartsuit Soit deux droites D et D' de pentes m et m' . Montrer que D et D' sont orthogonales si et seulement si $mm' = -1$.
- \heartsuit Soit $A(-1, 0)$ et $B(1, 0)$. Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 4$. Faire une figure.
- \heartsuit Tracer le cercle C d'équation cartésienne $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$. Donner une équation $y = f(x)$ du demi-cercle tel que $y > 2$. Vérifier que la tangente calculée en voyant le demi-cercle comme un graphe de fonction est bien orthogonale au rayon.
- Déterminer les images par la symétrie axiale d'axe d'équation $y = 2x$ de A , la droite AB et le cercle C définis ci-dessus.
- On considère les graphes F de e^x et G de e^{-x} , soient M et N les points de F et G d'abscisses $a \in \mathbb{R}$, et D et D' les tangentes en M et N . Que peut-on dire de ces 2 droites ? Soient P et Q les intersections avec l'axe des abscisses, déterminer la longueur PQ .
- \heartsuit Donner le module et l'argument de $1 + i$, $3 - 4i$, $-1 + \sqrt{3}i$. Représenter les points du plan d'affixe $2e^{i\pi/4}$, $\sqrt{3}e^{i\pi/6}$ et donner leurs coordonnées.
- Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes

$$z^2 + 2 = 0 \quad z^2 = 1 + i \quad z^2 + iz = 2 \quad z^2 + rz - \omega^2 = 0$$

- Suite géométrique dans \mathbb{C}
Soit u_n la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = qu_n$. Représentez les 10 premiers termes de la suite lorsque $q = 1 + i$, i , $(1 - i)/3$. Donner la représentation polaire de u_n en fonction de n et expliquez le graphique.
- Calculer $\int_0^\pi \sqrt{\cos(2x) + 1}$
- \heartsuit Linéariser $\sin(x)^4$ en utilisant $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$ puis en déterminer une primitive.
- Résoudre l'équation $\cos(3x) + 3\cos(x) = \sqrt{2}$ en utilisant $\cos(3x) = \Re((e^{ix})^3)$
- \heartsuit Représenter dans le plan complexe les points A et B d'affixe $1 + i$ et $2 - i$. Déterminer le lieu des points M équidistants de A et B . Déterminer le cercle de diamètre AB (affixe du centre et rayon).
- Soit r la rotation de centre l'origine, et d'angle $\pi/6$. Calculer les images des vecteurs de base d'affixe 1 et i en utilisant les nombres complexes. En déduire la matrice de r dans la base canonique. Faire le même calcul pour la rotation inverse et vérifier que les deux matrices sont inverses.
Soit $M(x, y)$ dans la base canonique, déterminer les coordonnées (X, Y) de M dans la base image de la base canonique par r .

Exercice 1. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $(1, 2)$ et perpendiculaire à la droite paramétrée $x(t) = x_0 + at$, $y(t) = y_0 + bt$. En donner une représentation paramétrique.

Soit D une droite de \mathbb{R}^2 donnée par l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$. Donner une infinité de paramétrages différents de D .

Exercice 2 \heartsuit Soit $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$. Déterminer le domaine de définition de f , des éventuelles symétries de la courbe, les asymptotes éventuelles, faire le tableau de variations de f , tracer la courbe et ses éléments remarquables.

Exercice 3. Montrer que le cercle défini comme la courbe paramétrée $t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t)$ n'est pas le graphe d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de réels. Donner un intervalle en t de taille maximal où elle l'est et tracer l'arc de courbe correspondant.

Déterminer une équation paramétrique de l'image du cercle trigonométrique par l'affinité de base Ox , de direction Oy et rapport r (écrasement vertical du cercle), on obtient une ellipse. Pour avoir une branche d'hyperbole changer les fonctions trigonométriques en fonctions trigonométriques hyperboliques. Tracer ces courbes pour $r = 0.5$. Donner une équation paramétrique de la parabole d'équation $x = y^2$ dans \mathbb{R}^2 , la tracer.

Exercice 4. ♡ Etudier les branches infinies de la courbe plane définie par :

$$t \mapsto \left(\frac{t^2}{t-1}, \frac{t}{t^2-1} \right)$$

Exercice 5 ♡ Soit la courbe plane Γ donnée par $f(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{t^2}{1+t}, \frac{t^3}{1+t} \right)$ où le paramètre t décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$. Déterminer les points singuliers de Γ et la tangente en ces points (bonus : déterminer la nature de ces points singuliers).
- Etudier les branches infinies de Γ (il y a une asymptote).
- Etudier la convexité de Γ (conseil : considérer les variations de $g(t) = y'(t)/x'(t)$).
- Dresser un tableau de variation commun de $x(t)$ et $y(t)$.
- Tracer la courbe Γ .

Exercice 6 ♡ Etude de L la courbe de Lissajous paramétrée par $x(t) = \sin t$ et $y(t) = \cos 3t$.

- Donner les symétries qui permettent de réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2]$.
- Dresser sur $[0, \pi/2]$ un tableau de variation commun de $x(t)$ et $y(t)$.
- Déterminer la tangente en L en $t = \pi/4$.
- A l'aide de tout ceci, tracer la courbe L .
- Préciser le tracé en étudiant sur $[0, \pi/2]$ la convexité de L .

Exercice 7. Soit la courbe plane paramétrée par $x(t) = t + \frac{1}{t}$, $y(t) = t - \frac{1}{t}$ pour $t > 0$. Montrer que, par changement de paramètre, cette courbe se transforme en $x(t) = 2\cosh(s)$, $y(t) = 2\sinh(s)$.

Exercice 8 ♠ : Soit la parabole P d'équation $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$. Déterminer le point d'intersection de la réflexion sur la parabole de rayons incidents verticaux dirigés vers le bas.

Exercice 9 ♡. Soit la courbe plane définie sur \mathbb{R} par $t \mapsto (3t^2 - 2t^3, 5t^4 - 4t^5)$. Déterminer les points singuliers de cette courbe et la tangente en ces points. Bonus : déterminer la nature de ces points singuliers.

Exercice 10. Soit l'astroïde A paramétrée par $x(t) = \frac{1}{4}(3 \cos t + \cos 3t)$, $y(t) = \frac{1}{4}(3 \sin t - \sin 3t)$

- Déterminer les points singuliers de A et la tangente à l'astroïde en ces points.
- Vérifier que la distance entre les points d'intersection de la tangente en un point régulier $M(t) \in A$ avec les axes est constante. En déduire une construction géométrique alternative de l'astroïde.

Exercice 11 ♡ Étude et tracé de la courbe plane d'équation polaire $r(\theta) = \cos 3\theta$.

Exercice 12. Etudier et tracer les courbes planes définies par :

1) $t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{2+t^3}{1+t^2} \right)$,

2) ♡ $r(\theta) = 1 + \frac{1}{\theta - \pi/4}$

3) (Rosace à trois boucles) $r(\theta) = \sin(3\theta)$.

Exercice 13. Soit C un cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1.

- Déterminer une équation polaire de C .
- Soit D une droite passant par l'origine qui coupe C en un point P . On construit sur D deux points M et N distincts tels que $d(P; M) = d(P; N) = a$, où a est un réel strictement positif fixé. Déterminer une équation polaire de l'ensemble Γ_a décrit par les points M et N si l'on varie D .
- Étudier et tracer Γ_1 .
- Déterminer, lorsque a décrit $]0; \infty[$, l'ensemble des points des courbes Γ_a dont la tangente est verticale.