

---

**Contrôle continu du 9 Novembre 2021**

*Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée. Calculatrices autorisées*

*Le barème est donné à titre indicatif.*

Durée 2h

---

*NB : dans les représentations graphiques, il faudra indiquer le sens de parcours, les tangentes remarquables (horizontales/verticales/points singuliers pour les courbes paramétrées, ou portées par  $\vec{e}_r/\vec{e}_\theta$  pour les courbes polaires) et quelques points remarquables (avec le  $t$  ou  $\theta$  associé).*

**Exercice 1** – [11 points]

Soit  $C$  la courbe du plan donnée par l'équation polaire  $\rho(\theta) = \cos(2\theta)/\sin(\theta)$ .

1. Donner le domaine de définition de la fonction  $\rho$  et réduire le domaine d'étude par des arguments de périodicité et de symétrie.
2. Faire le tableau de variation de la fonction  $\rho$  sur le domaine d'étude.
3. Montrer que la courbe  $C$  passe une fois par le point  $(0, 0)$  lorsque  $\theta$  varie entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .  
Quelle est alors la tangente à la courbe ?
4. Quelle est la tangente à la courbe  $C$  au point  $(0, -1)$  ?
5. Montrer que la courbe  $C$  admet une asymptote et en donner l'équation.
6. Étudier à l'aide de la calculatrice les changements de convexité de la courbe sur le domaine d'étude.

*(Indication : le calcul est plus simple si vous donnez une forme ne contenant que des  $\sin(x)$ ).*

7. Tracer la courbe  $C$ .

**Exercice 2** – [14 points]

On considère la courbe  $C$  paramétrée par  $\gamma : \left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + t \sin(t) \\ \sin(t) - t \cos(t) \end{pmatrix}$ .

1. Faire le tableau de variation pour  $t$  variant entre 0 et  $\frac{5\pi}{4}$ .
2. La courbe admet-elle un point singulier ? Si oui de quelle nature ?
3. Tracer la courbe pour  $t$  variant entre 0 et  $\frac{5\pi}{4}$ . Comment obtient-on la portion de courbe pour  $t$  variant entre  $-\frac{5\pi}{4}$  et 0 à partir de celle déjà tracée ? Compléter le dessin.
4. Quelle est la longueur de la courbe  $C$  ? Faire un calcul exact.

**T.S.V.P**

5. Pour un point de la courbe correspondant à un paramètre  $t$  positif donner le repère de Frenet, la courbure et le centre de courbure.
6. Quels sont les cercles osculateurs pour les points de paramètres  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$ ? Vérifier sur le dessin.
7. La courbe  $C$  admet-elle un changement de convexité (faire le calcul)?
8. On ferme la courbe par le segment  $[A; B]$  où  $A = \gamma(\frac{5\pi}{4})$  et  $B = \gamma(-\frac{5\pi}{4})$ . Quelle est l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe  $C$  et le segment  $[A; B]$ ? En chercher une valeur approchée à la calculatrice puis calculer la valeur exacte et vérifier. Comparer avec l'aire d'un disque de rayon 3.