

TP n°1

Il s'agit du premier TP avec XCAS, expérimenté dans une classe de terminale S, en septembre 2006, dès le début de l'année.

Etant données une fonction f et sa représentation graphique C dans un repère, on considère une valeur a de la variable x , en laquelle f est dérivable, et A le point de C , qui a pour abscisse a .

L'objectif est d'amener les élèves à comprendre comment est caractérisée la tangente à C au point A , parmi toutes les droites, qui passent par A (et qui ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées), ceci afin d'aboutir au développement limité d'ordre 1 de f en a (pour arriver au plus vite à la méthode d'Euler dans le TP n°2).

Pour ce faire, on étudie :

- d'une part, l'erreur commise quand, au voisinage de A , on remplace le point M , de coordonnées $(x ; f(x))$, par le point P , qui a la même abscisse que M et qui appartient à une droite quelconque, qui passe par A (non parallèle à l'axe des ordonnées) et qui n'est pas la tangente à C en A ;
- d'autre part l'erreur commise quand, au voisinage de A , on remplace le point M , de coordonnées $(x ; f(x))$, par le point H , qui a la même abscisse que M et qui appartient à la tangente à C en A .

Le logiciel permet de visualiser la tangente, mais aussi de voir que la droite quelconque d « tourne autour de A », en déplaçant un curseur, introduit par la définition du paramètre m pour le coefficient directeur de d . Il permet aussi de voir « bouger » les points M , H et P , qui se déplacent sur leur courbe respective, en actionnant un autre curseur dû à l'introduction du paramètre h tel que $h = x - a$.

Ces deux erreurs tendent vers 0, quand h tend vers 0, mais seule la seconde citée est négligeable devant h , quand h tend vers 0. En effet, le quotient par h de l'erreur commise avec la droite d (qui n'est pas la tangente) ne tend pas vers 0, quand h tend vers 0, alors que le quotient par h , de l'erreur commise avec la tangente, tend vers 0, quand h tend vers 0. C'est ce qui permet de caractériser la tangente comme la droite « qui épouse le mieux la courbe au point A », parmi toutes les droites qui passent par A .

Le calcul formel permet de contrôler les expressions obtenues et leur limite quand h tend vers 0. Les élèves doivent justifier les résultats obtenus : c'est l'occasion pour eux de retravailler les théorèmes sur les limites vus en classe de première et de lever des indéterminations en utilisant, par exemple, le taux d'accroissement.

Le TP propose l'étude de la fonction « cube », au voisinage de -1 , puis au voisinage de 3 , enfin au voisinage de a , nombre réel quelconque, puis l'étude de la fonction « racine carrée » au voisinage de 2 , puis au voisinage de tout nombre réel a strictement positif.

Les pages suivantes donnent l'énoncé fourni aux élèves.

TP n°1

Le compte-rendu de ce TP est à rendre le samedi 23 septembre.

Le logiciel utilisé est XCAS, qui se trouve dans « mathématiques », puis « calcul formel nouveau ». Il s'agit d'un logiciel libre, développé par M. Parisse, et l'IREM de Grenoble, qui peut être téléchargé à l'adresse suivante : www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html (ou chercher sur internet avec google (taper XCAS)).

L'objet de ce TP est double :

- prise en main de deux fonctionnalités du logiciel, calcul formel et graphique,
- étudier la fonction « cube » au voisinage de quelques points, graphiquement et par le calcul, et déterminer le développement limité d'ordre 1 de cette fonction en quelques valeurs, puis faire le même travail avec la fonction « racine carrée ».

Voici des instructions qui vont être utiles pour ce T.P et qui sont à retenir :

- Pour placer dans le repère le point M de coordonnées $(1, 3)$, par exemple, il suffit de taper dans la ligne de commande : « $M := \text{point}(1, 3)$ ».
- Pour saisir une fonction f qui, par exemple, à x associe x^3 , il suffit de taper « $f(x) := x^3$ ».
- Pour représenter graphiquement une fonction f et nommer C sa représentation graphique, il suffit de taper « $C := \text{plotfunc}(f(x), x)$ ».
- Pour tracer dans le repère la droite d , définie par une équation, comme par exemple, $y = 3x + 2$, il suffit de taper dans la ligne de commande : « $d := \text{droite}(y = 3x + 2)$ ».
- Pour déterminer la limite d'une fonction u de la variable h , quand h tend vers 0, il suffit de taper « $\text{limit}(u(h), h, 0)$ ».
- L'instruction « $\text{assume}(m=[1.5, 0, 2])$ » permet d'affecter la valeur 1,5 au paramètre m pour faire le dessin, tout en obligeant m à rester compris entre 0 et 2, mais les calculs ne tiennent pas compte de cette valeur et gardent la lettre m . La valeur de m peut être modifiée, pour le graphique, par déplacement du curseur qui apparaît à droite du graphique.
- Pour tracer un objet, nommé obj , en couleur, par exemple un point ou une droite, il suffit de taper « $\text{couleur}(obj, \text{rouge})$ » (l'objet est ainsi colorié en rouge).

On précisera les instructions exactes données au logiciel pour chacune des questions où il est utile. Dans toute la suite, h désigne un nombre réel quelconque non nul.

Partie 1 : la fonction « cube » au voisinage de quelques valeurs

On désigne par C la représentation graphique dans un repère de la fonction $f : x \mapsto x^3$.

1) La fonction « cube » au voisinage de -1

1. Quelle est la pente de C au point A d'abscisse -1 ?
2. Déterminer une équation de toute droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées (on désignera par m son coefficient directeur).
3. Parmi toutes les droites qui passent par A , il y en a une que l'on privilégie, c'est la tangente à C en A . On la note T . En donner une équation.
4. En utilisant XCAS :
 - a) Saisir f , tracer C , placer A , puis tracer en rouge T en utilisant l'équation qui vient d'être déterminée et contrôler en utilisant l'instruction « $\text{Tangent}(C, A)$ ». Rédiger les instructions utilisées et ce que l'on remarque.

- b) On note d une droite quelconque qui passe par A , mais qui n'est pas T . Saisir d . Mais le logiciel ne trace pas d car il ne sait pas quelle valeur donner à m . En utilisant l'instruction « assume », donner une valeur à m , puis tracer d en jaune. En déplaçant le curseur relatif à m , qui apparaît à droite de l'écran graphique, faire varier la valeur de m . Rédiger les instructions utilisées et ce que l'on remarque.
- c) En utilisant l'instruction assume, donner une valeur à h pour faire le dessin, puis placer :
- * le point M qui a pour abscisse $-1+h$ et qui appartient à C ,
 - * le point H , qui a pour abscisse $-1+h$ et qui appartient à T ,
 - * le point P , qui a pour abscisse $-1+h$ et qui appartient à d .
- Rédiger les instructions utilisées et dire ce que l'on remarque sur les positions relatives de M , H et P ?
- d) « L'erreur algébrique » commise quand on remplace M par H étant définie comme la différence entre l'ordonnée de M et l'ordonnée de H , soit $y_M - y_H$, l'écrire le plus simplement possible.
Quelle est sa limite quand h tend vers 0 (de quelle valeur est-elle infiniment proche quand h est infiniment petit) ?
Rédiger l'instruction utilisée, donner le résultat, puis le justifier dans le compte-rendu en précisant les théorèmes utilisés.
- e) « L'erreur algébrique » commise quand on remplace M par P étant définie comme la différence entre l'ordonnée de M et l'ordonnée de P , soit $y_M - y_P$, l'écrire le plus simplement possible.
Quelle est sa limite quand h tend vers 0 (de quelle valeur est-elle infiniment proche quand h est infiniment petit) ?
Rédiger l'instruction utilisée, donner le résultat, puis le justifier dans le compte-rendu en précisant les théorèmes utilisés.
5. Ces résultats obtenus en 4.d) et 4.e) permettent-ils de distinguer T , parmi toutes les droites qui passent par A ?
6. Sans, puis avec XCAS :
- a) Laquelle de ces deux erreurs est négligeable devant h quand h tend vers 0 ?
 - b) Rédiger quelle instruction donner à XCAS pour le vérifier.
7. Déduire de ce qui précède le développement limité d'ordre 1 de f en -1 .

2) La fonction « cube » au voisinage de 3

Reprendre la démarche précédente pour démontrer quelle est la droite qui épouse le mieux C au voisinage du point d'abscisse 3, ou encore quelle est la fonction affine qui approche le mieux f au voisinage de 3. Ecrire le développement limité d'ordre 1 de f en 3.

3) La fonction « cube » au voisinage de n'importe quelle valeur réelle a

Reprendre la démarche précédente pour démontrer quelle est la droite qui épouse le mieux C au voisinage du point d'abscisse a , ou encore quelle est la fonction affine qui approche le mieux f au voisinage de a . Ecrire le développement limité d'ordre 1 de f en a .

Partie 2 : la fonction « racine carrée » au voisinage de quelques valeurs

On désigne par C la représentation graphique dans un repère de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Reprendre la démarche précédente pour démontrer quelle est la droite qui épouse le mieux C au voisinage du point d'abscisse 2, ou encore quelle est la fonction affine qui approche le mieux f au voisinage de 2. Ecrire le développement limité d'ordre 1 de f en 2.
2. On désigne par a un nombre réel strictement positif quelconque. Démontrer quelle est la droite qui épouse le mieux C au voisinage du point d'abscisse a , ou encore quelle est la fonction affine qui approche le mieux f au voisinage de a . Ecrire le développement limité d'ordre 1 de f en a .

Bilan du TP 1

- Faire des calculs avec un objectif précis. Arranger ces calculs suivant ce que l'on veut utiliser.
- Un résultat obtenu avec a quelconque doit se vérifier avec des valeurs particulières de a . Sinon, c'est qu'il y a une erreur !

Etude de f , la fonction « racine carrée » au voisinage de tout nombre réel a strictement positif

- Pente de C au point d'abscisse a : $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$
- Equation de toute droite, qui passe par le point A , d'abscisse a , qui n'est pas « verticale » (elle a donc un coefficient directeur m): $y = mx + \sqrt{a} - ma$
Mais il y a aussi la droite qui a pour équation $x = a$, qui passe par A . Cependant celle-ci n'a pas de coefficient directeur.
- Equation de la tangente T à C au point A : $y = \frac{1}{2\sqrt{a}}x + \frac{\sqrt{a}}{2}$
- Voir que $m' \neq \frac{1}{2\sqrt{a}}$ car d est différente de T .
- Constaté que, quand m varie, d tourne autour du point A .
Constaté que, quand h varie (tout en restant différent de 0), les points M, H, P bougent sur une droite parallèle à l'axe des ordonnées, que, quand h est petit, ces trois points se rapprochent de A , et que leurs positions relatives varient.

- Etude du comportement des erreurs quand x tend vers a ou quand h tend vers 0, si l'on pose :
 $x = a + h$:

$$y_M - y_P = \sqrt{a+h} - (\sqrt{a} + mh)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{a+h} = \sqrt{a} \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} (\sqrt{a} + mh) = \sqrt{a}, \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} (y_M - y_P) = 0$$

$$y_M - y_H = \sqrt{a+h} - \left(\sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}h \right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}h \right) = \sqrt{a}, \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} (y_M - y_H) = 0$$

Ces résultats ne permettent pas de distinguer la tangente T de toute autre droite d .

- On prouve que seule $y_M - y_H$ est négligeable devant h , quand h tend vers 0, alors que $y_M - y_P$ ne l'est pas :

D'une part :

$$\frac{y_M - y_P}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - (\sqrt{a} + mh)}{h}$$

Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0, quand h tend vers 0 : on a une forme indéterminée.

$$\begin{aligned} \text{Or } \frac{y_M - y_P}{h} &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} - \frac{mh}{h} \\ &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} - m \end{aligned}$$

Le terme $\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$ est le taux d'accroissement de la fonction « racine carrée » entre a et

$a+h$; comme $a > 0$ et que la fonction « racine carrée » est dérivable en tout a strictement positif,

on sait que ce taux d'accroissement a pour limite le nombre-dérivé $\frac{1}{2\sqrt{a}}$, donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} (y_M - y_P) = \frac{1}{2\sqrt{a}} h, \text{ limite qui est différente de } 0.$$

D'autre part :

$$\frac{y_M - y_H}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \left(\sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}h\right)}{h}$$

Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0, quand h tend vers 0 : on a aussi une forme indéterminée

$$\begin{aligned} \text{Or } \frac{y_M - y_P}{h} &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{a}}h}{h} \\ &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

D'après ce que l'on vient de voir, la limite, quand h tend vers 0, de $\frac{y_M - y_H}{h}$ est nulle.

Donc seule l'erreur $y_M - y_H$ est négligeable devant h , quand h tend vers 0.

Pour prouver que $\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$ tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$, quand h tend vers 0 :

On a une forme indéterminée, puisque le numérateur et le dénominateur tendent vers 0. Pour lever l'indétermination, on multiplie le numérateur et le dénominateur par « l'expression conjuguée » du numérateur :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} &= \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{a+h - a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \end{aligned}$$

Le dénominateur tend vers $2\sqrt{a}$, quand h tend vers 0, d'où le résultat.