

Dossier de Modélisation

Modèles proie-prédateur

Kévin TRIBUT

Yvan DURON

7 mai 2013

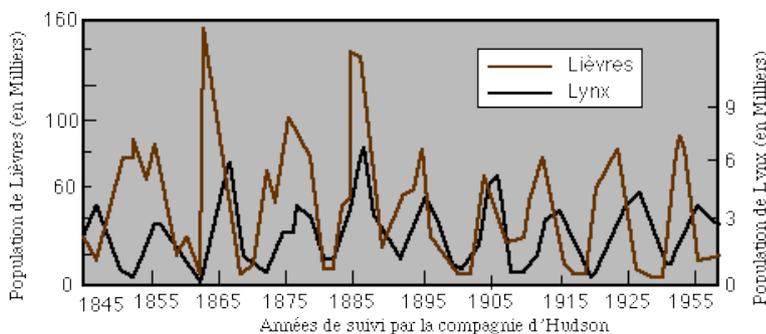
Table des matières

1	Présentation du modèle	1
1.1	Introduction	1
1.2	Existence et positivité des solutions	1
1.3	Périodicité	2
1.4	Points d'équilibres	2
2	Résolution numérique	3
2.1	Méthode d'Euler explicite	4
2.2	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4	4
2.3	Comparaison des deux méthodes de résolution	4
3	Influence de l'homme	6
4	Amélioration du modèle	6
5	Conclusion	8
6	Bibliographie	8

1 Présentation du modèle

1.1 Introduction

Quand des observations montrèrent que la proportion de poissons prédateurs augmentait quand la pêche diminuait, un mathématicien italien, Vito Volterra, conçut un modèle pour décrire le phénomène (peu après la première guerre mondiale). Ce modèle, désormais connu sous le nom d'équations de Lotka-Volterra, fait l'objet de notre exposé. Le modèle en question répond à une autre interrogation encore liée à des observations, faites au Canada.



Comme le montre le graphique ci-dessus, les populations de lynx et de lapins suivent des trajectoires globalement périodiques, l'une étant retardée par rapport à l'autre. Est-ce dû à la dynamique propre du système, ou bien est-ce provoqué par des causes externes ? Le modèle de Lotka-Volterra choisit la première solution.

Le modèle se présente ainsi :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t) \end{cases} \quad (\text{LV})$$

où x est une fonction représentant l'effectif de la population des proies à un instant donné, idem avec y pour les prédateurs, et a, b, c, d des réels strictement positifs.

Il est ainsi supposé qu'en l'absence de prédateurs, les proies voient leur population croître exponentiellement suivant une loi de Malthus, et qu'en l'absence de proies, les prédateurs meurent de faim suivant une loi de Malthus décroissante.

En outre, un terme dû à la prédation est ajouté dans l'équation des proies ainsi qu'un terme de reproduction dans l'équation des prédateurs, afin de modéliser les rencontres entre les deux espèces et leur évolution.

1.2 Existence et positivité des solutions

Du point de vue mathématique, le système obtenu est un système différentiel autonome non linéaire du premier ordre, couplé en x et y . Posons :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) & \mapsto (ax - bxy, cxy - dy) \end{cases}$$

F étant polynomiale en les coordonnées, elle est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 . Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure que pour toute condition initiale (t_0, x_0, y_0) , le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = F(t, x(t), y(t)) \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

admet une unique solution maximale.

Nous avons aussi un résultat plutôt rassurant :

Théorème (Positivité des solutions). *Soient x_0, y_0 des réels strictement positifs et t_0 un réel quelconque. Alors la solution du problème de Cauchy* $\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = F(t, x(t), y(t)) \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$ *vérifie pour tout réel t* $\begin{cases} x(t) > 0 \\ y(t) > 0 \end{cases}$.

Nous démontrons d'abord un lemme :

Lemme. *Dans chacun des cas suivants, la fonction (x, y) ainsi définie est l'unique solution au problème de Cauchy* $\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = F(t, x(t), y(t)) \\ (x(t_1), y(t_1)) = (x_1, y_1) \end{cases}$.

- (i) Si $x_1 = 0$ et si $y_1 = 0$ alors pour tout réel t , on définit $(x(t), y(t)) = (0, 0)$
- (ii) Si $x_1 = 0$ et si $y_1 > 0$ alors pour tout réel t , on définit $(x(t), y(t)) = (0, y_1 e^{-d(t-t_1)})$
- (iii) Si $x_1 > 0$ et si $y_1 = 0$ alors pour tout réel t , on définit $(x(t), y(t)) = (x_1 e^{a(t-t_1)}, 0)$

Démonstration du lemme. On vérifie facilement que les fonctions sont des solutions dans chaque cas et qu'elles vérifient les conditions initiales. L'unicité est donnée par le théorème de Cauchy Lipschitz – ces solutions sont d'ailleurs définies sur \mathbb{R} donc sont globales. \square

Démonstration du théorème. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe t_1 tel que $x(t_1) \leq 0$ ou $y(t_1) \leq 0$. Supposons plutôt qu'il existe t_1 tel que $x(t_1) = 0$ ou $y(t_1) = 0$ (i.e. une solution franchit l'axe (Ox) ou l'axe (Oy)). Si jamais nous obtenons une contradiction, la continuité des solutions empêchera leurs coordonnées de devenir négatives, sachant que les conditions initiales sont strictement positives.

- * Si $x(t_1) = 0$ et $y(t_1) = 0$, alors (x, y) vérifie le problème de Cauchy $\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = F(t, x(t), y(t)) \\ (x(t_1), y(t_1)) = (0, 0) \end{cases}$ donc d'après le lemme, $(x(t), y(t)) = (0, 0)$ pour tout réel t . Ceci est absurde car pour $t = t_0$, $x(t_0) > 0$.
- * Si $x(t_1) = 0$ et $y(t_1) > 0$, alors (x, y) vérifie le problème de Cauchy $\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = F(t, x(t), y(t)) \\ (x(t_1), y(t_1)) = (0, y_1) \end{cases}$ donc d'après le lemme, $(x(t), y(t)) = (0, y_1 e^{-d(t-t_1)})$ pour tout réel t . Ceci est à nouveau absurde, car on aurait $x(t_0) = 0 > 0$.
- * Le raisonnement est strictement le même pour le dernier cas : $x(t_1) > 0$ et $y(t_1) = 0$.

\square

1.3 Périodicité

Théorème (Périodicité des solutions). *Toute solution du système de Lotka-Volterra est périodique.*

La démonstration dépasse le cadre de cet exposé...

Remarque : ce résultat s'appelle parfois "Première loi de Volterra".

1.4 Points d'équilibres

Proposition. $(0, 0)$ et $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ sont les seuls points d'équilibre du système de Lotka-Volterra. Le premier est un point selle, donc instable, le second est un centre.

Démonstration. Soient des réels t, x_0, y_0, x, y .

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ est un point d'équilibre} &\Leftrightarrow F(t, x, y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(a - by) = 0 \quad \text{et} \quad y(cx - d) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \quad \text{ou} \quad (x, y) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$

Notons (x_0, y_0) un de ces points d'équilibre et linéarisons F au voisinage de (x_0, y_0) . La formule de Taylor donne $F(x, y) \sim DF_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0)$ où DF est la différentielle de F .

La matrice jacobienne de F est alors :

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a - by_0 & -bx_0 \\ cy_0 & cx_0 - d \end{pmatrix}$$

Si $(x_0, y_0) = (0, 0)$, les valeurs propres de J sont $a > 0$ et $-d < 0$, d'où le résultat.

Si $(x_0, y_0) = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$, le polynôme caractéristique de J est $X^2 + ad$, les valeurs propres de J sont donc imaginaires pures et opposées, donc $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ est un centre. \square

Remarque : le fait qu'on ait un point centre s'appelle parfois "Deuxième loi de Volterra".

Il est en fait possible de connaître la période des solutions au voisinage de $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$, comme le montre la proposition suivante :

Proposition. Au voisinage du point d'équilibre $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$, les solutions des équations de Lotka-Volterra sont périodiques de période $\frac{2\pi}{\sqrt{ad}}$ et s'écrivent sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = \lambda_1 \cos(\sqrt{ad} t) + \mu_1 \sin(\sqrt{ad} t) + \frac{d}{c} \\ y(t) = \lambda_2 \cos(\sqrt{ad} t) + \mu_2 \sin(\sqrt{ad} t) + \text{constante} \end{cases}$$

Démonstration. Matriciellement, le système de Lotka-Volterra au voisinage de $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ devient :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) - \frac{d}{c} \\ y(t) - \frac{a}{b} \end{pmatrix}$$

Il est donc possible de le résoudre par substitution. Ainsi en dérivant la première équation et en remplaçant $y'(t)$ par sa valeur d'après la deuxième équation, nous constatons que x vérifie l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$f'' + adf = \frac{ad^2}{c}$$

L'équation caractéristique a pour solutions $\pm i\sqrt{ad}$, donc l'équation homogène a pour solutions $t \mapsto \lambda \cos(\sqrt{ad} t) + \mu \sin(\sqrt{ad} t)$, avec λ et μ des constantes. Comme $\frac{d}{c}$ est une solution particulière, nous en déduisons la forme voulue pour x .

Nous en déduisons la forme de y sachant que

$$y'(t) = \frac{ac}{b} \left(x(t) - \frac{d}{c} \right) = \frac{ac}{b} \left(\lambda \cos(\sqrt{ad} t) + \mu \sin(\sqrt{ad} t) \right)$$

La période est donc la même pour x et y et vaut $\frac{2\pi}{\sqrt{ad}}$. \square

Voici un dernier résultat intéressant lié à la périodicité et au point d'équilibre $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$.

Théorème. Soit (x, y) une solution du système de Lotka-Volterra dont les composantes ne s'annulent pas. Si on note X la moyenne de x et Y celle de y sur une période T , Alors $(X, Y) = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$

Démonstration. Soit un réel t_0 . x, y ne s'annulant pas, nous pouvons écrire pour tout réel t :

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a - by(t) \quad \text{et} \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = cx(t) - d$$

Nous intégrons chaque équation de t_0 à $t_0 + T$, puis nous remarquons que : $\ln(x(t_0 + T)) - \ln(x(t_0)) = 0$ par périodicité de x , idem pour y , ce qui donne :

$$0 = aT - bTX \quad \text{et} \quad 0 = cTY - dT$$

d'où le résultat après simplification par T . \square

2 Résolution numérique

Comme les équations de Lotka-Volterra ne peuvent pas se résoudre analytiquement, nous nous sommes intéressés à leur discrétisation et à leur résolution numérique.

Comme nous l'avons déjà dit ces équations peuvent se concevoir comme une seule équation d'inconnue le couple $z(t) = (x(t), y(t))$. Ainsi, elles peuvent s'écrire sous la forme $z' = F(z)$, avec $z = (x, y)$ et $F : z = (x, y) \mapsto (ax - bxy, cxy - dy)$.

2.1 Méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler correspond à discrétiser l'équation différentielle $z' = F(z)$, puisque l'on remplace $z(t)$ par z_n et l'on approxime $z'(t)$ par $\frac{1}{h}(z_{n+1} - z_n)$.

Ainsi on calcule une suite de couples $(z_n) = (x_n, y_n)$ définie par récurrence de la façon suivante :

$$z_0 = (x_0, y_0) \quad z_{n+1} = z_n + h F(z_n)$$

où x_n correspond au nombre de proies à l'instant n , y_n au nombre de prédateurs à l'instant n , et h au pas choisi.

Voici comment on a procédé pour implémenter la méthode d'Euler dans le logiciel libre de calcul formel XCAS. On a défini la fonction à deux variables `F`, puis créer une fonction `methodeEuler` qui applique la méthode d'Euler. Cette dernière fonction reçoit en argument la fonction `F`, la condition initiale `Z0`, le pas `h` et le nombre d'itérations `N`; elle retourne les valeurs des termes de la suite (z_n) pour $n \in \{0, \dots, N\}$. En syntaxe XCAS :

```
----- Fonction F -----  
F(z) := [z[0]*(a-b*z[1]), z[1]*(c*z[0]-d)];
```

```
----- Fonction methodeEuler -----  
methodeEuler(F, Z0, h, N) := {  
  local Z, n;  
  Z := [Z0];  
  pour n de 0 jusque N faire  
    Z[n+1] := Z[n] + h*F(Z[n]);  
  ffaire;  
  return Z;  
};;
```

2.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 consiste à calculer la suite $(z_n) = (x_n, y_n)$ définie par récurrence de la manière suivante :

$$z_0 = (x_0, y_0) \quad z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

où $k_1 = F(t_n, y_n)$, $k_2 = F(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$, $k_3 = F(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$ et $k_4 = F(t_n + h, y_n + hk_3)$.

Voici l'implémentation que nous avons fait sur XCAS :

```
----- Fonction methodeRungeKutta -----  
methodeRungeKutta(F, Z0, h, N) := {  
  local Z, n, k1, k2, k3, k4;  
  Z := [Z0];  
  pour n de 0 jusque N faire  
    k1 := F(Z[n]);  
    k2 := F(Z[n]+h/2*k1);  
    k3 := F(Z[n]+h/2*k2);  
    k4 := F(Z[n]+h*k3);  
    Z[n+1] := Z[n] + h/6*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);  
  ffaire;  
  return Z;  
};;
```

2.3 Comparaison des deux méthodes de résolution

Nous avons commencé par utiliser la méthode d'Euler afin d'observer l'évolution des populations. Nous avons utilisé des valeurs pour x_0, y_0, a, b, c, d basées sur des données de la compagnie de la baie d'Hudson. Il semblait que

x et y étaient pseudo-périodiques et déphasées. Sur le portrait de phase (*i.e.* courbe représentant y en fonction de x), la courbe ressemblait plutôt à une spirale, ce qui signifiait qu'il y avait de plus en plus d'irrégularités dans ces pseudo-oscillations (ou au contraire de moins en moins). De plus le système était très sensible aux coefficients et aux conditions initiales. En outre la méthode d'Euler dans certains cas donnait après un certain nombre d'itérations des nombres négatifs ou des nombres immenses... En conclusion la méthode d'Euler se révélait particulièrement inefficace pour résoudre ce système d'équations différentielles couplées, car elle était particulièrement coûteuse (il fallait considérablement diminuer le pas et augmenter le nombre d'itérations).

En conséquence, nous avons cherché à implémenter une meilleure méthode de résolution numérique des équations différentielles, nous nous sommes tournés vers la méthode de Runge-Kutta (d'ordre 4). Avec cette méthode les fonctions x et y semblent bien périodiques, et le portrait de phase ressemble à un genre d'ellipse (et non à une sorte de spirale).

Nous avons également utilisé la fonction `plotode` de XCAS qui permet de représenter y en fonction de x (mais pas *a priori* y ou x en fonction de t). Les courbes ainsi obtenues sont semblables à celles obtenues avec la méthode de Runge-Kutta.

Pour illustrer ces propos voici les courbes que nous avons obtenu en prenant $a = 2$, $b = c = d = 1$, $h = 0,05$, $N = 500$. Avec la méthode d'Euler, voici ce que l'on obtient :

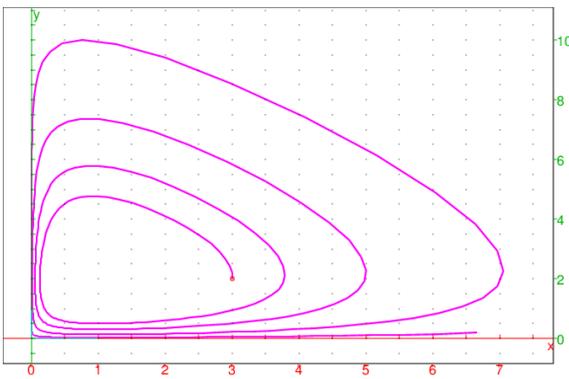


FIGURE 1 – Population des prédateurs en fonction des proies

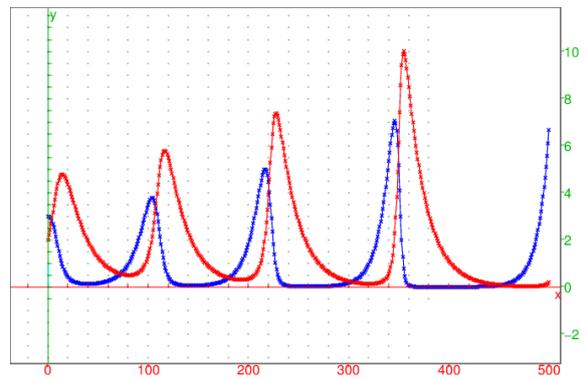


FIGURE 2 – Population des proies en bleu et des prédateurs en rouge au cours du temps

alors qu'avec la méthode de Runge-Kutta, cela donne :

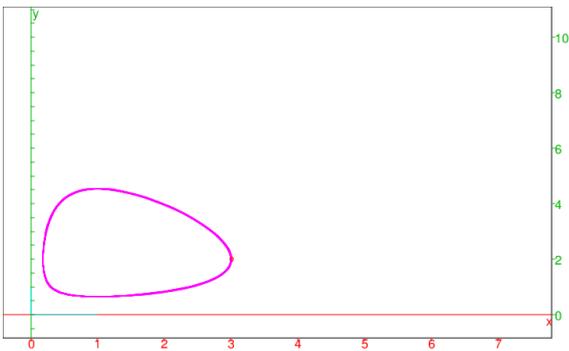


FIGURE 3 – Population des prédateurs en fonction des proies

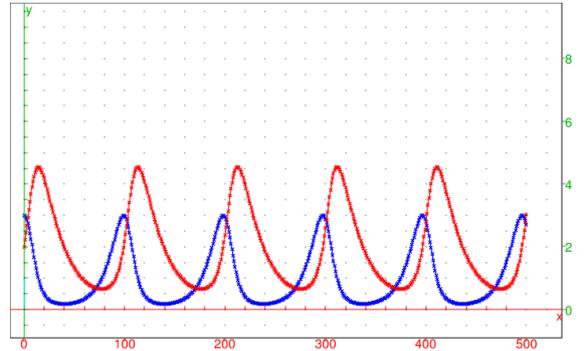


FIGURE 4 – Population des proies en bleu et des prédateurs en rouge au cours du temps

Tout ceci confirme bien la faiblesse de la méthode d'Euler dû à sa simplicité et *a contrario* la puissance de la méthode de Runge-Kutta (d'ordre 4).

Remarquons que $\frac{2\pi}{\sqrt{ad}} \approx 4,4$, par ailleurs on peut lire sur les figures 3 et 4 une période d'environ $5 = 100 \times 0,05$ (attention l'axe des abscisses ne correspond à t mais à ht).

Pour finir voici les portraits de phase pour différentes valeurs initiales :

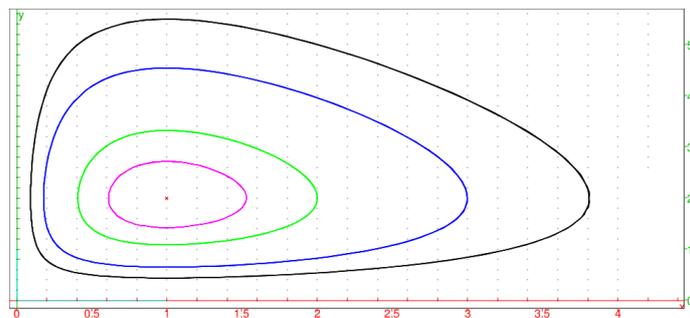


FIGURE 5 – y en fonction x pour différentes valeurs de (x_0, y_0)

3 Influence de l'homme

Étudions maintenant l'influence de l'homme sur l'évolution des proies et des prédateurs. Imaginons par exemple que les proies soient des insectes et les prédateurs des oiseaux. On utilise des pesticides afin de protéger les champs des insectes. Supposons que ce produit tue chaque année en moyenne une proportion e (avec $a > e \geq 0$) d'insectes et une proportion $f \geq 0$ d'oiseaux. On pourrait faire l'hypothèse que $e = f$ si le traitement éliminait autant les insectes que les oiseaux. De même si on suppose que le traitement tue exclusivement les insectes, on prendra $f = 0$.

On obtient le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy - ex \\ y' = cxy - dy - fy \end{cases}$$

qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy \\ y' = \gamma xy - \delta y \end{cases} \quad \text{où} \quad \alpha = a - e \quad \beta = b \quad \gamma = c \quad \delta = d + f$$

Il s'agit des équations de Lotka-Volterra avec des coefficients différents. Observons comment est déplacé le nombre moyen de proies et de prédateurs. Notons X_{avant} le nombre moyen de proies avant le traitement, et $X_{\text{après}}$ le nombre moyen de prédateurs après. *Mutatis mutandis* pour les prédateurs. On a donc :

$$X_{\text{après}} = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{d + f}{c} = X_{\text{avant}} + \frac{f}{c} \quad \text{et} \quad Y_{\text{après}} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a - e}{b} = Y_{\text{avant}} - \frac{e}{b}$$

En conséquence contrairement à l'effet souhaité, le nombre moyen de proies a augmenté, tandis que le nombre moyen de prédateurs a diminué. En d'autres termes les proies ont été favorisé au détriment des prédateurs. Ce résultat est parfois appelé "Troisième loi de Volterra". Ce phénomène a été observé en Amérique dans les années 1950 avec l'utilisation d'un insecticide (le DDT).

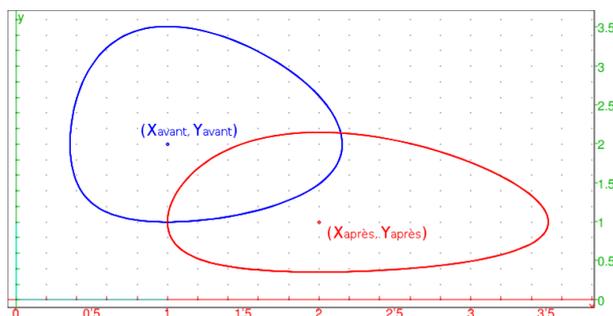


FIGURE 6 – Portraits de phase (en ordonnée l'effectif des prédateurs et en abscisse l'effectif des proies) avant le traitement en bleu, après en rouge

Remarquons que si le traitement éliminait exclusivement les insectes (*i.e.* $f = 0$), alors en moyenne le nombre d'insectes ne serait pas modifié par les pesticides, alors que les prédateurs auraient diminué !

En outre, si (x_0, y_0) est proche de $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$, alors les populations varient peu sans le traitement, alors qu'elles fluctueraient davantage après le traitement. Les pesticides (d'après ce modèle) peuvent créer des irrégularités sur les populations d'insectes et d'oiseaux.

Remarque : On aurait également pu imaginer que les proies étaient des sardines et les prédateurs des requins, et regarder de la même manière l'effet de la pêche sur ces populations.

4 Amélioration du modèle

Le modèle de Lotka-Volterra tire sa force de sa simplicité. Il permet de raisonner qualitativement mais n'est pas suffisamment sophistiqué pour faire des prévisions quantitatives. Une de ses limites est la croissance exponentielle des proies en l'absence de prédateurs. Cette hypothèse implique que la croissance de la population des prédateurs est d'autant plus forte que l'efficacité de la prédation est faible. En effet, la population moyenne de prédateurs est $\frac{a}{b}$ où b est le coefficient de prédation.

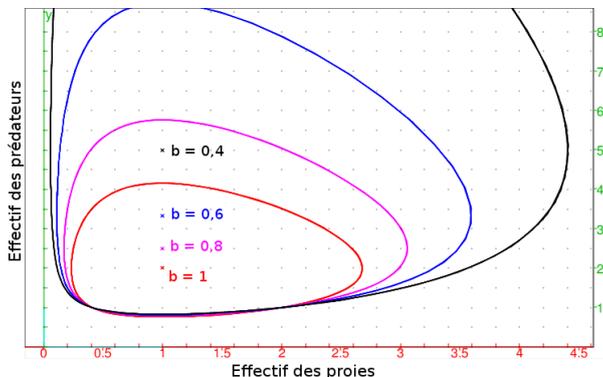


FIGURE 7 – Effectif des prédateurs en fonction de l'effectif des proies pour différentes valeurs de b ($x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $a = 2$, $c = d = 1$)

Il y a cependant un moyen d'éviter cette faiblesse, en limitant la croissance des proies. Nous supposons dans cette partie que les proies suivent une loi logistique. Les équations de Lotka-Volterra deviennent :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - kx^2(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t) \end{cases} \quad \text{où } k > 0$$

Bien entendu, ce système ne peut être résolu explicitement mais le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique tout aussi bien. La périodicité n'est cependant plus assurée.

Étudions les points d'équilibres. Posons $G : (x, y) \mapsto (ax - kx^2 - bxy, -dy + cxy)$. Soient des réels x et y .

$$\begin{aligned} G(x, y) = (0, 0) &\Leftrightarrow x(a - kx - by) = 0 \text{ et } -y(d - cx) = 0 \\ &\Leftrightarrow [x = 0 \text{ et } y = 0] \text{ ou } [a - kx - by = 0 \text{ et } y = 0] \text{ ou } [a - kx - by = 0 \text{ et } d - cx = 0] \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ ou } (x, y) = \left(\frac{a}{k}, 0\right) \text{ ou } (x, y) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} - \frac{kd}{bc}\right) \end{aligned}$$

D'où les trois positions d'équilibres.

Remarque : La troisième position d'équilibre a un sens physique uniquement si $k < \frac{ac}{d}$.

Proposition.

- $(0, 0)$ est un point selle donc instable.
- $(\frac{a}{k}, 0)$ est stable si $k > \frac{ac}{d}$, instable sinon.

Démonstration. Soit (x_0, y_0) une des trois positions d'équilibre. La jacobienne de G au point (x_0, y_0) est :

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a - 2kx_0 - by_0 & -bx_0 \\ cy_0 & -d + cx_0 \end{pmatrix}$$

- Ainsi, en $(0, 0)$, les valeurs propres sont réelles et opposées, d'où le point selle.
- En $(\frac{a}{k}, 0)$, la matrice est triangulaire, et les valeurs propres sont $-a < 0$ et $-d + \frac{ca}{k}$. Or $-d + \frac{ca}{k}$ est strictement négatif si et seulement si $k > \frac{ac}{d}$. Dans ce cas le point est stable. □

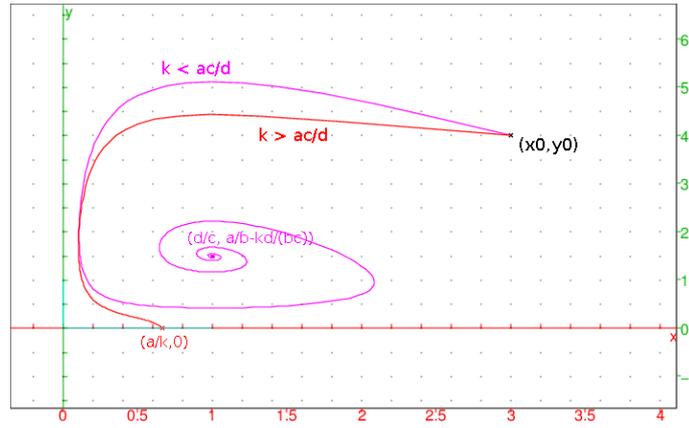


FIGURE 8 – Effectif des prédateurs en fonction de l’effectif des proies ($x_0 = 3$, $y_0 = 4$, $a = 2$, $c = d = 1$). Courbe en magenta : $k = 0,5$ et la courbe en rouge à $k = 3$

5 Conclusion

Le modèle de Lotka-Volterra est depuis peu dans le programme de spécialité de terminale S, sous sa forme discrétisée, dans le cadre des matrices et des suites. Il était donc utile pour nous d’explorer à la fois la théorie et la simulation sur ordinateur en lien avec ce modèle, pour éventuellement l’enseigner. Nous constatons que les élèves disposent de peu d’outils mathématiques, pour appréhender et assimiler un tel problème lié aux équations différentielles, absentes des programmes.... Heureusement, le modèle discrétisé conserve une certaine richesse - par exemple la possibilité de trouver des solutions au voisinage du point d’équilibre non nul, à l’aide d’une relation de récurrence et du calcul d’une puissance de matrice.

Il resterait maintenant à généraliser ce modèle à un nombre supérieur d’espèces, en introduisant par exemple un autre prédateur pour les anciennes proies et les prédateurs de ces proies... Il existe également des modèles (Dunbar, Yamaguti) qui prennent en compte le déplacement dans l’espace des proies et des prédateurs.

Ajoutons enfin que nous avons pensé chercher les paramètres du modèle de Lotka-Volterra optimaux, afin d’approcher au mieux les données expérimentales. Nous avons cependant dû reculer face à la tâche qui nous attendait.

6 Bibliographie

- Cours (chapitre 5) de l’UE MAT 127 (Université Joseph Fourier), 2009–2010, par Sylvestre Gallot
<http://dlst.ujf-grenoble.fr/data/cours/documents/MAT127-20100507175304.pdf>
<http://dlst.ujf-grenoble.fr/data/cours/documents/7-20110610122854.pdf>
- Document ressources de Terminale S spécialité Mathématiques
<http://goo.gl/WEvCb>
- TD “Ajustement au modèle de Lotka-Volterra” par J.R. Lobry
<http://pbil.univ-lyon1.fr/R/pdf/tdr4a.pdf>
- TD “Le modèle Prédateur-Proie” pour terminales sur I.M.E.L.
<http://www.crdp.ac-grenoble.fr/imel/delahaye/predateur/predateur.html>
- Articles “Équations de Lotka-Volterra”, “Méthodes de Runge-Kutta”, “Méthode d’Euler” sur Wikipédia
- *Essential Mathematical Biology*, par Nicholas G. Britton, 2005