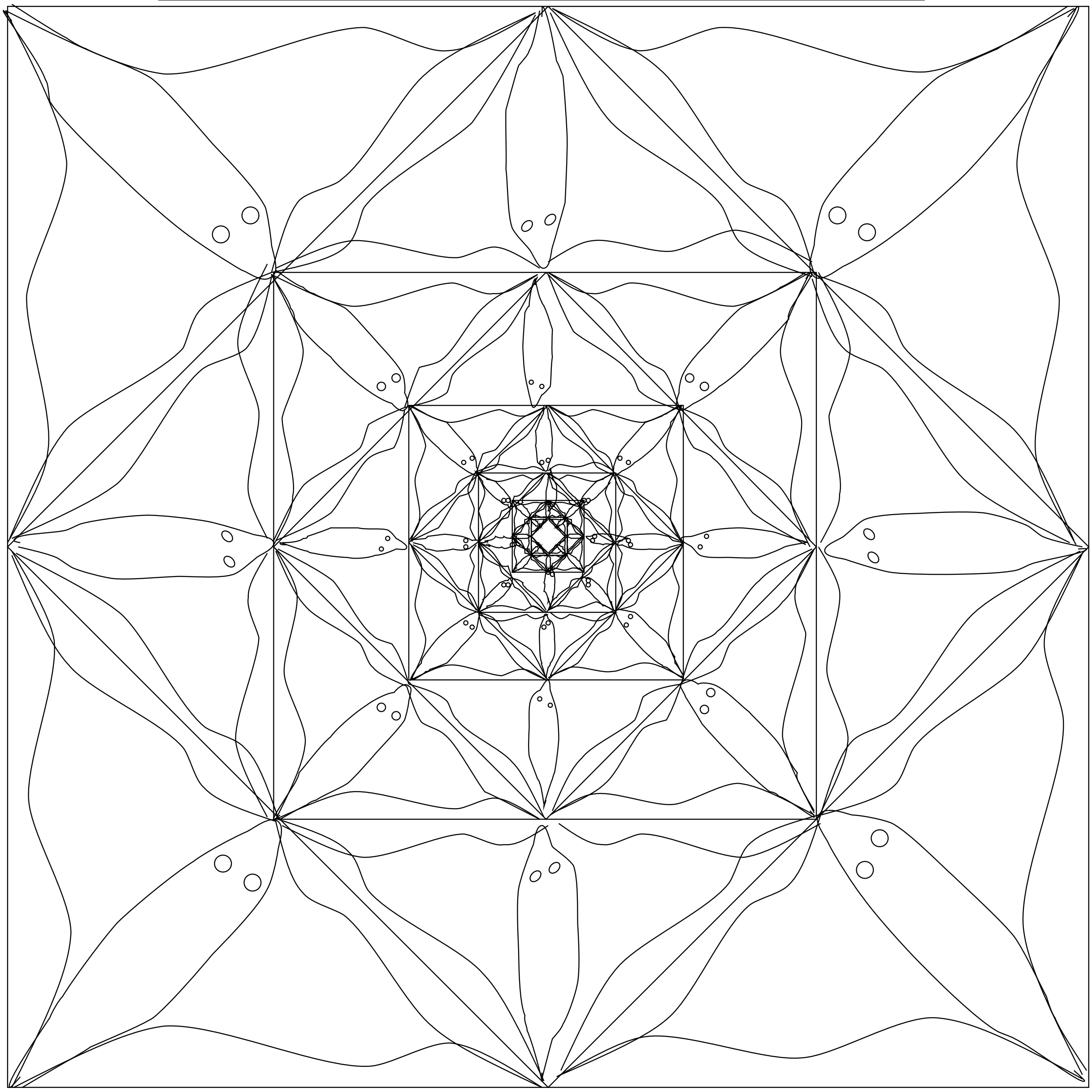
Cours de numération pour les Professeurs d' Ecole

par

Marcel Morales



Ceci est une ébauche de mon cours de numération pour les futurs professeurs d'école. Il vise à donner une cohérence aux systèmes de nombres, qui à mon avis apparaissent dans l'enseignement comme des ensembles qui n'ont rien à voir les uns avec les autres, les nombres apparaissant plutôt comme une écriture, un codage, bref des symboles qu'il faut manier avec précaution, d'où la difficulté de l'apprentissage des mathématiques et leur mystification. j'ai choisi de matérialiser l'ensemble des nombres réels par la droite graduée et ensuite construire à la règle et au compas les ensembles de nombres: les entiers naturels, les entiers relatifs, les nombres fractionnaires, puis finalement les racines carrées. Comme application de ce travail arrive l'écriture en base donnée d'un entier naturel puis l'introduction des nombres décimaux et l'arithmétique. Comme on peut voir les théorèmes de Thalès et Pythagore sont des outils précieux pour ma conceptualisation du nombre, de même que l'axiome d'Archimède qui fait souvent hérisser les cheveux mais qui pourtant est implicite dans tous les cours, alors pourquoi ne pas donner le pourquoi des choses et rester dans l'implicite.

Je voudrais aussi faire avancer l'idée qu'un cours de mathématiques à l'institution de formation des maîtres ne doit pas être simplement une transposition de celui que le maître fera ultérieurement dans sa classe. Le maître doit être conscient des difficultés des problèmes qu'il propose aux élèves et pas uniquement avoir des recettes qu'il applique à certaines situations; à ce propos je cite l'exemple suivant:

Dans presque tous les manuels de l'école élementaire le Théorème de THALÈS est implicite, la question est de savoir si un maître doit appliquer le Théorème de THALÈS sans le savoir et donc avec toutes les extrapolations possibles à des situations qui relèvent seulement du théorème de Thalès localement(exemple : la pression atmosphérique) ou après passage au logarithme (Exemple : taille d'un enfant à 1an, 2ans, 4ans).

A mon avis cette méthode permet également de reviser la géométrie dès le début de l'année.

Dans ces notes il manque l'historique, l'introduction et bien sûr les activités pédagogiques et didactiques qui l'accompagnent.

Université de Grenoble I et IUFM de Lyon
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
associé au C.N.R.S. ,U.R.A. 188
B.P 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex
(France)
E-mail : MORALES@FOURIER.GRENET.FR

IUFM de Lyon
5 rue Anselme
69317 Lyon

La Géométrie à l'aide de la Numération

Car rien...ce n'est pas rien!

La preuve c'est que l'on peut le soustraire!

Exemple :Rien moins rien = moins que rien!

Si l'on peut trouver moins que rien,

c'est que rien vaut déjà quelque chose!

On peut acheter quelque chose avec rien!

En le multipliant

Une fois rien... c'est rien

Deux fois rien... ce n'est pas beaucoup!

Mais trois fois rien!

Pour trois fois rien , on peut déjà acheter quelque chose et pour pas cher!

Raymond Devos

Parler pour ne rien dire

Introduction

Pour éviter toute ambiguité j'ai commencé mon cours par une discussion sur le nombre. Que est-ce un nombre? Il apparaît que pour presque tous les étudiants le nombre et sa répresentation sont la même chose autrement dit un nombre est pour eux un ensemble de chiffres, et pour certains à partir de deux chiffres seulement, peu d' étudiants parlent de quantité. Il est donc très important de donner une définition conceptuel du nombre : Le nombre est un être abstrait qui existe indépendament de nous et qui permet de désigner la quantité. Une autre difficulté est la représentation de l'ensemble des nombres, les entiers, les rationnels, les décimaux sont pour les étudiants des Univers différents et disjoints. Pour pouvoir saisir le nombre et le maîtriser comme outil il est indispensable d'avoir une bonne représentation. Celle-ci a pris des millénaires à s'élaborer et la notion de nombre telle qu'elle est présentée aujourd'hui dans nos écoles date seulement de la fin du siècle dernier. C'est pourquoi j'ai choisi de représenter les nombres sur la droite graduée, ils font partie du même Univers et leurs différences apparaîtront avec les opérations qu'on pourra éffectuer. Paradoxalement l'écriture décimale d'un nombre réel 'connué' par la plupart, souvent sous la forme d'un mélange de connaissances, peut aussi servir de support une fois clarifiée.

De la bande numérique aux entiers relatifs

En maternelle et en CP la comptine numérique et la bande numérique permettent à l'enfant de se familiariser et d'appréhender la notion de nombre, ainsi la plupart d'entre eux savent réciter la comptine au dela de vingt, mais malheuresement beaucoup le font de façon automatique sans marquer le rythme, je dirais sans marquer la bijection entre la comptine et un ensemble imaginaire qu'ils seraient en train de compter. A mon avis la comptine doit être récitée le plus consciemment possible et bien distinctement, autrement dit prendre son temps, elle n'est pas une course ni uniquement une affaire de mémoire.

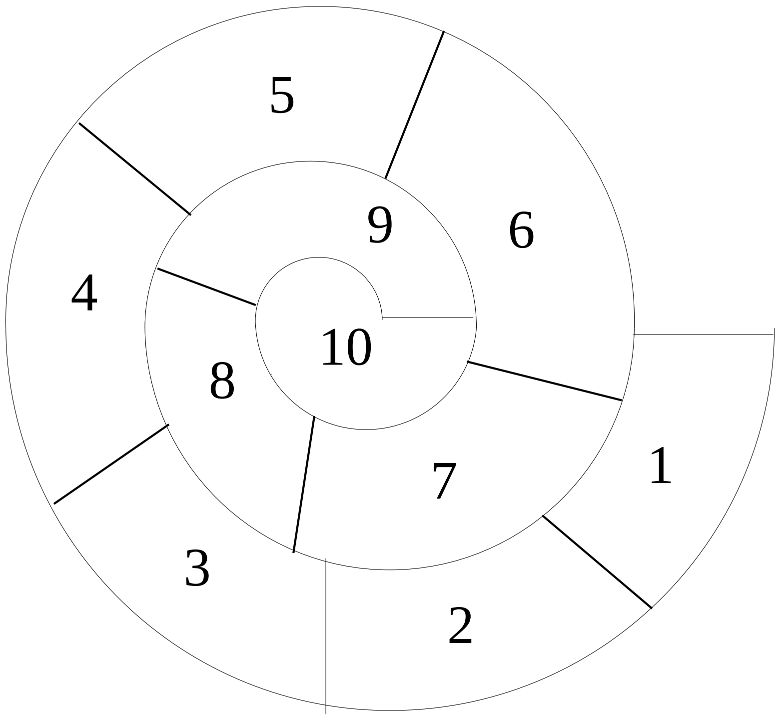
Commençons par écrire la bande numérique, qui sert de support en maternelle pour les comptines, les jeux d'oie et l'apprentissage du calendrier qui lui même rythme la vie scolaire

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Qui consiste en fait en un début de présentation de l'ensemble des entiers naturels (présentation qui sera complétée durant toute l'école primaire) ; ensemble qui sera noté **N** :

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, ...\}$$

Les nombres naturels peuvent également être représentés dans la cour d'une école par une marelle



Réposant sur l'apprentissage de la comptine numérique aparaissent plusieurs concepts, qui devront être approfondis par la suite.

ouvre les douas en même temps qu' moua et compte:

nain, deuil, toit, carte, sein, scie,

sexe, huître, oeuf et disque.

Avec les douas d' pied on peut aller de bronze à vin,

mais t'es trop soûl pour ça.

Raymond Queneau

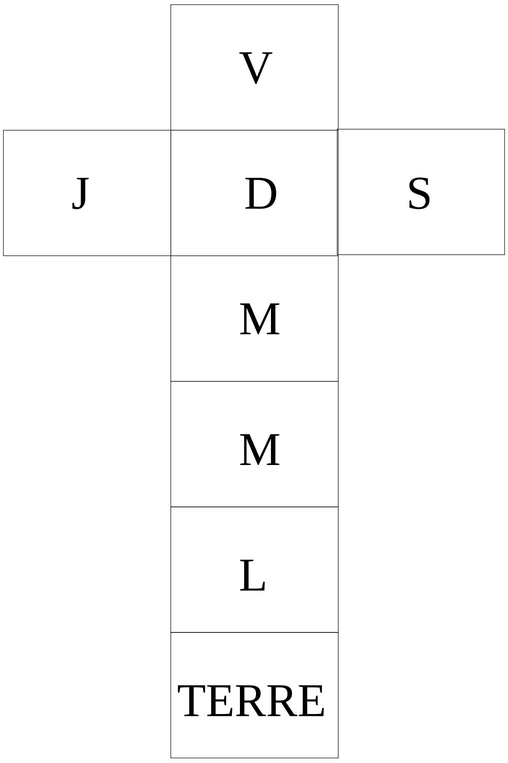
Le chiendent

Gallimard

Le nombre est un cardinal .

il sert à dénombrer des collections et réciproquement le problème de dénombrement des collections nous amène à approfondir nos connaissances des nombres, à introduire *des opérations, l'addition pour les tout petits, la multiplication pour les plus grands et des concepts comme la proportionalité pour estimer le nombre de grains dans un kilo de riz. et la géométrie pour placer les objets d'une collection dans un quadrillage.*

Le nombre est un ordinal . — *voir la comptine quand trois poules vont au champ... A ce propos une maîtresse de maternelle (classe de grands) a vu avec beaucoup de surprise ses élèves improviser dans cette comptine allant jusqu'à dix poules: la dixième suit la neuvième et reprendre la chanson à l'envers.*



Marelle de la semaine

Dans certaines langues (le grec, le portuguais), les jours de la semaine sont des ordinaux, le lundi :deuphtera (en grec), segunda feira (en portugais) qui veut dire le deuxième, mardi : triti (en grec), tercera feira (en portugais) qui veut dire le troisième, tetarti (en grec), quarta feira (en portugais),qui veut dire le quatrième, etc...

Notion discrète du nombre . — *le nombre change de un en un; d'unité en unité.*

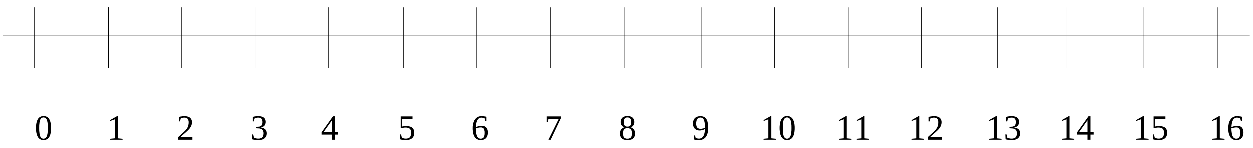
La notion de précédant et celle de suivant.

La notion d'ordre sous la forme :

- *plus grand que*
- *plus petit que*
- *autant que*
- *l'addition 2 + 3 signifie avancer à partir de 2 trois positions vers la droite.*
- *la soustraction 3 - 2 signifie reculer à partir de 3 deux positions vers la gauche*

- *la multiplication des petits nombres naturels : par 2, par 3*

On peut déjà représenter sur une droite les entiers naturels à l'aide d'une buchette, après avoir tracè une droite l'enfant choisit un point 0 et ensuite en plaçant la buchette il va placer les points 1, 2, etc...



Activités didactiques concernant la numération . — (voir entre autres Chemins de la découverte mathématique, Lise Tourtet, Cahiers de pédagogie moderne n. 64, Collection Bourrelier, Armand Collin):

- Représenter par exemple une classe en maternelle:

un petit carré: une table

un rond: une chaise

un rectangle: le bureau de la maîtresse

un coquillage: un garçon

un caillou: une fille

- Partager Grand N
- Classer

Les entiers relatifs.

Au niveau du collège avec l'usage intensif de la soustraction et surtout l'apparition de l'algèbre apparaissent les nombres négatifs, qui d'abord sont des objets (symboles mythiques) avec un signe et ont du mal à acceder au statut de nombre au même titre que les entiers naturels, un fait révélateur de ceci est que dans certains cours on voit faire la distinction entre +1 et 1, parler des nombres qui ont un signe et les nombres qui n'en ont pas.

Pour représenter les entiers relatifs en formation des futurs professeurs d'école on rajoute une bande numérique à gauche du zéro.

-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

C'est l'ensemble des entiers relatifs :

$$\mathbf{Z} = \{..., -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$$

Tout nombre naturel est un entier relatif. Nous remarquons que les notions et concepts introduits dans **N** s'appliquent à **Z** avec les définitions suivantes :

DEFINITION.

• *un nombre positif est un nombre qui se trouve à droite de 0*

• *un nombre négatif est un nombre qui se trouve à gauche de 0*

• *l'addition d'un nombre quelconque avec un nombre positif signifie aller vers la droite: -2+3 signifie place toi sur la case -2 et avance de 3 pas vers la droite, on se retrouve dans la case 1, en clair on a -2+3=1*

• *l'addition d'un nombre quelconque avec un nombre négatif signife aller vers la gauche -2+(-3) signifie place toi sur la case -2 et avance de trois cases vers la gauche on arrive sur la case -5, en clair on a -2-3=-5*

Cette facon de presénter l'addition (et en fait la soustraction) des nombres entiers relatifs apparait conceptuellement comme l'extension de l'adition des entiers naturels

LA MULTIPLICATION DES NOMBRES RELATIFS. — *est définie d'abord pour les entiers naturels à partir de l'addition puis s'effectue suivant la règle des signes : le produit de deux signes égaux donne +; et le produit de deux signes distincts donne -. Soient a et b deux entiers naturels alors*

$$a \times b = \underbrace{b + b + ... + b}_{a \text{ fois}}$$

Cela peut se représenter sur la droite graduée à l'aide d'un compas on prend la longueur de a et on reproduit cet écart b fois sur la droite graduée.

cette façon de présenter la multiplication a l'avantage d'être simple, rapide et directe, mais conceptuellement a le gros incovenient de confondre addition et multiplication, le maître et puis l'élève qui n'a pas assez de recul peut étendre cette idée aux nombres rationnels et décimaux et vouloir donner un sens additif à la multiplication et croyant avoir tout compris sur la multiplication des nombres (naturels, décimaux,...) ne comprennent pas pourquoi le maître se fatigue à introduire des techniques opératoires pour les décimaux, avec rupture de dialogue, le maître et l'élève nétant pas sur la même rubrique.

D'ailleurs cette façon de concevoir la multiplication (cette procédure) n'est pas très intéressante du point de vue opératif car elle sert pour la multiplication des petits nombres (et constitue étant une procédure experte qui marche bien pour des nombres petits une des grosses obstructions à la tecnique opératoire de la multiplication et aussi à sa conceptualisation pour l'utilisation dans de problèmes où intervient la multiplication en tant que telle.) Et il me semble que le maître gagnera à passer rapidement à l'apprentissage par coeur de la table de pythagore (une bonne partie de l'année doit lui être consacrée) et à executer des multiplications avec des nombres assez grands pour lesquels les éleves doivent abandonner la procédure additive. La conceptualisation doit aller de pair avec la technique, une table de pythagore apprise par coeur ne sert à rien si on n'a pas d'idée des problènes où l'on a besoin de la multiplication et réciproquement avoir en tête une bonne image de la multiplication ne permet pas de résoudre rapidement et éfficacement un problème.

Mon point de vue consisterait plutôt à introduire la multiplication de n par m à partir du rangement d'objets dans un tableau $n \times m$, par exemple calculer le nombre de bureaux dans une classe quand ceux-ci sont disposés régulièrement, le nombre de places dans un parking, le nombre de places dans un cinema,le nombre de carreaux pour carreler sa salle de bains,etc... Il me semble que celle-ci est l'idée de la multiplication qui devrait rester en images, et que plus tard laissera la place à l'aire d'un rectangle pour la multiplication de nombres décimaux.

N.B. On voit le même phénomène à l'Université avec les puissances d'un nombre : $2^2 = 2 \times 2; 2^3 = 2 \times 2 \times 2$, mais les étudiants à qui on a donné une définition précise de 2^x à partir du logarithme, ne comprennent pas où est la difficulté à calculer $2^{2,45}$ et demandent comment on doit faire pour multiplier 2,45 fois le nombre 2.

Division euclidienne.

Partons d'un énoncé:

" Paul aperçoit au loin Virginie, il se dirige vers elle le coeur serré, Virginie pleine de sentiments ambigus reste figée sur place ", faisons-en un problème mathématique

" Paul aperçoit Virginie à environ 200m, il se dirige vers elle, le coeur serré, d'un pas mesuré (environ 90cm), mais ferme, Virginie reste figée sur place, en combien de pas Paul atteindra Virginie?"

Un autre exemple:j'aperçois loin devant moi une patisserie, j'ai la certitude que en marchant droit vers elle je l'atteindrai.

solution du problème "Paul et Virginie":

Faisons la division de 20000 (cm) par 90 (cm)

$$20000 = 222 \times 90 + 22$$

C'est à dire au bout de 222 pas Paul est à 22 cm de Virginie, un pas de plus et Virginie sera à 68cm derrière lui.

Dans ces deux problèmes il y a la certitude qu'en marchant on va atteindre son but et même le dépasser. Mathématiquement cela se traduit de la façon suivante:

(Axiome d'Archimède) Soit b un nombre entier positif plus grand ou égal à 2.

Tout nombre naturel a se trouve entre deux multiples succesifs de b —

$$qb \leq a \leq (q+1)b$$

q étant un entier naturel plus grand ou égal à zéro.

Division euclidienne de a par b

Prenons maintenant deux entiers naturels a, b il existe deux entiers naturels q (le quotient) et r (le reste), uniques tels que

(*) $a = q \times b + r$ et $0 \leq r < b$

L'unicité signifie que si on arrive à écrire par certains moyens une relation (*) alors on a déterminé les entiers q et r.

Attention L'erreur de beaucoup d'étudiants est d'oublier la condition sur r : $0 \leq r < b$

Exemple : Juju a moins de 50 billes, il range se billes par 4, il lui en reste 2, il les range par 5 il lui en reste 2, combien de billes a Juju?

Soit a le nombre de billes de Juju, le problème se traduit par:

$a = 4q + 2$ et $a = 5q_1 + 2$,

et on déduit que $a - 2$ est un multiple de 4 et de 5, donc de 20. Les valeurs possibles pour a sont 2, 22, 42.

Prenons par exemple $a = 10275$ et $b = 74$, posons la division de 10275 par 74

$$\begin{array}{r|l}
1\ 0\ 2\ 7\ 5 & \ 7\ 4 \\ \cline{2-2}
7\ 4 & 1\ 3\ 8 \\ \cline{1-1}
2\ 8\ 7 & \\
2\ 2\ 2 & \\ \cline{1-1}
6\ 5\ 5 & \\
5\ 9\ 2 & \\ \cline{1-1}
6\ 3 &
\end{array}$$

Cette division entraîne que $138 \times 74 \leq 10275 < 138 \times 75$.

Mais plus précisement on peut résumer cette division par l'écriture

$$10275 = 138 \times 74 + 63,$$

c'est la division euclidienne de 10275 par 74, 138 est appelé le quotient et 63 le reste.

Examinons en détail l'algorithme de la potence

$102 = 1 \times 74 + 28$

$287 = 3 \times 74 + 22$

$655 = 8 \times 74 + 63$

la division euclidienne (**entre entiers**) s'arrête ici car $63 < 74$ et nous n'avons plud de nombreà "descendre". Il faut mettre cette division en opposition avec une division de nombres décimaux qui peut se continuer en ajoutant des zéros au dernier reste et mettant une virgule au quotient.

Cet examen va nous aider à résoudre les divisions à trous:

$$\begin{array}{r|l}
4\ 6\ 7 & \quad ? \\ \cline{2-2}
1\ 0\ 7 & ? \\
1\ 1 &
\end{array}$$

notons par q le quotient et par b le diviseur.

Nous avons les relations:

$b > 11$

$46 = x \times b + 10$ où x est le premier chiffre de q autrement dit $46 - 10 = 36$ est un multiple de b ou encore b est un diviseur de 36. Les diviseurs de 36 sont : 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36. comme $b > 11$ nous avons trois cas possibles pour b: $b = 12$ ou $b = 18$ ou $b = 36$

Continuons la division: $107 = y \times b + 11$ où y est le second chiffre de q. Nous en déduisons que $107 - 11 = 96$ est un multiple de b. Nous testons cette dernière affirmation pour chacune des valeurs possibles de b:

12 divise 96 mais 18 ne divise pas 96 et 36 ne divise pas non plus 96. Il y a une seule solution possible $b = 12$ et le quotient sera 38.

Prenons-en un deuxième exemple:

$$\begin{array}{r|l} 6\ 3 & \ \ ? \\ \cline{2-2} ? & 4 \end{array}$$

On nous indique que cette division se termine en un seul coup. Notons par r le reste et par b le diviseur. Notre division à trous s'écrira:

$$\begin{array}{r|l} 6\ 3 & \ \ b \\ \cline{2-2} r & 4 \end{array}$$

on a la relation $63 = 4 \times b + r$ et on doit aussi avoir $0 \leq r < b$.

D'abord $b \leq \dfrac{63}{4}$ donc $b \leq 15$

Nous avons plusieurs solutions possibles:

$63 = 4 \times 15 + 3$

$63 = 4 \times 14 + 7$

$63 = 4 \times 13 + 11$

Le cas suivant serait $63 = 4 \times 12 + 14$ dans laquelle le reste est plus grand que le diviseur, donc ce n'est pas une division euclidienne. En conclusion il y a trois réponses possibles.

Un dernier exemple:

$$\begin{array}{r|l} ? & \ \ ? \\ \cline{2-2} ? & 4\ 2 \\ 2\ \ 7 & \end{array}$$

Noton par a le dividende et b le diviseur alors on aura la relation:

$a = 42 \times b + 27$ avec $b > 27$. Donc tout entier $b > 27$ donnera une solution pour a.

Didactique: 1) Concours blanc Lyon 1995.

2) Nantes 1992.

3) Rouen 1992.

Les fractions ou nombres rationnels et la droite graduée

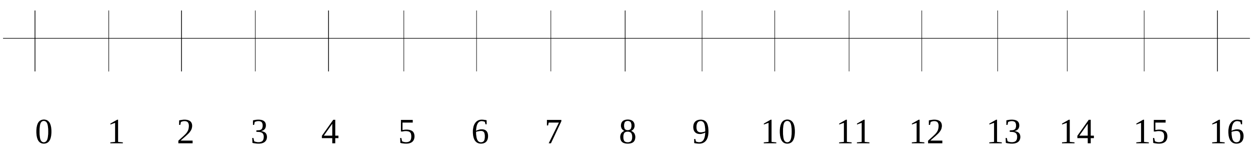
La multiplication des nombres entiers permet de définir l'ensemble des nombres rationnels. En effet on appellera fraction une expression de la forme $\frac{a}{b}$ où a, b sont des nombres entiers relatifs et $b \neq 0$. Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ définissent le même nombre rationnel si $ad = bc$.

D'habitude on introduit ici l'ensemble des nombres rationnels :

$$\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b} \text{ tels que } a, b \text{ sont des entiers et } b \neq 0\}.$$

Un nombre rationel, par exemple $\frac{1}{2}$ peut s'écrire d'une infinité de façons: $\frac{1}{2} = \frac{n}{2 \times n}$, où n est un entier relatif non nul quelconque. Les élèves (et même les étudiants) sont déroutés ici car jusque là les nombres avaient une représentation unique et donc on pouvait facilement faire la confusion entre nombre et chiffres, nombre et représentation

Et naturellement on s'interroge: Pourquoi ce sont des nombres? parce que ainsi on les a définis bien entendu! Mais à mon avis cela ne convainc guère. C'est pour cela que j'ai pris carrément le parti d'introduire autrement les nombre rationnels en partant de la droite graduée obtenue à partir de la bande numérique. (Je mets en garde le lecteur que cette présentation est destinée aux maîtres et étudiants et que son application telle quelle à l'école primaire est exclue):



Par définition un nombre réel est un point sur la droite graduée. Nous noterons par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels ou ce qui est la même chose la droite graduée.

Rappelons la contruction de cette droite graduée: Tracer une droite horizontale, prendre un point quelconque sur la droite que l'on notera 0 et qu'on appelle l'origine (ce sera la représentation du nombre zéro) prendre ensuite un point à sa droite qu'on notera 1 (ce sera la représentation du nombre un) et qui sera notre unité, il est à remarquer que ce choix est arbitraire et subjectif comme l'est souvent le choix d'une unité. Parfois ce choix est adapté, appropié. Ensuite avec un compas et se plaçant au point 1 on trouve (on construit) le point 2 (ce sera la représentation du nombre deux) et ainsi de suite on construira les entiers naturels et relatifs. Il est clair par construction que tout nombre entier naturel et tout nombre entier relatif est un nombre réel, ce que s'écrira

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$

Les concepts suivants apparaissent immédiatement:

- un nombre positif est un nombre qui se trouve à droite de 0
- un nombre négatif est un nombre qui se trouve à gauche de 0
- l'addition d'un nombre quelconque avec un nombre positif signifie aller vers la droite, ce qui peut se faire avec un compas
- l'addition d'un nombre quelconque avec un nombre négatif signifie aller vers la gauche, ce qui se fait également avec un compas

La notion d'ordre sous la forme :

- a plus grand que b signifie a se trouve à droite de b
- a plus petit que b signifie a se trouve à gauche de b

Disparaissent les notions suivantes :

Notion discrète du nombre; La notion de précédant et celle de suivant : en effet entre deux nombres réels il y a une infinité de nombres réels.

Utilisation de la règle et le compas pour éffectuer des opérations dans R.

> Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations qui sont, l'addition la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines, ...,
>
> de même n'a-t-on autre chose à faire en géométrie, en ce qui concerne les lignes qu'on cherche , pour les préparer à être connues, que d'on rajouter d'autres ou les ôter.
>
> René Descartes
>
> La Géométrie (1637)

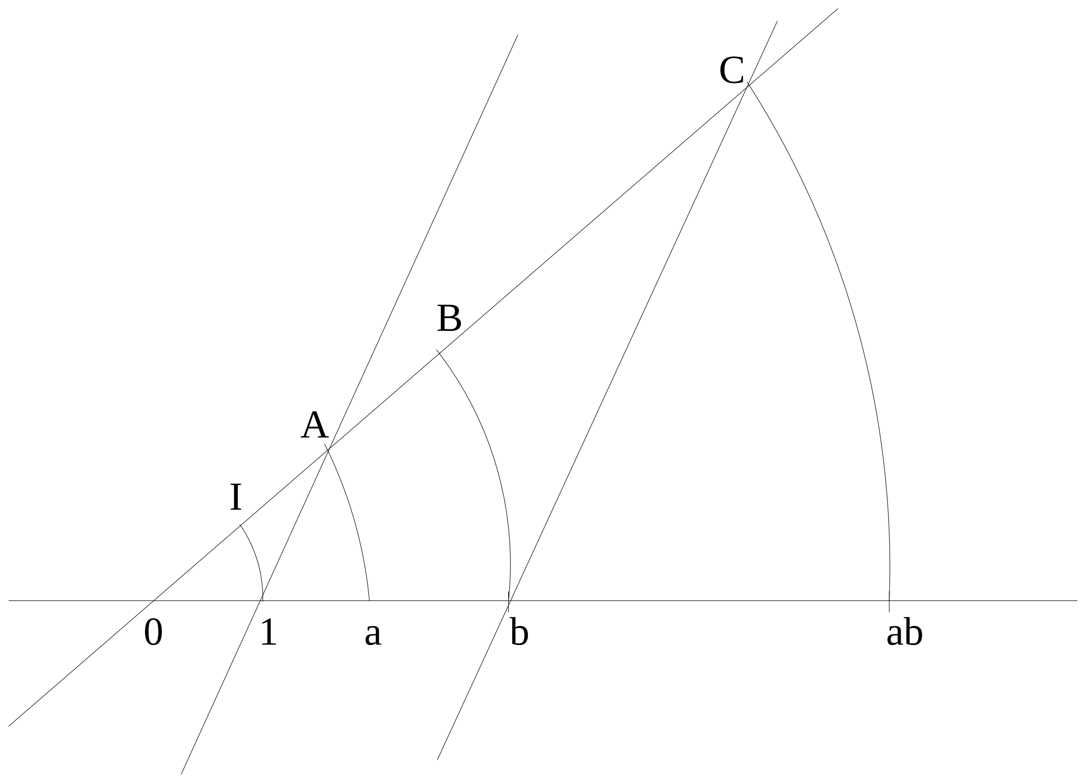
L'addition de deux nombres sur la droite graduée .

Exercices. — *Construire sur sa feuille une droite graduée, on prendra pour unité 1cm. puis prendre deux points quelconques sur cette doite et avec l'aide du compas les additioner, les soustraire.*

La multiplication de a par b . — .

L'idée de cette construction remonte à Descartes, mais il faut préciser que Descartes ne disposait de l'ensemble des nombres réels, néanmoins il travaille sur les nombres représentés sur une droite. Aujourd'hui cette méthode sert à remonter de la gèomètrie vers le numérique. (cf Algèbre et Géométrie de M. Artin)

Sur la droite graduée construisons une droite oblique D passant par 0 sur laquelle grâce au compas on va reporter les nombres $1, a, b$ que l'on notera par I, A, B. Tracer la doite Δ joignant 1 et A, puis tracer la parallèle à Δ passant par b, cette droite coupe D en un point C, avec le compas on reporte le point C sur notre droite graduée, le point trouvé est le nombre ab

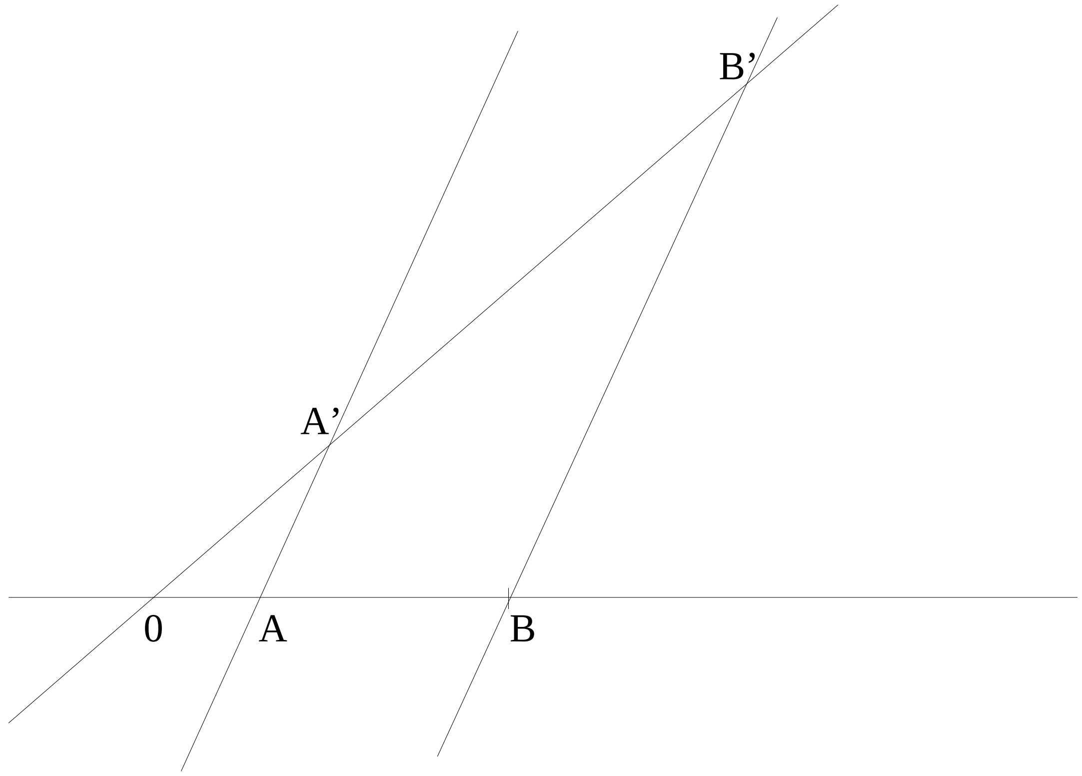


La justification de cette construction repose sur le théorème de Thalès

Théorème de Thalès et sa réciproque. — *Soient D et D' deux droites se coupant en O, considérons deux autres droites L et L' coupant D et D' (voir figure. Si L et L' sont parallèles alors on a la relation.*

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$$

Réciproquement si on a cette dernière relation les droites L et L' sont forcément parallèles.

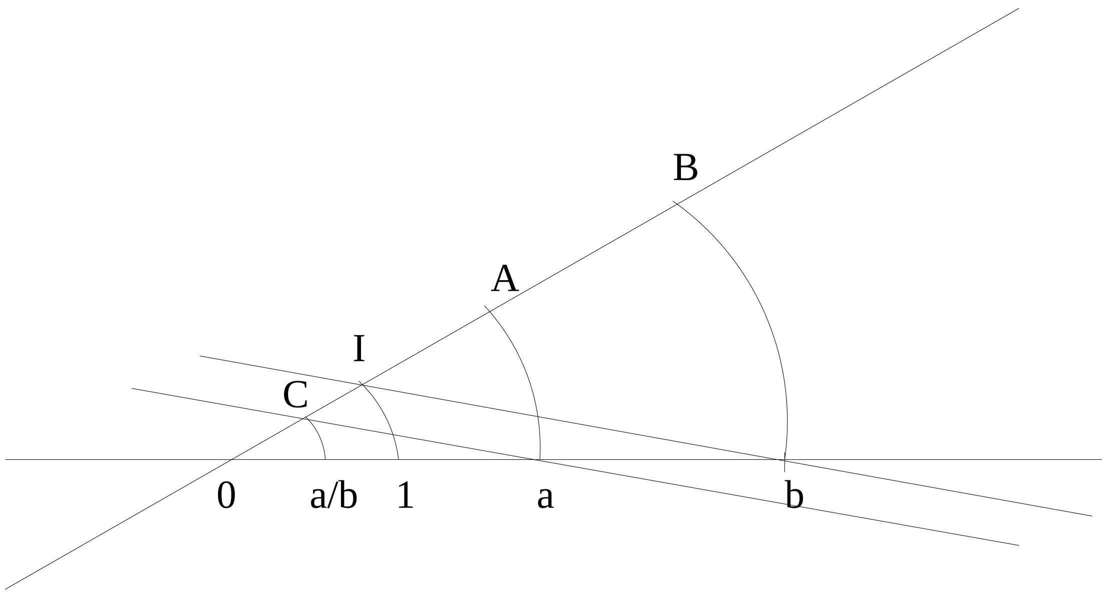


Rappeler les constructions à la règle et au compas

Ici une série d'exercices simples:

- Multiplier 2 par 3 , 3 par 3
- Multiplier 1 par a
- Multiplier 0 par a
- Effectuer $(2+2)\times 3$ et $2\times 3+2\times 3$

La division de a par un nombre $b \neq 0$ se fait suivant le même principe : Sur la droite graduée construisons une droite oblique D passant par 0 sur laquelle grâce au compas on va reporter les nombres $1, a, b$ que l'on notera par I, A, B. Tracer la doite Δ joignant b et I, puis tracer la parallèle à Δ passant par a, cette droite coupe D en un point C, avec le compas on reporte le point C sur notre droite graduée, le point trouvé est le nombre $\dfrac{a}{b}$



Remarque - **"impossibilité de diviser par zéro"**
si $b = 0$ la droite Δ coincide avec la droite D et la parallèle à Δ passant par a ne peut pas couper la droite D.

La justification se fait à nouveau par le Théorème de Thalès.

Exercices:

- Représenter sur la droite graduée: $\frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{11}{12}$;
- Faire la division de a par 1.

Nous pouvons alors définir un nombre rationnel comme le résultat (unique) de la division de deux entiers relatifs.

Exercice .–

- Faire la division de 1 par 2, puis diviser 2 par 4, 3 par 6, que remarque-t-on?
- Soient a, b, c trois nombres quelconques non nuls vérifier que $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$
- Soient a, b, c trois nombres quelconques non nuls vérifier que $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

Une conséquence de ces exercices est la définition usuel de l'addition des nombres rationnels.
Soient $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ deux nombres rationnels, l'addition est donnée par

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{a \times d + c \times b}{d \times b}$$

Il suit alors que le résultat de l'addition et la multiplication des nombres rationnels est aussi un nombre rationnel. Bien sûr il en est de même pour la soustraction et la division (par un nombre rationnel non nul).

Une conséquence importante de la construction que nous venons de faire est que tout nombre entier est un nombre rationnel et tout nombre rationnel est un nombre réel, ce qui s'écrit :

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Ces inclusions sont strictes, en effet:

$-1 \in \mathbf{Z}$ mais $-1 \notin \mathbf{N}$, de même pour tous les entiers négatifs.

$\frac{2}{3} \in \mathbf{Q}$ mais $\frac{2}{3} \notin \mathbf{Z}$.

Nous allons voir tout de suite que à l'aide d'une règle graduée et un compas on peut représenter sur la droite graduée le nombre $\sqrt{2}$ et peut être plus loin nous démontrerons que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers. Il en sera de même pour les nombres $\sqrt{p}$ où p est un nombre premier plus grand ou égale à deux.

D'autre part le nombre π qui est la demi longueur d'un cercle de rayon 1 est un nombre réel qui n'est pas rationnel (la preuve a été faite par Lambert en 1761) et ne peut pas se construire à l'aide de la règle et du compas (c'est l'impossibilité de la quadrature du cercle!!), comme l'a demontré Lindemann en 1882, après deux mille ans d'interrogations et des miliers de tentatives.

Remarque.- Il est maintenant facile de fabriquer une infinité de nombres réels qui ne sont pas des nombres rationnels:

$1+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $3+\sqrt{2}$, $4+\sqrt{2}$, $5+\sqrt{2}$, $6+\sqrt{2}$, ...

$\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, ...

$1+\pi$, $2+\pi$, $3+\pi$, $4+\pi$, $5+\pi$, $6+\pi$, ...

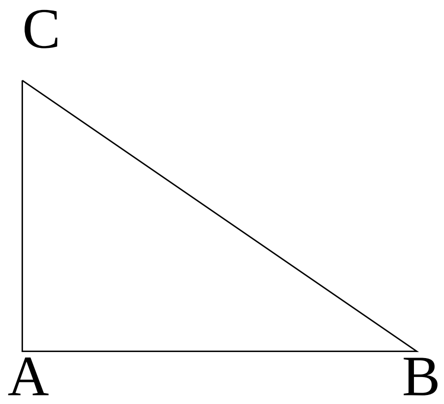
π, 2π, 3π, 4π, 5π, 6π, ...

Représentation de $\sqrt{p}$ pour tout nombre entier premier p.

Théorème de Pythagore. — *Dans un triangle rectangle ABC nous avons la relation:*

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Reciproque du Théorème de Pythagore: Si dans un triangle ABC nous avons la relation: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ce triangle est rectangle en A.



Le principe de la représentation de $\sqrt{p}$ consiste à construire certains triangles rectangles, par exemple si $p = 2$ nous aurons la relation : $2 = 1 + 1$

qui peut encore s'écrire :

$$(\sqrt{2})^2 = (1)^2 + (1)^2$$

Si $p \neq 2$ et p est impair, nous avons la relation :

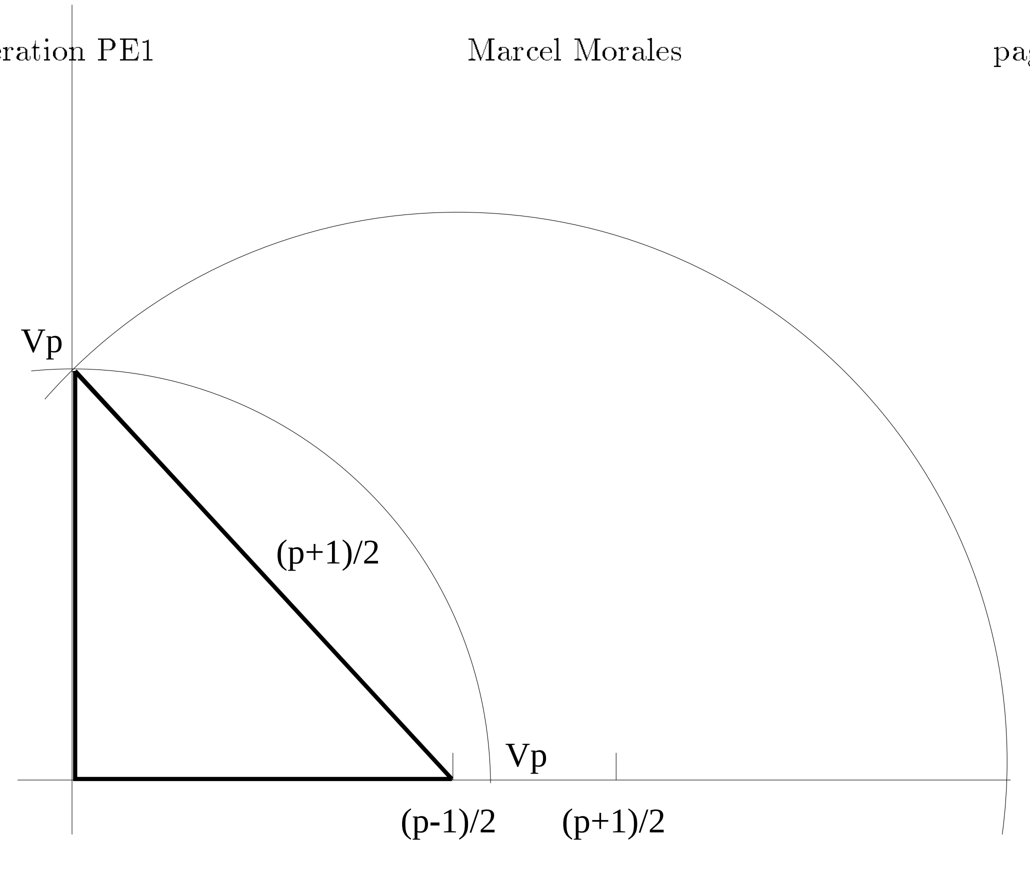
$$p = (\frac{p+1}{2})^2 - (\frac{p-1}{2})^2$$

dans laquelle $\frac{p+1}{2}$ et $\frac{p-1}{2}$ sont des entiers naturels. Cette relation peut s'écrire:

$$(\sqrt{p})^2 = (\frac{p+1}{2})^2 - (\frac{p-1}{2})^2$$

Rappeler les constructions à la règle et au compas

Le théorème de Pythagore nous dit qu'on peut construire un triangle rectangle de base $\frac{p-1}{2}$ et de hypothénuse $\frac{p+1}{2}$, l'autre côté mesure $\sqrt{p}$:



Construction de la racine carree d'un nombre reel positif

Puis on reporte avec le compas le nombre $\sqrt{p}$ sur notre droite graduée.

Remarque : En fait la construction ci-dessus nous permet de déterminer à la règle et au compas la racine carrée de n'importe quel nombre réel positif.

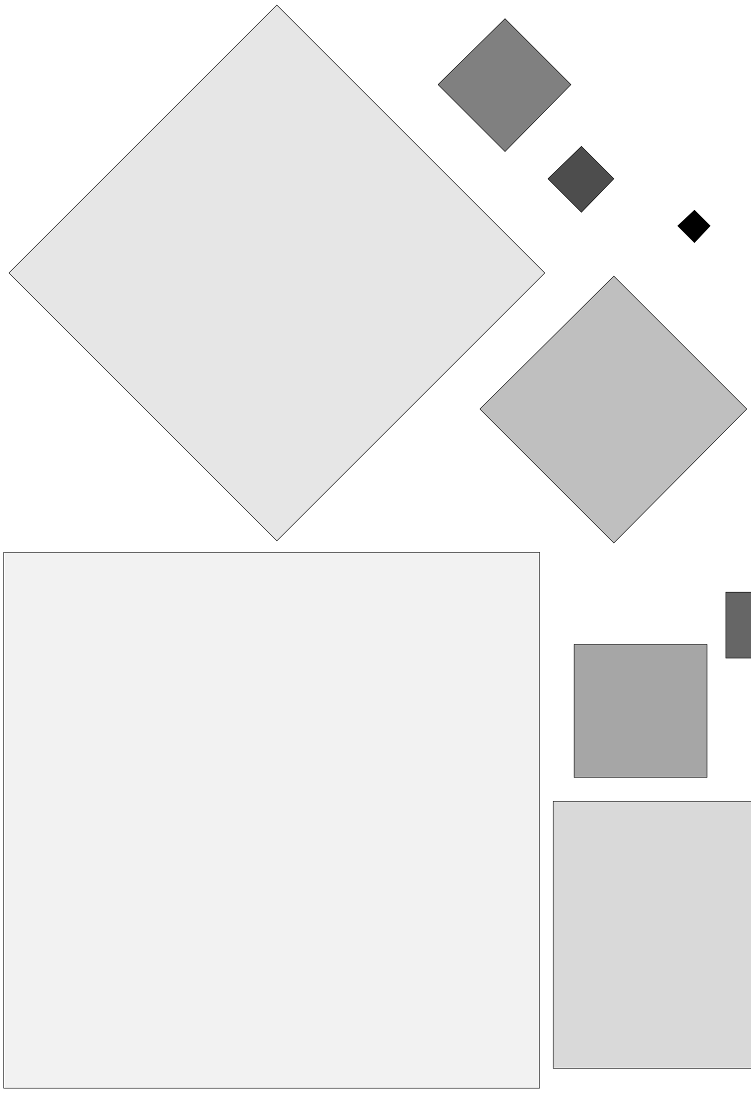
Numération en base b où b est un nombre entier positif plus grand ou égal à 2.

Activité les carrés

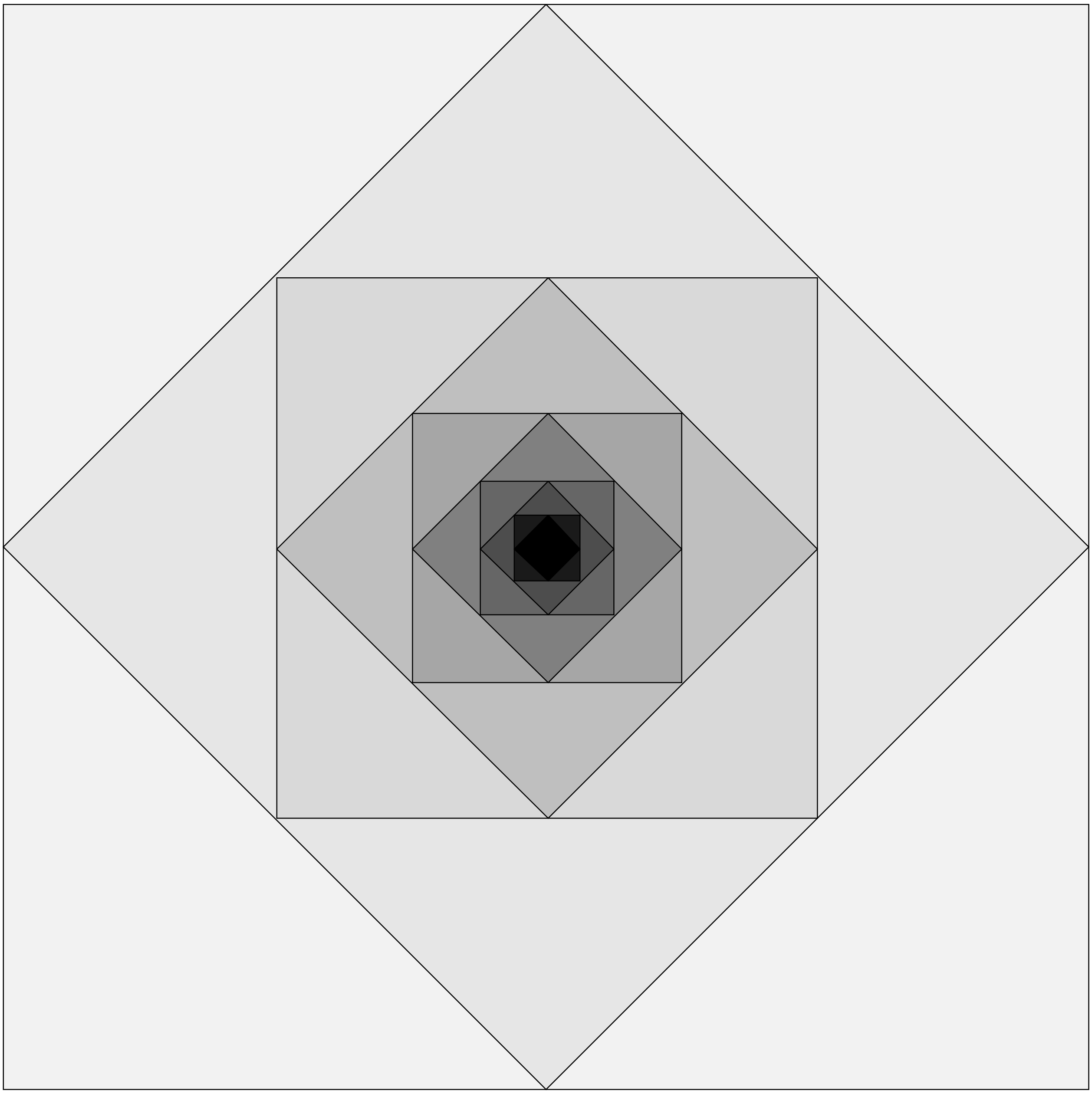
Cette activité peut se faire à plusieurs stades de la scolarité, en maternelle il peut s'agir du découpage-collage, en CM2 avec une règle et l'équerre, à l'IUFM avec une règle et un compas. Elle peut se faire dans le cadre géométrique ou numérique.

1) Construire un carré, puis le carré ayant pour sommets les milieux des côtés du carré précédent et ainsi de suite.

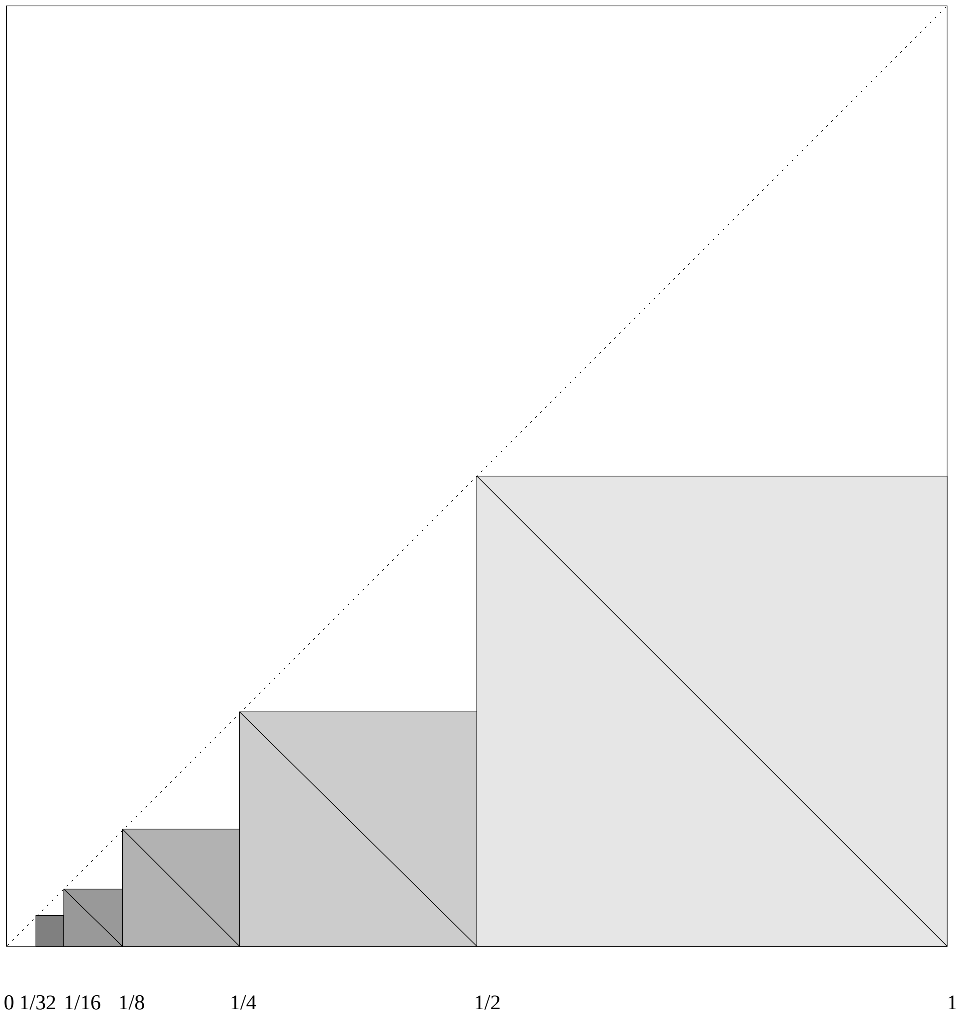
2) Soit l la longueur du côté du premier carré, alors la suite des longueurs des côtés des carrés est $l, \frac{l}{\sqrt{2}}, \frac{l}{2}, \frac{l}{2\sqrt{2}}, \frac{l}{4}, \frac{l}{4\sqrt{2}}, \frac{l}{8}, \frac{l}{8\sqrt{2}}, \dots$



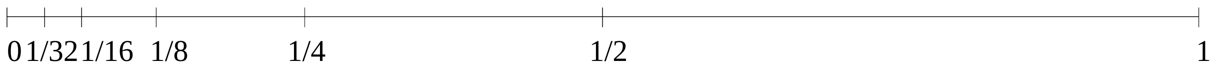
3) Construire les carrés ci-dessus sur des feuilles de couleur différent, faire le montage de la figure ci dessous



4) Aligner les carrés droits (cf figure)



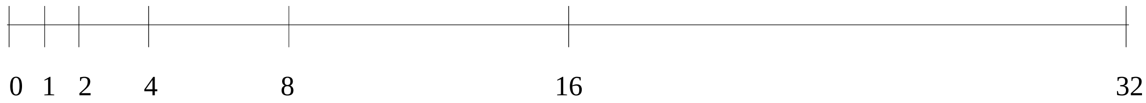
5) Prenons pour unité sur la droite réelle la longueur l, et plaçons sur la droite graduée la suite des longueurs des côtés des carrés.



Les puissances de 1/2

Axiome d'Archimède:

Plaçons sur la droite graduée les puissances de 2:

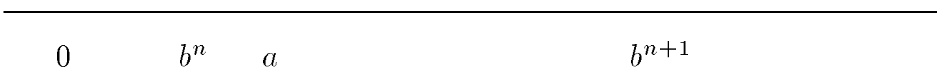


Les puissances de 2

Axiome d'Archimède, Version 1:

Soit b un nombre entier positif plus grand ou égal à 2.

Tout nombre réel positif a se trouve entre deux puissances succesives de b



Axiome d'Archimède, Version 2:

" Paul aperçoit Virginie à environ 200m, il se dirige vers elle, le coeur serré, d'un pas mesuré (environ 90cm), mais ferme, Virginie reste figée sur place, en combien de pas Paul atteindra Virginie?"

Un autre exemple:j'aperçois loin devant moi une patisserie, j'ai la certitude que en marchant droit vers elle je l'atteindrai.

Cette certitude se traduit mathématiquement de la façon suivante:

Axiome d'Archimède.

Soit b un nombre entier positif plus grand ou égal à 2.

Tout nombre réel a se trouve entre deux multiples succesifs de b

$0 \qquad nb \qquad a \qquad (n+1)b$

C'est le principe de tiroirs : on divise la droite graduée en morceaux de longueur b. Le nombre a doit se trouver dans un et un seul de ces tiroirs.

Ecriture d'un nombre en base b où b est un nombre entier positif plus grand ou égal à 2.

Soit a un nombre entier alors il existe deux entiers naturels n et b_0, avec $1 \leq b_0 \leq b-1$ tels que :

$$b_0 b^n \leq a < (b_0+1)b^n$$

$0 \qquad b_0 b^n \qquad a \qquad (b_0+1)b^n \qquad b^{n+1}$

Il en suit que $0 \leq a - b_0 b^n < b^n$. Nous appliquons le même principe à $a - b_0 b^n$ et ainsi de suite.

Exemple: soit le nombre 453 et $b = 10$

Alors $10^2 \leq 453 < 10^3$ et en fait $4 \times 10^2 \leq 453 < 5 \times 10^2$;

prenons maintenant le nombre $453 - 4 \times 10^2 = 53$, nous aurons que :

$5 \times 10 \leq 53 < 6 \times 10$, considérons alors le nombre $53 - 5 \times 10 = 3$

et 3 est un nombre compris entre 0 et 10^0.

Finalement le nombre 453 s'écrira:

$453 = 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 3$

Qui est bien sûr l'écriture du nombre 453 en base 10, notre système usuel.

Prenons maintenant $b = 7$ et $a = 453$.

Nous commençons par écrire les puissances de 7:

$7^0 = 1, 7^1 = 7, 7^2 = 49, 7^3 = 343, 7^4 = 2401$

et alors nous aurons :

$7^3 \leq 453 < 2 \times 7^3$

ensuite prenons le nombre $453 - 7^3 = 110$ qui vérifie:

$2 \times 7^2 \leq 110 < 3 \times 7^2$,

faisons de même avec $110 - 2 \times 7^2 = 12$, ce qui nous donnera

$7 \leq 12 < 2 \times 7$

et finalement $0 \leq 12 - 7 = 5 < 7$.

En conclusion le nombre 453 s'écrira:

$453 = 1 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 1 \times 7 + 5$

ce qui s'appelle l'écriture explicite du nombre 453 en base 7. Nous écrirons de façon abregée:

$453 = 1215_{(7)}$.

mais qui se lit: un deux un cinq en base 7. (Certains auteurs écrivent également : $453 = \overline{1215}_{(7)}$).

Le symbole (7) en indice signifie que l'écriture est en base 7. Lorsque la base est 10 nous n'écrirons pas d'indice. Il est sous entendu qu'un nombre pour lequel il n'y a pas de mention explicite de la base, est écrit en base dix.

Exercices- a) Pourquoi $b \neq 1$

b) Ecrire 75 en base 3

c) Ecrire 750 en base 6

Théorème d'écriture d'un nombre entier a dans une base $b \geq 2$

Tout nombre entier positif a s'écrit sous la forme

$$a = a_0 b^n + a_1 b^{n-1} + ... + a_n$$

avec $0 \leq a_i \leq (b-1)$ pour tout i

Par convention on écrira ce nombre

$a_0 a_1 ... a_{n(b)}$

Remarque.– Si b est un entier inférieur ou égale à 10, l'écriture ci-dessus n'est pas ambigue, mais par contre si par exemple $b = 11$ il y aura ambiguité. Essayons d'écrire le nombre 118 en base 11. Suivant la méthode décrite commençons par écrire les puissances de 11:

$11, 11^2 = 121, 11^3 = 1331$

donc $11 \leq 118 < 11^2$, et plus précisement $10 \times 11 \leq 118 < 11^2$, finalement on obtient $118 = 10 \times 11 + 8$, pour représenter 118 en base 11 nous avons besoin d'un symbole représentant le 10, c'est la lettre A qui est choisie par convention.

On écrira alors $118 = A8_{11}$.

En résumé si $b \leq 10$ on utilise comme chiffres dans notre système de numération les chiffres arabes 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 inférieurs strictément à b, et si l'on travaille en base $b \geq 11$ on utilise en plus des chiffres arabes les lettres de l'alphabet dans l'ordre.

Exemple. Le nombre 2587 s'écrit: $2587 = 10 \times 16^2 + 1 \times 16 + 11$ qui peut aussi s'écrire $2587 = A1B_{16}$

Le nombre 2587 s'écrit: $2587 = 11 \times 15^2 + 7 \times 15 + 7$ et donc on peut écrire $2587 = B77_{15}$

Exercices-

Ecrire 75 en base 13

Ecrire 750 en base 16

Quel est le nombre $ABCDEF_{16}$

Problème.- Le paysan et l'échiquier. On raconte qu'un jour un paysan sauva la vie de l'empereur chinois. Voulant le remercier l'empereur dit au paysan, je t'accorderai ce que tu voudras. Le paysan présenta un échiquier 8×8 et dit :

la première lune tu mettras un grain de riz sur la première case de l'échiquier, la deuxième lune tu mettras deux grains de riz sur la deuxième case de l'échiquier, la troisième lune tu mettras quatre grains de riz sur la troisième case de l'échiquier, et ainsi de suite à chaque apparition de la nouvelle lune tu mettras le double de ce que tu avais mis la dernière fois, tu t'arreteras lorsque tu auras parcouru tout l'échiquier.

Sachant que dans un kilo de riz il y a à peu près 2^{15} grains, combien de kg a déposé l'empereur la dernière fois. Combien de tonnes? Que pensez vous du paysan.

activité a) Faire la division de 1 par 7. Vérifier que $\frac{1}{7}$ a une écriture décimale périodique à partir d'un certain moment.

b) Soit n un entier naturel non nul. Vérifier que $\frac{1}{n}$ a une écriture décimale périodique à partir d'un certain moment.

b) Soient m, n des entiers naturels,avec n non nul. Vérifier que $\frac{m}{n}$ a une écriture décimale périodique à partir d'un certain moment.

Arithmétique.

les couples se forment, mais en raison de ce fait que la décomposition en facteurs premiers

du nombre quinze ne fait pas apparaître parmi ces facteurs le suivant de un,

-en raison, disais-je donc, de la non divisibilité du nombre quinze par le nombre deux-

et remarquez que si les noces françaises défilaient par triplets au lieu de défiler

par couples, de telles considérations deviendraient superflues, puisque la noce à Ernestine

apparaîtrait alors sous la forme de cinq triplets, et l'on peut même envisager

des circonstances ethnographiques, telles que les noces se déplaçant par rangées

de cinq personnes, les convives de Belhôtel pourraient évoluer réunis en trois quintuplets;

-bref, en raison de l'imparité du nombre quinze,

sept couples seulement peuvent se former, une personnne restant solitaire...

Raymond Queneau

Le chiendent

Gallimard En guise d'introduction et pour motiver les étudiants je commencerai par l'exercice suivant extrait du concours de recrutement de l'Académie de Lyon 1994.

a) Ecrire la liste ordonnée (dans l'ordre croissant) des diviseurs de 16 (1 et 16 sont compris dans la liste).

b) Ecrire la liste ordonnée (dans l'ordre croissant) des diviseurs de 36.

c) Proposer deux démarches différentes qui permettent d'organiser votre recherche et de justifier le caractère exhaustif de la liste proposée.

d) Les deux listes contiennent un nombre impair de diviseurs. Citer deux autres nombres qui ont eux aussi un nombre impair de diviseurs (justifier la réponse).

Est-il possible de déterminer un entier n ayant 9 diviseurs dont le produit soit: $225^4 \times 15$

solution, quelques définitions et commentaires.

a) Tout d'abord remarquons que la phrase a divise b, (ou a est un diviseur de b, ou encore b est un multiple de a) n'a de sens que lorsque a et b sont des entiers naturels. En effet dans les rationnels ou les réels tout nombre non nul divise un autre nombre.

Pour être plus précis on dit que a divise b (sous entendu a et b des entiers naturels) si l'on peut trouver un entier naturel q tel que $b = q \times a$. Il est clair que 1 et b sont diviseurs de b et que si a divise b alors $a \leq b$. En général on écrit simplement $b = qa$, mais pour le calcul numérique afin de distinguer les nombres les un des autres on met la croix, par exemple $15 = 3 \times 5$

Bien que cela paraisse absurde, éssentiellement pour trouver les diviseurs d'un nombre b il y a une seule méthode: en partant de 1 tester la divisibilité de chaque nombre $a \leq b$. Elle peut être simplifiée, il suffit de faire la recherche de divisibilité pour les nombres $1 \leq a \leq \sqrt{b}$, la liste complète sera donnée par les nombres qu'on aura ainsi trouvé et les quotients de b par ces nombres; car si $b = q \times a$ alors a et q sont diviseurs de b et l'un de deux est $\leq \sqrt{b}$.

Exemple : $b = 36$ alors $\sqrt{36} = 6$ et on obtient les diviseurs suivants 1,2,3,4,6 auxquels on ajoute les quotients de 36 par ces nombres 36, 18,12,9,6.

La liste complète et ordonnée est $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ On peut trouver les diviseurs d'un nombre grâce aux tables de multiplication

La deuxième méthode demandée consiste à écrire la décomposition de b en facteurs premiers (mais il faut trouver ces facteurs communs et cette décomposition par la première méthode!)

Dans notre cas $36 = 2^2 \times 3^2$, donc on prend toutes les combinaisons possibles des facteurs premiers:

$1 = 2^0 \times 3^0, 2 = 2^1 \times 3^0, 4 = 2^2 \times 3^0, 3 = 2^0 \times 3^1, 6 = 2^1 \times 3^1, 9 = 2^0 \times 3^2, 12 = 2^2 \times 3^1, 18 = 2^1 \times 3^2$ et $36 = 2^2 \times 3^2$. Nous pouvons résumer de la façon suivante: les diviseurs de 36 sont les nombres de la forme $2^a \times 3^b$ avec $0 \leq a \leq 2; 0 \leq b \leq 2$.

Prenons d'autres exemples:

i) $24 = 2^3 \times 3$ d'où les diviseurs de 24 sont les nombres de la forme $2^a \times 3^b$ avec $0 \leq a \leq 3; 0 \leq b \leq 1$: 1;2;3;4;6;8;12;24.

ii) Plus généralement prenons un nombre $n = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$; alors ses diviseurs sont les nombres naturels de la forme $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times 7^\delta$ avec

$0 \leq \alpha \leq a; 0 \leq \beta \leq b; 0 \leq \gamma \leq c$ et $0 \leq \delta \leq d$. D'où le nombre des diviseurs de n est $(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)$.

Il découle dans cet exemple que le nombre de diviseurs de n est impair uniquement lorsque tous les exposants, dans la décomposition en facteurs premiers, sont pairs, ce qui signifie que n est un carré.

d) 4 et 49.

e) Beaucoup de candidats n'ont pas compris la question, il s'agit de déterminer un entier naturel n ayant 9 diviseurs et dont le produit (de ses diviseurs) est $225^4 \times 15$

$225 = 15 \times 15 = 3^2 \times 5^2 et 225^4 \times 15 = 3^9 \times 5^9$. On en déduit que les facteurs premiers de n sont 3 et 5, et $n = 2^a \times 5^b$ et que $(a + 1)(b + 1) = 9$ et donc $a = 2, b = 2$, et finalement $n = 2^2 \times 5^2 = 225$.

En fait dans cet exercice la réponse était dans l'énoncé et il fallait avoir l'oeil.

La factorisation des entiers naturels repose sur le :

Théorème de factorisation unique d'un entier naturel.

Soit a un entier naturel plus grand ou égal à deux alors a peut s'écrire de façon unique :

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}$$

où $p_1 < p_2 < ... < p_k$ sont des nombres premiers.

Exercice— Soit a comme dans le théorème, écrire la factorisation du carré a^2. Conclure que si un nombre premier p divise a^2 alors p divise a (i.e. p apparaît dans la factorisation de a.

Propriété: Si a est un nombre premier qui divise le produit bc alors a divise b ou a divise c.

(Hors-programme?) Exemple — $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Faisons une démonstration par l'absurde, i.e. nous allons supposer que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel et conclure à quelque chose de faux. En effet si $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b,\ (b \neq 0)$, sont des entiers naturels sans facteurs communs alors multipliant cette relation par b nous obtenons $b\sqrt{2} = a$, élévant au carré chaque côté de la relation nous avons $2b^2 = a^2$, On en déduit que 2 divise $a^2 = a \times a$, et on sait que 2 est un nombre premier donc 2 divise a et on peut écrire $a = 2 \times k$, avec k un entier naturel, remplaçons a, on aura $2b^2 = 4k^2$, divisant par 2 on obtient $b^2 = 2k^2$ et par l'argument de tout à l'heure 2 divise b. Autrement dit a et b sont divisibles par 2, ce qui est contraire aux hypothèses.

Conséquences —

définition du pgcd, du ppcm:.

Soient a, b deux entiers naturels plus grands ou égaux à deux le pgcd de a, b est l'entier naturel le plus grand qui divise à la fois a et b. Par exemple si $15925 = 7^2 \times 5^2 \times 13$ et $3500 = 7 \times 5^3 \times 2^2$ alors $\text{pgcd}(15925, 3500) = 7 \times 5^2 = 175$.

En pratique pour déterminer le pgcd de deux nombres a, b on écrit la factorisation en nombres premiers de ces nombres. Le pgcd est le produit des nombres premiers qui divisent à la fois a et b, chacun se trouvant à la puissance la plus petite qui apparît dans les deux factorisations (*cf.* voir exemple ci-dessus.)

Exemple— Déterminer les diviseurs (communs) de 237 et 429.

Ce sont les diviseurs du pgcd(273,429)=39=3 $\times$ 13 : 1;3;13;39.

Exemple— On dispose d'une caisse de dimensions $36 \times 48 \times 60$ et on voudrait y ranger des savons de forme cubique, déterminer la plus grande dimension de chaque savon pour que cela soit possible. Calculer le nombre total de savons que contiendra la caisse.

La dimension de la piéce cubique de savon doit diviser à la fois 36, 48, et 60 et doit être la plus grande possible, c'est donc le pgcd(36,48,60)=12. Chaque savon sera un cube de 12cm de côté. D'autre part nous avons $36 = 12 \times 3; 48 = 12 \times 4; 60 = 12 \times 5$. Il y a $3 \times 4 \times 5 = 60$ pièces de savon.

Le ppcm de a et b est l'entier naturel le plus petit qui soit un multiple à la fois de a et de b. Par exemple $\text{ppcm}(15925, 3500) = 2^2 \times 7^2 \times 5^3 \times 13 = 318500$

Exemple— Déterminer les multiples (communs) de 4 et 6. Ce sont les multiples du ppcm(4,6)=12 : 12;24;36;...

Exemple— On dispose d'une caisse de forme cubique et on voudrait y ranger des savons en forme de pavés de dimensions (en mm) $48 \times 54 \times 72$, déterminer la plus petite dimension de la caisse pour que cela soit possible. Calculer le nombre total de savons que contiendra la caisse.

Le côté d'une caisse cubique doit être un multiple à la fois de 48, 54 et 72 donc du ppcm(48,54,72)=432, comme on veut le plus petit possible c'est 432. Il y aura alors $9 \times 8 \times 6 = 432$ pains de savon car $432 = 48 \times 9 = 54 \times 8 = 72 \times 6$.

Propriété: On a toujours la relation $\text{ppcm}(a, b) = \dfrac{a \times b}{\text{pgcd}(a, b)}$

Propriété: Si a divise b et a divise $b + c$ alors a divise c

Somme et produit des nombres rationnels

Critère de divisibilité par 2,3,5,9 et 11 (démonstration)

Soit a un entier naturel, écrivons le dans notre système de numération en base dix :

$$a = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + ... + a_n$$

divisibilité par 2 : le nombre $a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + ... + a_{n-1}10$ est un multiple de 10 donc aussi un multiple de 2, appliquant la propriété précédente nous avons que a est divisible par 2 si et seulement si a_n est divisible par 2.

Rappel.- Un nombre pair est un multiple de 2 et il est de a forme $2k$ où k est un entier. Un nombre impair est de a forme $2k + 1$ où k est un entier.

divisibilité par 5 : le nombre $a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + ... + a_{n-1}10$ est un multiple de 10 donc aussi un multiple de 5, appliquant la propriété précédente nous avons que a est divisible par 5 si et seulement si a_n est divisible par 5, i.e si $a_n = 0$ ou $a_n = 5$.

divisibilité par 3 : écrivons $10 = 3 \times 3 + 1$, $100 = 3 \times 33 + 1$, $1000 = 3 \times 333 + 1$, et ainsi de suite, alors a s'écrira

$$a = 3k + a_0 + a_1 + ... + a_n$$

, où k est un entier, il en suit que a est divisible par 3 si et seulement si $a_0 + a_1 + ... + a_n$ est divisible par 3.

divisibilité par 9 : écrivons $10 = 9 \times 1 + 1$, $100 = 9 \times 11 + 1$, $1000 = 9 \times 111 + 1$, et ainsi de suite, alors a s'écrira

$$a = 9k' + a_0 + a_1 + ... + a_n$$

, où k' est un entier, il en suit que a est divisible par 9 si et seulement si $a_0 + a_1 + ... + a_n$ est divisible par 9.

divisibilité par 11 : a est divisibl par 11 si et seulement si $a_0 - a_1 + a_2 - a_3. + .. + (-1)^n a_n = 0$. Afin de ne pas alourdir cet exposé, contentons nous de la preuve pour un nombre à quatre chiffres: Soit $a = a_0 10^3 + a_1 10^2 + a_2 10 + a_3$

écrivons $10 = 11 \times 1 - 1$, $100 = 11 \times 9 + 1$, $1000 = 11 \times 91 - 1$, alors a s'écrira

$$a = 11 \times (91a_0 + 9a_1 + a_2) - a_0 + a_1 - a_2 + a_3$$

il en suit que a est divisible par 11 si et seulement si $-a_0 + a_1 - a_2 + a_3$ est divisible par 11, mais chacun des nombres a_0, a_1, a_2, a_3 est inférieur à 11, donc on peut seulement avoir $-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 = 0$

Exercice. - Donner un critère de divisibilité par 7 d'un nombre à quatre chiffres.

Annexe (Hors-programme?).- L'algorithme d'Euclide . La factorisation n'est pas toujours la méthode la plus performante pour calculer le pgcd ou le ppcm, l'algorithme d'Euclide est bien plus rapide.

Euclide a produit son algorithme il y a à peu près deux mille ans (??). Le mot algorithme fait honneur au mathématicien arabe Al Khawarizmi(??).

Algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd: Calculons le pgcd$(15925, 3500)$
Faire la division euclidienne du plus grand par le plus petit :

$15925 = 4 \times 3500 + 1925$

ensuite faire la division euclidienne de 3500 par 1925

$3500 = 1 \times 1925 + 1575$

faire la division euclidienne de 1925 par 1575

$1925 = 1 \times 1575 + 350$

faire la division euclidienne de 1575 par 350

$1575 = 4 \times 350 + 175$

et finalement faire la division euclidienne de 350 par 175

$350 = 2 \times 175 + 0$

L'algorithme s'arrête quand le reste est nul. Le pgcd$(15925, 3500)$ est le dernier reste non nul, dans notre cas 175.

Ecriture décimale d'un nombre réel, les nombres décimaux.

Considérons les puissances négatives de 10:

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, ...$$

Soit a un nombre réel $0 < a < 1$ alors il existe deux entiers naturels n, a_0, avec $0 \leq a_0 \leq 9$ tels que

$$\frac{1}{10^n} \leq a < \frac{1}{10^{n-1}} \text{ et en fait}$$

$$a_0 \times \frac{1}{10^n} \leq a < (a_0 + 1) \times \frac{1}{10^n}$$

Exemple.- Considérons le nombre $\frac{2}{3}$

alors $6 \times \frac{1}{10} \leq \frac{2}{3} < 1$

et nous appliquons le même principe au nombre $\frac{2}{3} - 6 \times \frac{1}{10}$. Ainsi de suite

Nous avons le Théorème:

Tout nombre réel positif s'écrit sous la forme:

$$a = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + ... + a_n + a_{n+1}\frac{1}{10} + a_{n+2}\frac{1}{10^2} + a_{n+3}\frac{1}{10^3} + ...$$

avec $0 \leq a_i \leq 9$ pour tout i

Par convention on écrira ce nombre

$a_0 a_1 ... a_n, a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} ...$

Un nombre réel est décimal s'il s'écrit:

$$a = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + ... + a_n + a_{n+1}\frac{1}{10} + a_{n+2}\frac{1}{10^2} + ... + a_m \frac{1}{10^m}$$

avec $0 \leq a_i \leq 9$ pour tout i

Par convention on écrira ce nombre

$$a_0 a_1 ... a_n, a_{n+1} a_{n+2} ... a_m$$

Remarques

1) Le nombre rationnel $\frac{2}{3}$ n'est pas décimal car son écriture décimal comporte une infinité de chiffres après la virgule. Nous donnons le critère suivant qui permet de savoir si un nombre rationnel est un nombre décimal:

Un nombre rationnel $\frac{a}{b}$, **avec la condition que les nombres a et b n'ont pas de facteurs communs** est un nombre décimal si les seuls diviseurs de b sont 2 et 5.

2) Un nombre est rationnel si et seulement si son écriture décimale devient périodique à partir d'un certain moment.

3) mais 0,9999999999......est un décimal car il est égal à 1. Ce qui se démontre de la façon suivante:

Tout le monde sait que $\frac{1}{3} = 0.333333...$, ce qui peut s'écrire

$\frac{1}{3} = 3 \times 0.1111...$, et multipliant les deux termes de cette égalité par 3 on déduit que $1 = 0,9999999...$

4) Si l'on multiplie la dernière relation par 10 on aura 10=9,999999...; De même si l'on multiplie l'égalité par 0,1 on aura 0,0999...=0,1; ainsi de suite on peut voir que

0,00999...=0,01; 0,000999...=0,001; etc.

Une conséquence est que tout nombre réel dont l'écriture décimale se termine par une infinité de 9 est un nombre décimal, par exemple 1,2543999999....=1,2544; 365,254999...= 365,255

5) Tout nombre décimal est rationnel, par exemple:

$$0,3547 = \frac{3547}{10000} = \frac{3547}{10^4},$$

aussi $0,3 = \frac{3}{10}$,

$$0,05 = \frac{5}{100} = \frac{5}{10^2},$$

$$0,008 = \frac{8}{10^3} = \frac{8}{1000} =$$

64) Un nombre réel est rationnel si et seulement si son écriture décimale comporte une partie qui se repète à l'infini qu'on appelle la période.

Exemple: $0,333333... = \frac{1}{3}$, ce qui peut s'écrire

$3 \times 0.1111... = \frac{1}{3}$,d'où on déduit que

$$0,1111... = \frac{1}{9}$$

On peut également voir que :

$$0,01010101... = \frac{1}{99};$$

$$0,001001001001... = \frac{1}{999};$$

$$0,0001000100010001... = \frac{1}{9999};$$

et ainsi de suite.

Par exemple cherchons l'écriture fractionnaire de $5,45289898989....$:

$5,45289898989.... = 5,452 + 0.00089898989....$

$= 5,452 + 89 \times 10^{-5} + 89 \times 10^{-7} + 89 \times 10^{-9} + 89 \times 10^{-9} + ...$

$= 89 \times (10^{-5} + 10^{-7} + 10^{-9} + 10^{-11} + ...)$

$= 89 \times 10^{-5} \times (1 + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + ...)$

$= 89 \times 10^{-5} \times (1,0101010101...) = 89 \times 10^{-5} \times (1 + \frac{1}{99})$

$= 89 \times 10^{-5} \times (\frac{100}{99}) = \frac{89}{99 \times 10^3} = \frac{89}{99000}$

Exemple.- Division des décimaux. Faisons la division de 102,75 par 74

$$\begin{array}{r|l}
1\ 0\ 2{,}7\ 5 & 7\ 4 \\ \cline{2-2}
7\ 4\phantom{{,}7\ 5} & 1{,}3\ 8 \\ \hline
2\ 8\ 7 & \\
2\ 2\ 2 & \\ \hline
6\ 5\ 5 & \\
5\ 9\ 2 & \\ \hline
6\ 3 &
\end{array}$$

On peut résumer cette division par l'écriture

$$102,75 = 1,38 \times 74 + 0,63$$

c'est la division exacte de 102,75 par 74; 1,38 est le quotient et 0,63 le reste.