VARIÉTÉS SPHÉRIQUES

Michel Brion

Ibergekumene tsores iz gut tsu dersteylin

Introduction

Parmi les variétés algébriques complexes dans lesquelles opère un groupe algébrique linéaire, les mieux comprises sont les variétés compactes et homogènes, par exemple les espaces projectifs, les quadriques, les grassmaniennes.... Ces variétés jouent un grand rôle en géométrie algébrique et aussi en théorie des représentations, où elles permettent de construire les représentations irréductibles des groupes semisimples.

Lorsqu'on s'intéresse aux espaces homogènes G/H sous un groupe algébrique linéaire G, il est naturel de les *compactifier*, c'est-à-dire de construire des variétés algébriques compactes dans lesquelles G opère et qui contiennent une orbite ouverte isomorphe à G/H. Une telle variété existe toujours; en effet, d'après un théorème de Chevalley, on peut réaliser G comme sous-groupe fermé de GL_n de sorte que H est le stabilisateur d'une droite ℓ de $\mathbf{C}^n$. Alors G opère dans l'espace projectif $\mathbf{P}^{n-1}$, et ce dernier contient l'orbite $G\ell$ isomorphe à G/H; l'adhérence de cette orbite est une compactification projective de cet espace homogène.

Voici quelques exemples de telles compactifications. Soient d'abord G le groupe additif de $\mathbf{C}$, et H le sous-groupe trivial; une compactification évidente de G/H est la droite projective $\mathbf{P}^1$ dans laquelle G opère par translation. De même, on compactifie le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$ par la droite projective où il opère par multiplication. Mais ces opérations sont très différentes. En effet, on peut recouvrir $\mathbf{P}^1$ par des ouverts affines stables par $\mathbf{C}^*$, à savoir $\mathbf{C}^* \cup \{0\}$ et $\mathbf{C}^* \cup \{\infty\}$, tandis que ∞ n'admet aucun voisinage ouvert affine stable par $\mathbf{C}$.

Plus généralement, le groupe additif $\mathbf{C}^n$ admet comme compactification l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n$ dans lequel il opère par translation; l'hyperplan à l'infini $\mathbf{P}^{n-1}$ est formé de points fixes. Si X est une sous-variété algébrique (lisse) de $\mathbf{P}^{n-1}$, alors l'éclatement de X dans $\mathbf{P}^n$ est une compactification projective (lisse) de $\mathbf{C}^n$. De plus, deux sous-variétés distinctes donnent des compactifications non isomorphes comme variétés avec action de $\mathbf{C}^n$ (en effet, les automorphismes de $\mathbf{P}^n$ qui commutent à l'action de $\mathbf{C}^n$ sont les translations). Ainsi, la classification des compactifications projectives lisses de $\mathbf{C}^n$ contient la classification des sous-variétés lisses de $\mathbf{P}^{n-1}$. En particulier, il existe des familles continues de telles compactifications lorsque $n \geq 2$.

A l'opposé, certains espaces homogènes admettent une unique compactification lisse. Considérons par exemple le groupe PGL_2, quotient du groupe GL_2 par les homothéties. On le compactifie par l'espace projectif $\mathbf{P}(M_2)$, où M_2 désigne l'espace des matrices 2×2 complexes. Le groupe $G := \mathrm{PGL}_2 \times \mathrm{PGL}_2$ opère transitivement dans PGL_2 par multiplication à gauche et à droite. Cette opération s'étend à $\mathbf{P}(M_2)$; le complémentaire Y de l'orbite ouverte est l'image dans $\mathbf{P}(M_2)$ des matrices de rang 1. Observons que Y est isomorphe à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ (en associant à chaque matrice de rang 1 son noyau et son image, deux droites vectorielles de $\mathbf{C}^2$), de façon compatible avec l'action de $\mathrm{PGL}_2 \times \mathrm{PGL}_2$. Ainsi, Y est une orbite de G dans X. Si X' est une autre compactification lisse de PGL_2, on a une application rationnelle $\varphi : X - \to X'$ qui est définie sur Y (car Y est de codimension 1 dans X). Puisque φ est équivariante, elle est partout définie. Mais comme PGL_2 est un ouvert affine de X', son complémentaire est de codimension 1; il en résulte que φ est un isomorphisme. Par contre, si on considère PGL_2 comme espace homogène sous lui-même opérant par multiplication à gauche, on peut en construire beaucoup de compactifications équivariantes à partir de X: il suffit d'y éclater des orbites fermées $\mathbf{P}^1 \times \{x\} \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 = Y$.

Lorsque G est *réductif* (c'est-à-dire G ne contient aucun sous-groupe fermé distingué isomorphe à $\mathbf{C}^n$), les travaux de Luna et Vust abordent la classification de toutes les compactifications d'un espace homogène G/H donné, et plus généralement des *plongements* de G/H. Il s'agit des couples (X, x) où X est une variété algébrique normale dans laquelle G opère, et où x est un point de X dont l'orbite est ouverte, et dont le groupe d'isotropie est H.

La théorie de Luna et Vust [LV] est particulièrement développée pour les espaces homogènes *sphériques*: ceux qui contiennent une orbite ouverte d'un sous-groupe résoluble de G. En effet, il se trouve que les espaces homogènes sphériques sont ceux dont chaque plongement ne contient qu'un nombre fini d'orbites [A]. De plus, les plongements de ces espaces homogènes sont classifiés par des objets combinatoires, baptisés *éventails coloriés*. Ils permettent de décrire les orbites et leurs adhérences dans un plongement, de reconnaître s'il est compact, projectif, affine, ... Dans le cas où G est un tore (c'est-à-dire G est isomorphe à $(\mathbf{C}^*)^n$), on retrouve la théorie plus classique des *variétés toriques* et des éventails qui les classifient [O], [Fu].

Le but de ces notes est d'exposer la théorie des plongements des espaces homogènes sphériques, avec plusieurs compléments. J'ai essayé de donner des démonstrations complètes de résultats parfois dispersés dans la littérature, en supposant connues des notions de géométrie algébrique (variétés quasi-projectives, normalité, diviseurs et fibrés en droites) et de groupes algébriques (pour ceux-ci, la référence standard de ce texte sera l'ouvrage très accessible [Hu]).

Dans la première partie de ces notes, on introduit deux invariants numériques associés à l'opération d'un groupe réductif complexe: le *rang*, qui mesure la non compacité des orbites, et la *complexité*, qui compte les paramètres dont dépendent les familles d'orbites. On démontre des propriétés de semicontinuité de ces invariants dus à Vinberg, Knop et Panyushev [Vi], [Kn3], [P]. Puis on définit d'autres invariants: un cône convexe polyédral associé à une variété affine, et un polytope convexe associé à une variété projective. Ce dernier est l'analogue algébrique du *polytope moment* (voir le texte de Luna). On obtient enfin un théorème fondamental sur l'action d'un groupe réductif au voisinage d'une orbite compacte [BLV], et on en donne des applications, entre autres à la structure locale du polytope ci-dessus.

La deuxième partie concerne les espaces homogènes sphériques et leurs plongements, les *variétés sphériques*: on les caractérise en termes de finitude du nombre d'orbites, et aussi en termes de représentations. Suivant Luna, on définit des cartes canoniques des variétés sphériques, qui sont stables par un sous-groupe parabolique; puis on ramène la description de ces cartes à celle des variétés sphériques affines avec point fixe. On introduit enfin les variétés sphériques *toroïdales*, dont la structure des orbites est particulièrement simple: pour une variété toroïdale lisse, le complémentaire de l'orbite ouverte est réunion de sous-variétés irréductibles lisses de codimension 1, et chaque adhérence d'orbite est intersection transverse de certaines de ces sous-variétés.

La troisième partie reproduit l'exposition par Knop [Kn1] de la théorie des plongements d'un espace homogène sphérique G/H, avec quelques variantes. Un objet fondamental de cette théorie est l'ensemble des valuations invariantes du corps des fonctions rationnelles sur G/H. Dans la quatrième partie, on donne des interprétations plus géométriques de cet ensemble, et on montre que c'est un cône convexe polyédral. Lorsque H est d'indice fini dans son normalisateur, on montre aussi que G/H admet un plongement canonique: l'unique plongement toroïdal projectif minimal. On l'appelle le *plongement magnifique*; l'éventail colorié associé est formé du cône des valuations et de ses faces.

En fait, on peut démontrer que le cône des valuations de G/H est le domaine fondamental d'un groupe fini $W_{G/H}$ engendré par des réflexions. De plus, $W_{G/H}$ est le groupe de Weyl d'un système de racines attaché à G/H, et qui généralise le "petit système de racines" des espaces symétriques. La construction de ces invariants combinatoires des espaces homogènes sphériques est intimement liée à la géométrie des variétés "magnifiques" [B2], [Kn4], [L1], [L2], [Wa].

Le groupe de Picard des variétés sphériques est l'objet de la cinquième partie. On y décrit les diviseurs de Cartier sur ces variétés, et on caractérise les diviseurs engendrés par leurs sections, ou amples, en suivant [B1]. On en déduit des critères pour qu'un plongement d'un espace homogène sphérique soit quasi-projectif, ou affine. Enfin, on étudie les faces du "polytope moment" associé à une variété sphérique projective, au moyen de la théorie de Luna et Vust.

Pour les variétés toriques, le polytope moment est à sommets entiers, et ceux-ci sont en bijection avec les points fixes du tore; plus généralement, les faces sont en bijection avec les adhérences des orbites. De plus, tout polytope convexe entier est le polytope moment d'une unique variété torique, et on peut lire sur le polytope si la variété est lisse. On obtient ainsi un dictionnaire très utile entre polytopes convexes entiers, et variétés toriques projectives munies d'un fibré en droites ample [Fu], [O].

Dans le cadre des variétés sphériques, les liens entre polytope moment et géométrie de la variété sont plus compliqués, et en grande partie inexplorés; en particulier, toutes les orbites peuvent contribuer à la création de sommets. On trouvera quelques résultats préliminaires en 5.3 et 5.4; la thèse de Foschi [Fo] et un article récent de Woodward [Wo] contiennent d'autres résultats sur les données combinatoires associées aux espaces homogènes sphériques, ainsi que des applications aux polytopes moment et à la géométrie hamiltonienne.

Table des matières

1. Quelques invariants discrets associés aux opérations des groupes réductifs

1.1. *Rang de l'action d'un groupe réductif*

On commence par des notations et rappels sur les opérations des groupes algébriques. Dans ce texte, une *variété* est une variété algébrique irréductible complexe. Lorsqu'un groupe algébrique linéaire complexe G opère dans une variété X, on dit que X est une *G-variété*. Alors G opère dans l'algèbre $\mathbf{C}[X]$ des fonctions régulières sur X, par

$$(gf)(x) := f(g^{-1}x).$$

Il opère de même dans le corps $\mathbf{C}(X)$ des fonctions rationnelles sur X.

Un *G-module rationnel* est un espace vectoriel complexe M muni d'une opération linéaire de G telle que, pour tout $m \in M$, l'espace vectoriel engendré par les gm ($g \in G$) est de dimension finie, et que l'action de G dans cet espace vectoriel est algébrique. Pour toute G-variété X, le G-module $\mathbf{C}[X]$ est rationnel [KSS; p.5], mais en général de dimension infinie.

Des exemples fondamentaux de G-variétés sont les G-modules M (rationnels de dimension finie), et les espaces projectifs associés $\mathbf{P}(M)$. L'action de G dans une sous-G-variété localement ferméee X d'un tel espace projectif est dite *linéaire*; une G-variété est *localement linéaire* si elle admet un recouvrement par des ouverts stables par G et linéaires. Dans ce texte, on ne considérera que des variétés localement linéaires; ceci comprend les variétés normales [KSS; p.64].

Lorsque le groupe réductif G opère dans une variété X, l'action de G dans $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{C}(X)$ va nous permettre de définir des invariants combinatoires. Pour cela, on aura besoin de résultats sur les représentations des groupes algébriques linéaires, qu'on rappelle brièvement.

Soit G un tel groupe, et soit M un G-module rationnel. On note $M^{(G)}$ l'ensemble des vecteurs propres de G dans M, et M^G l'ensemble des points fixes. Pour $m \in M^{(G)}$ et $g \in G$, on a $gm = \chi(g)m$ où $\chi : G \to \mathbf{C}^*$ est un homomorphisme de groupes algébriques: un *caractère* de G. On dit que m est de poids χ, et on note $m \in M^{(G)}_\chi$. L'ensemble des caractères de G est un groupe abélien pour la multiplication. On note $\mathcal{X}(G)$ ce groupe, et $\mathcal{X}(M)$ l'ensemble des poids de M.

Lorsque G est résoluble et connexe, $M^{(G)}$ est non trivial si M est non nul [Hu; 17.6]. Si de plus G est un tore, alors M est somme directe de ses espaces propres $M^{(G)}_\chi$ [Hu; 15.3,15.4].

Un G-module rationnel M est *simple* s'il n'admet aucun sous-module non trivial (alors M est de dimension finie); M est *semi-simple* s'il est somme directe de modules simples, ce qui équivaut à: tout sous-module de M admet un supplémentaire stable par G.

On montre que G est réductif si et seulement si tout G-module rationnel est semi-simple [Hu; 14.3]. Soit alors B un *sous-groupe de Borel* de G, c'est-à-dire un sous-groupe résoluble, connexe et maximal pour ces propriétés. Lorsque G est connexe, un G-module rationnel M est simple si et seulement si $M^{(B)}$ est une droite [Hu; 13.3]. Dans ce cas, la classe d'isomorphisme de M est uniquement déterminée par le poids χ associé à $M^{(B)}$; c'est le *plus grand poids* de M. On paramètre ainsi les G-modules simples par le sous-ensemble de $\mathcal{X}(B)$ formé des *poids dominants*. Dans l'espace vectoriel rationnel $\mathcal{X}(B)_{\mathbf{Q}}$, l'ensemble des poids dominants est l'intersection du réseau $\mathcal{X}(B)$ et d'un cône convexe, la *chambre de Weyl positive.*

On note désormais G un groupe réductif connexe, B un sous-groupe de Borel de G, et U l'ensemble des éléments unipotents de B. Alors U est un sous-groupe de B, et tout caractère de U est trivial. En particulier, tout vecteur propre de B est fixé par U.

Par exemple, on peut prendre pour G le groupe linéaire GL_n et pour B le sous-groupe formé des matrices triangulaires supérieures inversibles; alors U est formé des matrices triangulaires supérieures dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

En général, une G-variété X n'admet aucun recouvrement par des ouverts affines stables par G, comme le montre l'exemple de GL_n opérant dans $\mathbf{P}^{n-1}$. Cependant, on va voir qu'on peut recouvrir X par les translatés par G d'ouverts affines stables par B.

Proposition. *Soient X une G-variété et Y une sous-variété de X, fermée et stable par G. Il existe alors un ouvert X_0 de X, affine, stable par B et rencontrant Y, tel que la restriction*

$$\mathbf{C}[X_0]^{(B)} \to \mathbf{C}[X_0 \cap Y]^{(B)}$$

est surjective.

En particulier, lorsque G est un tore, toute G-variété admet un recouvrement par des ouverts affines stables par G.

Démonstration. On peut supposer que X est contenu dans l'espace projectif $\mathbf{P}(M)$ où M est un G-module. Soient $\overline{X}$, $\overline{Y}$ les adhérences de X, Y dans $\mathbf{P}(M)$; posons $\partial X := \overline{X} \setminus X$. Soient $I(\partial X)$, $I(\overline{Y})$ les idéaux homogènes de $\mathbf{C}[M]$ qui leur correspondent. Ces idéaux sont stables par G, et $I(\partial X)$ n'est pas contenu dans $I(\overline{Y})$ (car Y n'est pas contenu dans ∂X). On peut donc trouver $f \in I(\partial X)$ homogène et vecteur propre de B, tel que $f \notin I(\overline{Y})$. L'ouvert

$$X \cap (f \neq 0) = \overline{X} \cap (f \neq 0)$$

est alors affine et stable par B, et cet ouvert rencontre Y.

Les sous-variétés fermées $\overline{X}$, $\overline{Y}$ de $\mathbf{P}(M)$ définissent des cônes affines $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ dans M. Soit $\varphi \in \mathbf{C}[X_0 \cap Y]^{(B)}$. Il existe alors un entier $n \geq 0$ tel que φf^n appartient à $\mathbf{C}[\tilde{Y}]$. Cette algèbre est graduée, et φf^n est homogène et vecteur propre de B. La restriction $\mathbf{C}[\tilde{X}] \to \mathbf{C}[\tilde{Y}]$ est surjective, G-équivariante et préserve le degré. Il en résulte que φf^n s'étend en $\psi \in \mathbf{C}[\tilde{X}]^{(B)}$ homogène de même degré. Alors φ est la restriction de ψf^{-n}, un élément de $\mathbf{C}[X_0]^{(B)}$.

Définition. Soit X une B-variété. Le *groupe des poids* de X est l'ensemble $\mathcal{X}(\mathbf{C}(X))$, noté $\mathcal{X}(X)$. C'est un sous-groupe de $\mathcal{X}(B)$, et donc un groupe abélien libre de rang fini: le *rang de* X, noté $rg(X)$.

En associant à chaque $f \in \mathbf{C}(X)^{(B)}$ son poids, on définit une suite exacte

$$1 \to \mathbf{C}(X)^B \setminus \{0\} \to \mathbf{C}(X)^{(B)} \to \mathcal{X}(X) \to 0.$$

De plus, sous les hypothèses de la proposition, $\mathbf{C}(X)$ est le corps des fractions de $\mathbf{C}[X_0]$. On en déduit que tout élément de $\mathbf{C}(X)^{(B)}$ est quotient de deux éléments de $\mathbf{C}[X_0]^{(B)}$; ainsi, tout poids de B dans $\mathbf{C}(X)$ est différence de deux poids de B dans $\mathbf{C}[X_0]$. D'où le

Corollaire. *Pour toute G-variété X et pour toute sous-variété Y de X, fermée et stable par G, on a $\mathcal{X}(Y) \subseteq \mathcal{X}(X)$; en particulier, $rg(Y) \leq rg(X)$.*

Considérons par exemple une G-variété X homogène et compacte. Alors X est isomorphe à G/P pour un sous-groupe parabolique P de G; par suite, le groupe U a une orbite ouverte dans X (ceci résulte de la décomposition de Bruhat [Hu; 28.3]). Ainsi, tout vecteur propre de B dans $\mathbf{C}(X)$ est une fonction constante; autrement dit, $rg(X) = 0$.

Plus généralement, une G-variété est de rang nul si et seulement si elle est formée d'orbites compactes (ceci sera démontré en 1.4).

1.2. *Cônes et polytopes convexes associés à l'action d'un groupe réductif*

Soit X une G-variété affine. On note $\mathcal{X}(X)_{\mathbf{Q}}$ l'espace vectoriel rationnel $\mathcal{X}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, et on note $\mathcal{C}(X)$ la réunion des demi-droites de $\mathcal{X}(X)_{\mathbf{Q}}$, engendrées par les poids de B dans l'algèbre $\mathbf{C}[X]$.

Proposition 1. *L'ensemble $\mathcal{C}(X)$ est un cône convexe polyédral, qui engendre l'espace vectoriel $\mathcal{X}(X)_{\mathbf{Q}}$. De plus, pour tout $x \in X$, le cône $\mathcal{C}(\overline{Gx})$ (associé à l'adhérence de l'orbite Gx) est contenu dans $\mathcal{C}(X)$, avec égalité pour x dans un ouvert non vide de X.*

Démonstration. L'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres de B dans $\mathbf{C}[X]$ n'est autre que l'algèbre $\mathbf{C}[X]^U$; celle-ci est de type fini [Kr; III.3.2]. Soient $f_1, \ldots, f_r$ des générateurs de $\mathbf{C}[X]^U$ qui sont vecteurs propres de B; soient $\chi_1, \ldots, \chi_r$ leurs poids. Alors tout $\chi \in \mathcal{X}(\mathbf{C}[X])$ s'écrit $a_1\chi_1 + \cdots + a_r\chi_r$ avec des entiers $a_j \geq 0$, donc $\mathcal{C}(X)$ est le cône convexe engendré par $\chi_1, \ldots, \chi_r$. De plus, puisque tout élément de $\mathbf{C}(X)^{(B)}$ est quotient de deux éléments de $\mathbf{C}[X]^{(B)}$, le groupe $\mathcal{X}(X)$ est engendré par $\chi_1, \ldots, \chi_r$. La première assertion en résulte.

Soit $x \in X$. Puisque $\overline{Gx}$ est fermé dans X et stable par G, tout vecteur propre de B dans $\mathbf{C}[\overline{Gx}]$ s'étend en un vecteur propre de B dans $\mathbf{C}[X]$. Il en résulte que $\mathcal{C}(\overline{Gx})$ est contenu dans $\mathcal{C}(X)$. Si de plus $f_j(x) \neq 0$ pour tout i, alors $\chi_1, \ldots, \chi_r$ sont des poids de B dans $\mathbf{C}[\overline{Gx}]$, donc $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(\overline{Gx})$.

Remarque. Plus généralement, soit X' une sous-variété de X, fermée et stable par G; alors $\mathcal{C}(X')$ est contenu dans $\mathcal{C}(X)$. Lorsque $G = T$ est un tore et X est une adhérence d'orbite, on montre que $\mathcal{C}(X')$ est une face du cône convexe $\mathcal{C}(X)$; on définit ainsi une bijection décroissante entre les sous-variétés de X qui sont fermées et stables par T, et les faces de $\mathcal{C}(X)$. En particulier, l'adhérence d'une orbite d'un tore ne contient qu'un nombre fini d'orbites; ceci sera généralisé en 1.3.

Revenons au cas général, et déterminons la "partie linéaire" $\operatorname{lin} \mathcal{C}(X)$ du cône $\mathcal{C}(X)$, c'est-à-dire le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans ce cône. On identifie $\mathcal{X}(G)$ à un sous-groupe de $\mathcal{X}(B)$. Pour tout sous-groupe H de G, on note $\mathcal{X}(G)^H$ le groupe des caractères de G dont la restriction à H est triviale, et $\mathcal{X}(G)^H_{\mathbf{Q}}$ l'espace vectoriel rationnel associé.

Proposition 2. *Pour tout $x \in X$ tel que Gx est fermée dans X, on a $\mathcal{X}(G)^{G_x}_{\mathbf{Q}} \subseteq \operatorname{lin} \mathcal{C}(X)$. De plus, il existe x tel que l'égalité ait lieu.*

Démonstration. Si Gx est fermée dans X, alors $\mathcal{C}(X)$ contient $\mathcal{C}(Gx) = \mathcal{C}(G/G_x)$. Mais ce dernier contient $\mathcal{X}(G)^{G_x}$, d'où la première assertion.

Pour la seconde assertion, on peut supposer d'après la proposition 1 que G a une orbite ouverte dans X; alors X contient une unique orbite fermée Gx [Kr; II.3.3]. Soit χ un point non nul de $\operatorname{lin}\mathcal{C}(X)$. On peut trouver un entier $n > 0$ tel que $n\chi$ et $-n\chi$ sont des poids de B dans $\mathbf{C}[X]$. Soient $f_{n\chi}, f_{-n\chi} \in \mathbf{C}[X]$ des vecteurs propres pour ces poids. Le produit $f_{n\chi}f_{-n\chi}$ est un vecteur propre de B dans $\mathbf{C}[X]$, de poids nul; il est donc invariant par G. Puisque X contient une orbite ouverte de G, ce produit est une constante non nulle, donc $f_{n\chi}$ n'a pas de zéro dans X. Ainsi, $f_{n\chi}$ se restreint en une fonction inversible sur $Gx \cong G/G_x$, c'est-à-dire en un multiple non nul d'un caractère de G trivial sur G_x [KSS; p.78].

On va déduire de la proposition 2 un critère dû à Sjamaar [S] pour que le cône $\mathcal{C}(X)$ soit *saillant*, c'est-à-dire ne contienne aucune droite; on obtiendra aussi un critère pour que $\mathcal{C}(X)$ soit un espace vectoriel. On note $[G,G]$ le groupe dérivé de G; c'est un groupe algébrique semi-simple, et le quotient $G/[G,G]$ est un tore [Hu; 19.5].

Corollaire. *(i) Le cône $\mathcal{C}(X)$ est saillant si et seulement si $G = [G,G]G_x$ pour tout $x \in X$ tel que Gx est fermé dans X.*
(ii) Le cône $\mathcal{C}(X)$ est un espace vectoriel si et seulement si: $[G,G]$ opère trivialement dans X, et Gx est fermée dans X pour tout x dans un ouvert non vide de X.

Démonstration. (i) L'espace $\operatorname{lin}\mathcal{C}(X)$ est trivial si et seulement si $\mathcal{X}(G)^{G_x}$ est trivial pour tout $x \in X$ tel que Gx est fermée. Puisque $\mathcal{X}(G)$ est égal à $\mathcal{X}(G/[G,G])$ et que $G/[G,G]$ est un tore, cela signifie que $G = [G,G]G_x$.

(ii) ($\Rightarrow$) L'ensemble des poids dominants du groupe semisimple $[G,G]$ étant un cône saillant, ce groupe opère trivialement dans $\mathbf{C}[X]$ et donc dans X. Ainsi, on peut supposer que G est un tore. Soit $x \in X$ tel que $\mathcal{C}(\overline{Gx}) = \mathcal{C}(X)$. Par l'argument de la preuve de la proposition 2, tout vecteur propre de G dans $\mathbf{C}[\overline{Gx}]$ est inversible. Ainsi, l'idéal de $\overline{Gx} \setminus Gx$ est trivial, donc Gx est fermé dans X.

($\Leftarrow$) résulte des propositions 1 et 2.

On va introduire un analogue de $\mathcal{C}(X)$ lorsque X est une G-variété projective. Pour cela, on commence par rappeler la notion de fibré en droites G-linéarisé.

Définition. Soient X une G-variété et $p : \mathcal{L} \to X$ un fibré en droites sur X. Une *G-linéarisation* de $\mathcal{L}$ est une action de G dans la variété $\mathcal{L}$, telle que p est G-équivariante et que G opère linéairement dans les fibres de $\mathcal{L}$.

Le groupe G opère alors dans l'espace des sections $\Gamma(X, \mathcal{L})$, et ce dernier est un G-module rationnel [KSS; p.67]. Observons qu'une G-linéarisation de $\mathcal{L}$ définit une G-linéarisation de toute puissance tensorielle $\mathcal{L}^{\otimes n}$, et que G opère dans l'algèbre graduée

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$$

par automorphismes.

Pour tout fibré en droites $\mathcal{L}$ sur une G-variété *normale* X, il existe un entier positif n tel que $\mathcal{L}^{\otimes n}$ admet une G-linéarisation; si de plus l'algèbre $\mathbf{C}[G]$ est factorielle, on peut prendre $n = 1$ [KSS; p.67].

Soit X une G-variété projective, et $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample et G-linéarisé sur X. Notons $P(X,\mathcal{L})$ le sous-ensemble de $\mathcal{X}(B)_{\mathbf{Q}}$ formé des points qui s'écrivent χ/n où n est un entier positif et χ est un poids de B dans $\Gamma(X,\mathcal{L}^{\otimes n})$.

Proposition 3. *Avec les notations précédentes, $P(X,\mathcal{L})$ est un polytope convexe dans $\mathcal{X}(B)_{\mathbf{Q}}$. L'espace affine engendré par ce polytope a pour direction $\mathcal{X}(X)_{\mathbf{Q}}$; en particulier, la dimension de $P(X,\mathcal{L})$ est égale au rang de X. De plus, $P(X,\mathcal{L})$ contient $P(\overline{Gx},\mathcal{L})$ pour tout $x \in X$, avec égalité pour x dans un ouvert non vide de X.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{L}$ est ample, l'algèbre

$$R := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(X,\mathcal{L}^{\otimes n})$$

est de type fini. D'après [Kr; III.3.2], la sous-algèbre

$$R^U = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(X,\mathcal{L}^{\otimes n})^U.$$

est aussi de type fini. Soient $f_1,\ldots,f_r$ des générateurs de R^U, homogènes et vecteurs propres de B; soient $(n_1,\chi_1),\ldots,(n_r,\chi_r)$ leurs degrés et poids, et soit P l'enveloppe convexe des points $\chi_1/n_1,\ldots,\chi_r/n_r$. Si $f \in \Gamma(X,\mathcal{L}^{\otimes n})$ est vecteur propre de B de poids χ, alors f est combinaison linéaire de monômes de la forme $f_1^{a_1}\cdots f_r^{a_r}$ avec $a_1n_1+\cdots+a_rn_r = n$, d'où

$$\frac{\chi}{n} = \sum_{j=1}^{r} \frac{a_j n_j}{n}\frac{\chi_j}{n_j}.$$

Ainsi, tout point de $P(X,\mathcal{L})$ est dans P. Réciproquement, tout point de P s'écrit sous la forme

$$p = \sum_{j=1}^{r} t_j\chi_j$$

avec des $t_j \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$ tels que $t_1n_1+\cdots+t_rn_r = 1$. Soit n un dénominateur commun à $t_1,\ldots,t_r$; alors

$$f_1^{nt_1}\cdots f_r^{nt_r}$$

est vecteur propre de B dans $\Gamma(X,\mathcal{L}^{\otimes n})$ de poids $n(t_1\chi_1+\cdots+t_r\chi_r) = np$. Par suite, $p \in P(X,\mathcal{L})$. Enfin, tout élément de $\mathbf{C}(X)^{(B)}$ est quotient de deux vecteurs propres de B dans un même espace $\Gamma(X,\mathcal{L}^{\otimes n})$; la seconde assertion en résulte. La preuve de la dernière assertion est analogue à celle de la proposition 1.

Exemples. 1) Soit G un tore; soit X^G l'ensemble de ses points fixes dans X, et soient $X_1,\ldots,X_r$ les composantes connexes de X^G. Si $x \in X_j$, le groupe G opère dans la fibre $\mathcal{L}_x$ par un caractère qui ne dépend que de i; notons ce caractère $\chi_j(\mathcal{L})$. On montre alors que $P(X,\mathcal{L})$ est l'enveloppe convexe des points $-\chi_1(\mathcal{L}),\ldots,-\chi_r(\mathcal{L})$.

2) Soit X une G-variété compacte homogène. Ecrivons $X = G/P$ où P est un sous-groupe parabolique de G. Quitte à remplacer P par un conjugué, on peut supposer que le produit

BP est ouvert dans G. Si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites G-linéarisé sur G/P, alors P opère dans la fibre de $\mathcal{L}$ au point de base (la classe de P) par un caractère χ; ceci définit une bijection des fibrés G-linéarisés (appelés aussi *homogènes*) sur les caractères de P [KSS; p.65]. De plus, le G-module $\Gamma(X,\mathcal{L})$ est simple, de plus grand poids $-\chi$ si ce poids est dominant; sinon, $\Gamma(X,\mathcal{L})=0$. On en déduit que $\mathcal{L}$ est engendré par ses sections globales (resp. ample) si et seulement si $-\chi$ est dominant (resp. est dominant et ne s'étend à aucun sous-groupe contenant strictement P). Dans ce dernier cas, $P(X,\mathcal{L})$ est formé du point $-\chi$ [Hu; 31.6].

3) Soit $G=\mathrm{GL}_n$, et soit M l'espace des formes quadratiques en n variables $x_1,\ldots,x_n$, dans lequel G opère par changement linéaire de variables; soit enfin $X=\mathbf{P}(M)$ muni du fibré ample G-linéarisé $\mathcal{O}(1)$. On va déterminer les sommets de $P(X,\mathcal{L})$.

Pour $1\leq j\leq n$, soit V_j le sous-espace de $\mathbf{C}^n$ défini par l'annulation des x_k $(k>j)$; notons $f_j : M\to\mathbf{C}$ l'application qui associe à toute forme quadratique le discriminant de sa restriction à V_j. Alors f_j est polynomiale, homogène de degré j, et vecteur propre de B (car V_j est stable par B). En notant π_j le plus grand poids du G-module simple $\wedge^j\mathbf{C}^n$, on vérifie que le poids de f_j par rapport à B est $2\pi_j$. De plus, l'ensemble des $q\in M$ tels que $f_j(q)\neq 0$ pour tout j n'est autre que l'orbite $B(x_1^2+\cdots+x_n^2)$, et $f_1,\ldots,f_n$ sont des équations des composantes irréductibles du complémentaire de cette orbite (en effet, cela résulte de l'algorithme pour décomposer une forme quadratique en sommes de carrés). On en déduit que tout vecteur propre de B dans $\mathbf{C}[M]$ est proportionnel à un monôme $f_1^{a_1}\cdots f_n^{a_n}$. Puisque chaque $\Gamma(X,\mathcal{L}^{\otimes n})$ est formé des fonctions polynomiales sur M, homogènes de degré n, on conclut que $P(X,\mathcal{L})$ est l'enveloppe convexe des points $2\pi_j/j$ où $1\leq j\leq n$. En particulier, $P(X,\mathcal{L})$ a des sommets non entiers lorsque $n\geq 3$, car chaque π_j est indivisible dans le groupe des caractères de B.

Revenons au cas d'une G-variété affine X. Il existe alors un G-module M qui contient X comme sous-variété fermée, stable par G. Suivant Sjamaar [S; Theorem 4.8], on va exprimer $\mathcal{C}(X)$ en termes du polytope associé aux "directions asymptotiques" de X.

Plongeons M dans l'espace projectif $\mathbf{P}(M\oplus\mathbf{C})$, notons $\overline{X}$ l'adhérence de X et $\mathcal{L}$ la restriction à $\overline{X}$ du fibré $\mathcal{O}(1)$ avec sa G-linéarisation naturelle. Enfin, soient $Y_1,\ldots,Y_r$ les composantes irréductibles de l'intersection de $\overline{X}$ avec l'hyperplan à l'infini $\mathbf{P}(M\oplus 0)$. On peut maintenant énoncer le résultat suivant, dont on donnera une démonstration plutôt laborieuse.

Théorème. *Avec les notations précédentes, le cône $\mathcal{C}(X)$ est engendré par $P(\overline{X},\mathcal{L})$ et ce dernier est l'enveloppe convexe de 0 et de $P(Y_1,\mathcal{L}),\ldots,P(Y_r,\mathcal{L})$.*

Démonstration. Pour tout entier $n\geq 0$, notons $\mathbf{C}[M]_{\leq n}$ l'espace des fonctions polynomiales sur M qui sont de degré au plus n. Soit $\mathbf{C}[X]_{\leq n}$ l'image de cet espace dans $\mathbf{C}[X]$. Notons enfin t l'image dans $\mathbf{C}[X]$ de la projection de $M\oplus\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}$. Celle-ci est un élément de $\mathbf{C}[M]_{\leq 1}$, donc $t\in\mathbf{C}[X]_{\leq 1}$. On peut voir t comme une section G-invariante de $\mathcal{L}$ sur $\overline{X}$. Puisque $t\neq 0$, le polytope $P(\overline{X},\mathcal{L})$ contient 0.

Plus généralement, l'espace $\Gamma(\mathbf{P}(M\oplus\mathbf{C}),\mathcal{L}^{\otimes n})$ s'identifie à $\mathbf{C}[M]_{\leq n}$; ceci identifie $\mathbf{C}[X]_{\leq n}$ à l'image de la restriction

$$\Gamma(\mathbf{P}(M\oplus\mathbf{C}),\mathcal{L}^{\otimes n})\to\Gamma(\overline{X},\mathcal{L}^{\otimes n}).$$

Cette application est surjective pour n assez grand. Il existe donc un entier $n_0 > 0$ tel que

$$\Gamma(\overline{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}) = \mathbf{C}[X]_{\leq n}$$

pour tout $n \geq n_0$.

Soit $f \in \mathbf{C}[X]$ un vecteur propre de B de poids χ. Pour n assez grand, on peut considérer f comme un élément de $\Gamma(\overline{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$; alors $\chi/n \in P(\overline{X}, \mathcal{L})$. Ainsi, $\mathcal{C}(X)$ est contenu dans le cône sur $P(\overline{X}, \mathcal{L})$.

Réciproquement, soit $p \in P(\overline{X}, \mathcal{L})$. Ecrivons $p = \chi/n$ où χ est le poids d'un vecteur propre f de B dans $\Gamma(\overline{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$. Alors f^{n_0} est un vecteur propre de B dans $\mathbf{C}[X]_{\leq nn_0}$, de poids $n_0\chi = nn_0 p$. Par suite, $p \in \mathcal{C}(X)$. Nous avons montré que le cône $\mathcal{C}(X)$ est engendré par $P(\overline{X}, \mathcal{L})$.

Soit $A_{\overline{X}}$ l'algèbre des coordonnées homogènes de $\overline{X}$; définissons de même $A_{Y_1}, \ldots, A_{Y_r}$. Chaque A_{Y_j} est un quotient de $A_{\overline{X}}$, donc $P(Y_j, \mathcal{L})$ est contenu dans $P(\overline{X}, \mathcal{L})$. Ainsi l'enveloppe convexe de 0 et des $P(Y_j, \mathcal{L})$ est contenue dans $P(\overline{X}, \mathcal{L})$.

Réciproquement, soit p un élément non nul de $P(\overline{X}, L)$. Alors $A_{\overline{X}}$ contient une infinité d'éléments homogènes de degré n et de poids np. D'autre part, le G-module gradué $A_{\overline{X}}$ est isomorphe à

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} t^n A_{\overline{X}}/t^{n+1} A_{\overline{X}}.$$

Ce dernier est un quotient de

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} (A_{\overline{X}}/tA_{\overline{X}})t^n.$$

Par suite, $A_{\overline{X}}/tA_{\overline{X}}$ contient une infinité de vecteurs propres de B de poids np, homogènes de degré d_n pour $0 < d_n \leq n$. D'autre part, le quotient de $A_{\overline{X}}/tA_{\overline{X}}$ par son idéal formé des éléments nilpotents est l'algèbre des coordonnées homogènes sur

$$\overline{X} \cap (t = 0) = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r.$$

En particulier, $A_{\overline{X}}/tA_{\overline{X}}$ possède r idéaux premiers minimaux $I_1, \ldots, I_r$, et les quotients correspondants sont $A_{Y_1}, \ldots, A_{Y_r}$. D'après le lemme ci-dessous, il existe donc $t \in]0, 1]$ et un indice j tels que $p/t \in P(Y_j, \mathcal{L})$. Ainsi, p est dans l'enveloppe convexe de 0 et $P(Y_j, \mathcal{L})$.

Lemme. *Soit A une algèbre graduée, de type fini, dans laquelle G opère par automorphismes. Soit $p \in \mathcal{X}(B)_{\mathbf{Q}}$ non nul, tel que A contient un vecteur propre de B de poids np, homogène de degré d_n, pour une infinité d'entiers $n > 0$ et pour une suite (d_n) d'entiers tels que $0 < d_n \leq n$. Alors il existe un idéal premier minimal I de A, et un entier $m > 0$, tels que A/I contient un vecteur propre de B de poids mp, homogène de degré mt où $0 < t \leq 1$.*

Démonstration. L'algèbre A^U est graduée et de type fini; on voit facilement que ses idéaux premiers mininaux sont $I_1^U, \ldots, I_r^U$. En remplaçant A par A^U et G par le tore B/U, on peut donc supposer que G est un tore. Alors A admet une filtration finie par des idéaux homogènes et stables par G, telle que chaque sous-quotient est de la forme $(A/J)x$ où J

est un idéal premier homogène et stable par G, et où x est homogène (d'un degré d) et vecteur propre de G (d'un poids λ). Par suite, il existe un tel sous-quotient $(A/J)x$ et une infinité d'entiers n tels que

$$(np, d_n) = (\lambda, d) + (\mu_n, e_n)$$

où A/J contient un vecteur propre de G de poids μ_n, homogène de degré e_n. Ainsi, il en est de même pour A/I où I est un idéal premier minimal de A contenu dans J.

Observons que $e_n \neq 0$ pour tout n assez grand (en effet, si $e_n = 0$ alors $\mu_n = 0$). Soit P le polytope convexe associé à la variété projective définie par A/I. Alors $\mu_n/e_n \in P$ si $e_n \neq 0$; en particulier, la suite (μ_n/e_n) reste bornée lorsque $n \to \infty$. Puisque

$$\frac{\mu_n}{e_n} = \frac{np - \lambda}{d_n - d},$$

il en résulte que toute valeur d'adhérence t de la suite (d_n/n) vérifie: $t > 0$ et $p/t \in P$.

1.3. *Complexité de l'action d'un sous-groupe de Borel*

Définition. Soit Γ un groupe algébrique linéaire opérant dans une variété X. La *complexité* de cette opération est la codimension minimale d'une orbite de Γ dans X, notée $c_\Gamma(X)$.

D'après un théorème de Rosenlicht [KSS; p. 23], il existe un ouvert non vide X_0 de X et un morphisme π de X_0 sur une variété X_0/Γ, qui vérifient les deux conditions suivantes:
(i) Les fibres de π sont les orbites de Γ dans X_0.
(ii) π induit un isomorphisme de $\mathbf{C}(X_0/\Gamma)$ sur $\mathbf{C}(X_0)^\Gamma = \mathbf{C}(X)^\Gamma$.

Il en résulte que $c_\Gamma(X)$ est la dimension de X_0/Γ, qui s'interprète comme la dimension de la famille des orbites générales de Γ dans X; c'est aussi le degré de transcendance du corps $\mathbf{C}(X)^\Gamma$ sur $\mathbf{C}$.

Si de plus Y est une sous-variété de X, fermée et stable par Γ, il peut arriver que $c_\Gamma(Y) > c_\Gamma(X)$. Par exemple, soit $\Gamma = \mathrm{GL}_n$ opérant dans l'espace X des matrices $n \times n$ par multiplication à gauche, et soit Y l'ensemble des matrices de rang au plus 1. Alors $c_\Gamma(X) = 0$ car les matrices inversibles forment une orbite ouverte de Γ dans X. Mais $c_\Gamma(Y) = n-1$; plus précisément, le quotient Y/G est isomorphe à $\mathbf{P}^{n-1}$. En effet, à multiplication à gauche près par une matrice inversible, toute matrice de rang 1 est uniquement déterminée par son noyau, un hyperplan de $\mathbf{C}^n$.

Cependant, pour l'action d'un sous-groupe de Borel de G dans une G-variété, on a le résultat suivant, dû à Vinberg [Vi].

Théorème. *Pour toute G-variété X et pour toute sous-variété Y fermée et stable par B, on a $c_B(Y) \leq c_B(X)$ et $rg(Y) \leq rg(X)$.*

Démonstration (d'après [Kn3]). Le groupe G est engendré par ses sous-groupes paraboliques qui contiennent strictement B et qui sont minimaux pour cette propriété (ceci résulte par exemple de [Hu; 29.3]. On peut donc trouver une suite de sous-groupes paraboliques minimaux $(P_1, \ldots, P_r)$ telle que $P_1 \cdots P_r Y$ est stable par G. Ainsi, il suffit de montrer les assertions suivantes:

(i) Si Y est une sous-variété de X, fermée et stable par B, et si P est un sous-groupe parabolique minimal de G contenant B, alors PY est une sous-variété fermée de X, vérifiant $c_B(Y) \leq c_B(PY)$ et $rg(Y) \leq rg(PY)$.

(ii) $c_B(Y) \leq c_B(X)$ si Y est une sous-variété de X, fermée et stable par G (alors on a déjà vu que $rg(Y) \leq rg(X)$).

Montrons (i); on peut supposer $PY \neq Y$. Le groupe B opère dans $P \times Y$ par

$$p(b, y) = (pb^{-1}, by)$$

et le quotient par cette action existe; notons-le $P \times_B Y$. On peut voir ce quotient comme le sous-ensemble de $P/B \times X$ formé des (pB, x) tels que $x \in pY$. L'action de P dans $P \times Y$ via la multiplication à gauche de P munit $P \times_B Y$ d'une structure de P-variété; l'application B-invariante $(p, y) \mapsto py$ définit un P-morphisme

$$\pi : P \times_B Y \to PY$$

(restriction de la projection $P/B \times X \to X$). Puisque P/B est isomorphe à la droite projective [Hu; 25.3], π est propre et on a

$$\dim(P \times_B Y) = \dim(P/B) + \dim(Y) = \dim(Y) + 1.$$

Par suite, π est surjectif et de degré fini; son image PY est une sous-variété fermée de X.

Soit $s \in P \setminus B$; posons $B_s := B \cap sBs^{-1}$. Alors $BsB/B = B/B_s$ est ouvert dans P/B, donc $B \times_{B_s} sY$ est ouvert dans $P \times_B Y$. D'où

$$c_B(PY) = c_B(P \times_B Y) \geq c_B(B \times_{B_s} sY) = c_{B_s}(sY) = c_{B_s}(Y) \geq c_B(Y) \ .$$

De même, $\mathcal{X}(Y)$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathcal{X}(P \times_B Y)$. Mais comme π est de degré fini, $\mathcal{X}(PY)$ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{X}(P \times_B Y)$, d'où $rg(Y) \leq rg(PY)$.

Montrons maintenant (ii). Soit X_0 comme dans la proposition 1.1 et soit $f \in \mathbf{C}(Y)^B$ non nulle. On peut écrire $f = u/v$ où $u, v \in \mathbf{C}[X_0 \cap Y]$ sont vecteurs propres de B de même poids. On peut ensuite relever u, v en des fonctions régulières sur X_0 et vecteurs propres de B; ainsi, f se relève en une fonction rationnelle sur X, invariante par B et définie sur Y. Il en résulte que le degré de transcendance de $\mathbf{C}(Y)^B$ est au plus le degré de transcendance de $\mathbf{C}(X)^B$.

Corollaire. *Soit X une G-variété. Si B a une orbite ouverte dans X, alors B n'a qu'un nombre fini d'orbites dans X.*

Démonstration. Soit Y une sous-variété fermée de X, stable par B, contenant une infinité d'orbites de B, et minimale pour ces propriétés. D'après le théorème ci-dessus, on a $c_B(Y) = 0$, c'est-à-dire: Y contient une orbite ouverte $\mathcal{O}$ de B. Alors $Y \setminus \mathcal{O}$ est stable par B, strictement contenue dans Y, et contient une infinité d'orbites de B. Il en est donc de même pour une composante irréductible de $Y \setminus \mathcal{O}$, ce qui est absurde.

On va maintenant donner une interprétation algébrique de la complexité.

Proposition. *(i) Soit X une G-variété affine et soit χ un point de l'intérieur relatif de $\mathcal{C}(X)$. Alors l'espace*

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbf{C}[X]^{(B)}_{n\chi}$$

est une algèbre graduée de type fini, et de dimension $c_B(X)+1$.
(ii) Soit X une G-variété projective et soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample et G-linéarisé sur X; soit χ un point de l'intérieur relatif de $P(X,\mathcal{L})$. Alors l'espace

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(X,\mathcal{L}^{\otimes n})^{(B)}_{n\chi}$$

est une algèbre graduée de type fini, de dimension $c_B(X)+1$.

Démonstration. (i) L'algèbre $\mathbf{C}[X]^U$ est de type fini, et B opère dans cette algèbre via son quotient B/U, un tore noté T. Quitte à remplacer T par un revêtement fini, on peut supposer que $\chi \in \mathcal{X}(T)$. Soit t une indéterminée de poids $-\chi$; alors l'algèbre

$$A := (\mathbf{C}[X]^U \otimes \mathbf{C}[t])^T$$

est de type fini, et isomorphe à $\oplus_{n=0}^{\infty} \mathbf{C}[X]^{(B)}_{n\chi}$.

Soit K le corps des fractions de l'algèbre graduée A, et soit K_0 le sous-corps de K formé des éléments homogènes de degré 0. Alors le degré de transcendance de K_0 est $\dim(A)-1$, et K_0 est contenu dans $\mathbf{C}(X)^B$. Pour montrer que $c_B(X)=\dim(A)-1$, il suffit de vérifier que $K_0=\mathbf{C}(X)^B$.

Soit $f \in \mathbf{C}(X)^B$. On peut écrire $f=u/v$ avec $u,v \in \mathbf{C}[X]^{(B)}$ de même poids λ. Avec les notations de la preuve de la proposition 1.2, écrivons $\lambda=\sum_{j=1}^r a_j\chi_j$ où les a_j sont des entiers non négatifs. Puisque χ est dans l'intérieur de $\mathcal{C}(X)$, on peut écrire $\chi=\sum_{j=1}^r t_j\chi_j$ où les t_j sont des rationnels positifs. Soit n un entier tel que $nt_1-a_1,\ldots,nt_r-a_r$ sont des entiers non négatifs. Posons

$$\varphi := \prod_{j=1}^{r} f_j^{nt_j-a_j}.$$

Alors $u\varphi$, $v\varphi$ sont des vecteurs propres de B dans $\mathbf{C}[X]$ de poids $n\chi$, et $f=(u\varphi)/(v\varphi)$.

La preuve de (ii) est similaire.

Remarque. Il résulte de (i) que la complexité d'une G-variété affine X est le plus petit entier c tel que la multiplicité dans $\mathbf{C}[X]$ du G-module simple de plus grand poids $n\chi$ croît au plus comme n^c. On en déduit que X contient une orbite ouverte de B si et seulement si le G-module $\mathbf{C}[X]$ est sans multiplicité (c'est-à-dire somme directe de sous-modules simples deux à deux non isomorphes). Ceci sera généralisé en 2.1.

1.4. *Structure locale au voisinage d'une orbite compacte et applications*

On va établir un résultat de structure locale pour l'action de G dans l'espace projectif d'un G-module M, au voisinage d'une orbite fermée Y. L'analogie avec les actions différentiables des groupes compacts suggère l'existence d'un voisinage de Y dans $\mathbf{P}(M)$, stable par G et isomorphe (de façon équivariante) à un voisinage stable par G de la section nulle dans le fibré normal de Y. Il en résulterait que Y admet une rétraction locale (c'est-à-dire une application rationnelle $\varphi : \mathbf{P}(M) - \to Y$ définie au voisinage de Y, et telle que

$\varphi(y) = y$ pour tout $y \in Y$) équivariante; mais cela est faux en général, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Comme dans l'exemple 3 en 1.2, soit $G = \mathrm{GL}_n$ et soit M l'espace des formes quadratiques en les variables $x_1, \ldots, x_n$, dans lequel G opère par changement linéaire de variables. Les orbites de G dans M sont les formes quadratiques de rang fixé; par suite, G a une unique orbite fermée Y dans $\mathbf{P}(M)$, l'image des formes de rang 1. Soit $y = [x_1^2]$; alors $y \in Y$ et le groupe d'isotropie G_y est le stabilisateur de l'hyperplan $(x_1 = 0)$. Le groupe d'isotropie du point $[x_1^2 + \cdots + x_n^2]$ est engendré par le groupe orthogonal O_n et par les homothéties. Ce groupe ne stabilise aucun hyperplan; autrement dit, il n'est conjugué à aucun sous-groupe de G_y. Par suite, Y n'admet pas de rétraction locale équivariante dans $\mathbf{P}(M)$.

Cependant, on va décrire l'action d'un sous-groupe parabolique de G dans un ouvert affine de $\mathbf{P}(M)$ qui rencontre Y. En effet, soit η la forme linéaire sur M définie par $\eta(q) = q(1, 0, \ldots, 0)$. Toute forme quadratique q telle que $\eta(q) \neq 0$ s'écrit de façon unique

$$q(x_1, \ldots, x_n) = c(x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 + q'(x_2, \ldots, x_n)$$

où c est un nombre complexe non nul, $(a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^{n-1}$, et q' est une forme quadratique.

Soit $\mathbf{P}(M)_\eta$ l'ouvert de $\mathbf{P}(M)$ où η ne s'annule pas; alors $\mathbf{P}(M)_\eta$ coupe Y suivant l'ensemble formé des $[(x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2]$. Cet ensemble est l'orbite de y sous le groupe des applications de la forme

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n).$$

Observons que ce groupe est le radical unipotent $R_u(P)$ où P est le groupe d'isotropie du point $[1, 0, \ldots, 0]$ de $\mathbf{P}(\mathbf{C}^n)$, autrement dit, le groupe d'isotropie de $[\eta]$. De plus, P est un sous-groupe parabolique de G, et l'intersection $P \cap G_y =: L$ est isomorphe à $\mathbf{C}^* \times \mathrm{GL}_{n-1}$; c'est un sous-groupe réductif maximal de P et de G_y, et le groupe P est produit semi-direct du sous-groupe distingué $R_u(P)$ avec L.

Soit S l'image dans $\mathbf{P}(M)$ de l'ensemble des formes quadratiques qui s'écrivent

$$cx_1^2 + q'(x_2, \ldots, x_n)$$

avec $c \in \mathbf{C}^*$. Alors S est stable par L, et l'application

$$\begin{array}{ccc} R_u(P) \times S & \to & \mathbf{P}(M)_\eta \\ (g, [q]) & \mapsto & [gq] \end{array}$$

est un isomorphisme P-équivariant, où $P = R_u(P)L$ opère dans $R_u(P) \times S$ par

$$ul(g, x) = (ulgl^{-1}, lx).$$

On va obtenir un résultat analogue pour un groupe réductif G, un G-module M, et une orbite fermée Y de G dans $\mathbf{P}(M)$. Le stabilisateur de tout point de Y est alors un sous-groupe parabolique de G. On peut donc trouver $y \in Y$ tel que By est ouvert dans

Y. Choisissons $m \in M$ tel que $y = [m]$. Il existe alors $\eta \in (M^*)^{(B)}$ tel que $\langle \eta, m\rangle = 1$. Soit P le stabilisateur dans G de $[\eta]$; c'est un sous-groupe parabolique de G, opposé à G_y. Autrement dit, $L := P \cap G_y$ est un sous-groupe réductif maximal de P et de G_y. L'ouvert affine $\mathbf{P}(M)_\eta$ de $\mathbf{P}(M)$ est stable par P et contient $By = Py$; on va décrire l'action de P dans cet ouvert. On note $R_u(P)$ le radical unipotent de P; on a la décomposition de Levi $P = R_u(P)L$ [Hu; 30.2].

Théorème. *Avec les notations précédentes, il existe une sous-variété fermée S de $\mathbf{P}(M)_\eta$, stable par L et contenant y, telle que l'application*

$$\begin{array}{rccc} \iota: & R_u(P) \times S & \to & \mathbf{P}(M)_\eta \\ & (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

est un isomorphisme P-équivariant.

Démonstration. On commence par se ramener au cas où le G-module M est simple. Pour cela, considérons le sous-G-module de M engendré par m, noté $\langle Gm\rangle$, et aussi le sous-G-module de M^* engendré par η, noté $\langle G\eta\rangle$. Ces modules sont simples, et on a

$$M = \langle Gm\rangle \oplus \langle G\eta\rangle^\perp.$$

La projection correspondante de M sur $\langle Gm\rangle$ induit une application rationnelle

$$\varphi : \mathbf{P}(M) - \to \mathbf{P}(\langle Gm\rangle)$$

qui est G-équivariante, et définie sur $\mathbf{P}(M)_\eta$; ce dernier est l'image inverse de $\mathbf{P}(\langle Gm\rangle)_\eta$. De plus, Y est contenue dans $\mathbf{P}(\langle Gm\rangle)$, et la restriction de φ à Y est l'identité. Par suite, si le théorème est vrai pour $\mathbf{P}(\langle Gm\rangle)$ avec une sous-variété S, il est aussi vrai pour $\mathbf{P}(M)$ avec $\varphi^{-1}(S)$.

On suppose désormais que M est simple. Considérons l'espace tangent $T_m(Gm)$ à l'orbite Gm. Puisque m est vecteur propre de P de poids non nul, $T_m(Gm)$ est stable par P et contient la droite $\mathbf{C}m$. Comme L est un sous-groupe réductif de P, on peut trouver une décomposition

$$M = T_m(Gm) \oplus E$$

où E est stable par L. On pose

$$S := \mathbf{P}(\mathbf{C}m + S)_\eta.$$

C'est une sous-variété fermée de $\mathbf{P}(M)_\eta$, stable par L et contenant y; elle est isomorphe à l'espace affine $m + E$. Observons que S est transverse à Y en y dans $\mathbf{P}(M)$, c'est-à-dire:

$$T_y(\mathbf{P}(M)) = T_y(Y) \oplus T_y(S) = T_y(Gy) \oplus T_y(S).$$

En effet, cela résulte aussitôt de l'hypothèse sur E.

Choisissons un tore maximal T de L, et notons λ le poids du vecteur propre η de B. Alors le poids de m est $-\lambda$, et tout autre poids de T dans M est de la forme $-\lambda + \sigma$ où σ est une combinaison linéaire de racines simples, à coefficients entiers positifs [Hu; 31.2]. Il en résulte que la T-variété $\mathbf{P}(M)_\eta$ contient une unique orbite fermée: le point fixe y. On montre de même que le point fixe $(1,y)$ est l'unique orbite fermée de T dans $R_u(P) \times S$. Enfin, $\iota(1,y) = y$.

Montrons que la différentielle de ι en $(1,y)$ est bijective. Notons $\mathcal{U}$ l'algèbre de Lie de $R_u(P)$, c'est-à-dire son espace tangent en l'élément neutre. Puisque $Py = R_u(P)y$ est ouvert dans Gy, on a $T_y(Gy) = \mathcal{U}y$ et $T_m(Gm) = \mathbf{C}m + \mathcal{U}m$; puisque η est fixée par $R_u(P)$, elle s'annule identiquement sur $\mathcal{U}m$, donc cet espace rencontre trivialement $\mathbf{C}m$. On a ainsi

$$T_m(Gm) = \mathbf{C}m \oplus \mathcal{U}m \text{ et } M = \mathbf{C}m \oplus \mathcal{U}m \oplus E.$$

On peut donc identifier $\mathbf{P}(M)_\eta$ avec l'espace affine $m + (\mathcal{U}m \oplus E)$. Ceci identifie S avec $m + E$, et ι avec l'application $(g, m+x) \mapsto g(m+x)$. On a donc, pour $\xi \in \mathcal{U}$ et $x \in E$:

$$d\iota_{(1,y)}(\xi, x) = \xi m + x,$$

d'où l'assertion car l'application $\mathcal{U} \to \mathcal{U}m : \xi \mapsto \xi m$ est bijective (en effet, le groupe d'isotropie de m dans $R_u(P)$ est trivial).

Considérons l'ensemble des points de $R_u(P) \times S$ où la différentielle de ι est bijective. C'est un ouvert stable par T et contenant $(1,y)$, l'unique orbite fermée de T. Il suit que la différentielle de ι est bijective en tout point. Par suite, l'image de ι est ouverte dans $\mathbf{P}(M)_\eta$. Cette image est stable par T et contient y, l'unique orbite fermée de T; il en résulte que ι est surjective. Ainsi, ι est un revêtement. Comme $R_u(P) \times S$ et $\mathbf{P}(M)_\eta$ sont des espaces affines, on conclut que ι est un isomorphisme.

On trouvera une version plus précise de ce théorème dans [BLV], et des généralisations ou d'autres démonstrations dans [BL] et [Kn2]. Voici maintenant une première application.

Corollaire 1. *Pour une G-variété X, les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) $rg(X) = 0$.
(ii) Toute orbite de G dans X est compacte.

Démonstration. (i)$\Rightarrow$(ii) D'après le corollaire à la proposition 1.1, on peut supposer X homogène. Il existe alors un G-module M tel que X est une sous-G-variété localement fermée de $\mathbf{P}(M)$. Soit Y une orbite compacte de G dans $\overline{X}$. On obtient alors un sous-groupe parabolique P de G, un sous-groupe de Levi L de P et une sous-variété quasi-affine S de $\overline{X}$, tels que S est stable par L et que l'application $R_u(P) \times S \to \overline{X}$ est une immersion ouverte. De plus, S contient un point fixe de L dans Y. Il en résulte que $\mathbf{C}(X)^{(B)} = \mathbf{C}(S)^{(B \cap L)}$, puis que $rg(S) = rg(X) = 0$. En particulier, tout vecteur propre de $B \cap L$ dans $\mathbf{C}[S]$ est de poids nul, donc fixé par L. Par suite, L opère trivialement dans $\mathbf{C}[S]$. Comme S est quasi-affine, L opère trivialement dans S; en particulier, S est formé de points fixes d'un tore maximal T de L. Mais l'ensemble des points fixes de T dans l'espace homogène G/H est fini, donc S est un point; alors $Y = \overline{X} = X$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Soit $f \in \mathbf{C}(X)^{(B)}$. On peut trouver une orbite Y de G dans X telle que f est définie sur Y. Puisque Y est compacte, le poids de f est nul.

Une autre application du théorème ci-dessus concerne la structure locale du polytope $P(X, \mathcal{L})$ associé à une G-variété projective X munie d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ ample et G-linéarisé. Plus précisément, étant donné un point p de $P(X, \mathcal{L})$, on va décrire le cône convexe engendré par $-p + P(X, \mathcal{L})$, c'est-à-dire la forme de $P(X, \mathcal{L})$ au voisinage de p.

Écrivons $p = \chi/n$ où χ est un poids de B dans $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$. Soit $\eta \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ un vecteur propre de B de poids χ, et soit X_η l'ouvert de X où η ne s'annule pas; puisque $\mathcal{L}$ est ample, X_η est affine. Notons P le stabilisateur dans G de la droite engendrée par η; c'est un sous-groupe de G qui contient B et qui laisse stable X_η. Observons que P ne dépend que de p.

Corollaire 2. *(i) Avec les notations précédentes, il existe un sous-groupe de Levi L de P et une sous-variété S de X_η, fermée et stable par L, tels que l'application*

$$R_u(P) \times S \to X_\eta$$

est un isomorphisme.
(ii) Pour S comme ci-dessus, le groupe $\mathcal{X}(X)$ s'identifie à $\mathcal{X}(S)$, et le cône convexe engendré par $-p + P(X, \mathcal{L})$ s'identifie à $\mathcal{C}(S)$. En particulier, le rang de la G-variété X est égal au rang de la L-variété S; on a le même énoncé pour la complexité.
(iii) La dimension de la plus petite face de $P(X, \mathcal{L})$ qui contient p est le maximum des rangs des groupes $\mathcal{X}(L)^{L_x}$ pour $x \in S$ tel que Lx est fermée dans S.
(iv) Le point p est un sommet (resp. dans l'intérieur relatif) de $P(X, \mathcal{L})$ si et seulement si $L = [L, L]L_x$ pour tout $x \in L$ tel que Lx est fermée dans S (resp. $[L, L]$ opère trivialement dans S, et Lx est fermée dans S pour tout x dans un ouvert non vide de S).
(v) Tout sommet de $P(X, \mathcal{L})$ qui appartient à l'intérieur de la chambre de Weyl positive est entier (c'est-à-dire dans $\mathcal{X}(B)$).

Démonstration. (i) Soit N le sous-G-module de $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ engendré par η; alors N est simple, ainsi que son dual M. Pour tout $x \in X_\eta$, l'ensemble des $\sigma \in N$ tels que $\sigma(x) = 0$ est un hyperplan de N qui ne contient pas η, c'est-à-dire un point de $\mathbf{P}(M)_\eta$. On définit ainsi un morphisme P-équivariant de X_η vers $\mathbf{P}(M)_\eta$. L'existence de L et de S en résulte en appliquant le théorème ci-dessus.

(ii) On a

$$\mathbf{C}(X)^{(B)} = \mathbf{C}(X_\eta)^{(B)} = \mathbf{C}(S)^{(B \cap L)}$$

d'où l'identification de $\mathcal{X}(X)$ avec $\mathcal{X}(S)$, et l'assertion sur le rang.

Pour tout entier $m \geq 0$, et tout $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes m})$, la fonction rationnelle $\sigma\eta^{-m}$ est régulière sur X_η. De plus, comme $\mathcal{L}$ est ample, l'algèbre $\mathbf{C}[X_\eta]$ est réunion croissante de ses sous-espaces $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes m})\eta^{-m}$. Observons que la réunion des poids de B dans ces sous-espaces engendre le cône $-p + P(X, \mathcal{L})$; d'autre part, on a $\mathbf{C}[X_\eta]^{(B)} = \mathbf{C}[S]^{(B \cap L)}$ d'où les autres assertions.

(iii) Soit F la plus petite face de $P(X, \mathcal{L})$ qui contient p. L'espace affine engendré par F a pour direction la partie linéaire du cône engendré par $-p + P(X, L)$, c'est-à-dire $\operatorname{lin} \mathcal{C}(S)$ d'après (ii).

(iv) résulte aussitôt du corollaire 1.2.

(v) Soit p un point intérieur de la chambre de Weyl positive; alors $P = B$. Si de plus p est un sommet de $P(X, \mathcal{L})$, alors d'après (iv), l'ouvert X_η contient des points fixes de T. Pour un tel point x, soit χ_x le poids de T dans la fibre $\mathcal{L}_x$. Puisque $\eta \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ ne s'annule pas en x, le poids de η est $-n\chi_x$, d'où $p = \chi/n = -\chi_x$.

2. Variétés sphériques

2.1. *Espaces homogènes et variétés sphériques*

On rappelle que G désigne un groupe réductif connexe, B un sous-groupe de Borel de G, et U le radical unipotent de B.

Définitions.
Une G-variété X est *sphérique* si X est normale et contient une orbite ouverte de B.
Un sous-groupe H de G est *sphérique* si l'espace homogène G/H est sphérique.

Parmi les variétés sphériques, on trouve:
• les espaces homogènes sous G et compacts (en effet, un tel espace est isomorphe à G/P pour un sous-groupe parabolique P de G, et on a vu que U a une orbite ouverte dans G/P),
• plus généralement, les espaces homogènes G/H où H est un sous-groupe fermé de G contenant U,
• les *variétés toriques*, c'est-à-dire les variétés algébriques normales dans lesquelles un tore T opère avec une orbite ouverte (ici $G = B = T$),
• le groupe G vu comme espace homogène sous $G \times G$, qui opère par multiplication à gauche et à droite (alors le sous-groupe de Borel $B \times B$ de $G \times G$ a une orbite ouverte dans G, d'après la décomposition de Bruhat),
• l'espace homogène $\mathrm{GL}_n/\mathrm{O}_n$ où O_n désigne le groupe orthogonal complexe de la forme quadratique $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ (en effet, si B est le sous-groupe de Borel standard de GL_n, on vérifie que le produit $B\mathrm{O}_n$ est ouvert dans G),
• l'espace des formes quadratiques pour l'opération de GL_n (en effet, les formes quadratiques non dégénérées sont une orbite de GL_n, isomorphe à $\mathrm{GL}_n/\mathrm{O}_n$).

Observons que O_n est le groupe des points fixes de l'involution θ de GL_n définie par $\theta(g) = ({}^tg)^{-1}$; autrement dit, $\mathrm{GL}_n/\mathrm{O}_n$ est un exemple d'*espace symétrique*. On peut montrer que tout espace symétrique est sphérique [Vu1].

On va donner deux caractérisations des variétés sphériques; pour les énoncer, on aura besoin de la

Définition. Deux G-variétés X et X' sont *birationnellement isomorphes* s'il existe deux ouverts non vides X_0 de X et X'_0 de X', stables par G et isomorphes comme G-variétés.

Théorème. *Pour une G-variété normale et quasi-projective X, les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) X est sphérique.
(ii) Toute G-variété birationnellement isomorphe à X ne contient qu'un nombre fini d'orbites de G.
(iii) Pour tout fibré en droites G-linéarisé $\mathcal{L}$ sur X, le G-module $\Gamma(X, \mathcal{L})$ est sans multiplicité.

Si de plus X est quasi-affine, on peut remplacer (iii) par
(iii)' Le G-module $\mathbf{C}[X]$ est sans multiplicité.

Démonstration. (i)$\Rightarrow$(ii) résulte du corollaire 1.3.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Observons que $\Gamma(X, \mathcal{L})$ est isomorphe à un sous-G-module de $\Gamma(G/H, \mathcal{L})$. On peut remplacer X par l'orbite ouverte de G, et supposer que $X = G/H$. Alors H opère dans la fibre de $\mathcal{L}$ au point de base par multiplication par un caractère χ. Le G-module $\Gamma(G/H, \mathcal{L})$ s'identifie alors à $\mathbf{C}[G]_\chi^{(H)}$. Rappelons que le $G \times G$-module $\mathbf{C}[G]$ est la somme directe des $M^* \otimes M$ sur tous les G-modules simples M. Il s'ensuit que la multiplicité de M^* dans $\Gamma(G/H, \mathcal{L})$ est la dimension de $M_\chi^{(H)}$.

Supposons qu'il existe un G-module simple M tel que $\dim M_\chi^{(H)} \geq 2$. Choisissons $v, w \in M$ vecteurs propres de H de poids χ et linéairement indépendants. Dans l'espace projectif $\mathbf{P}(M \oplus M)$, considérons le point

$$x = [v \oplus w]$$

fixé par H, et l'adhérence X de l'orbite Gx. Montrons que X contient une infinité d'orbites fermées de G.

Le G-module dual M^* contient un vecteur propre η de B. Quitte à remplacer B par un conjugué, on peut supposer que $\langle \eta, v \rangle = 1$ (en effet l'espace vectoriel M^* est engendré par les $g\eta$, $g \in G$). Définissons une application rationnelle f sur $\mathbf{P}(M \oplus M)$ par

$$f([m_1 \oplus m_2]) = \frac{\langle \eta, m_2 \rangle}{\langle \eta, m_1 \rangle} .$$

Alors f est définie en x et invariante par B. De plus, f n'est pas constante sur X (sinon il existerait $t \in \mathbf{C}$ tel que $\langle \eta, gw \rangle = t\langle \eta, gv \rangle$ pour tout $g \in G$, d'où $w = tv$ ce qui est absurde). Pour tout t dans $\mathbf{C}$ privé d'un ensemble fini, on peut donc trouver $g_t \in G$ tel que $\langle \eta, g_t w \rangle = t\langle \eta, g_t v \rangle$ et que $\langle \eta, g_t v \rangle \neq 0$.

Soit T un tore maximal de B et soit B^- le sous-groupe de Borel de G tel que $B \cap B^- = T$. Alors B^- a un unique vecteur propre v_λ dans M tel que $\langle \eta, v_\lambda \rangle = 1$. De plus, on peut écrire

$$g_t v = c v_\lambda + \sum_\mu v_\mu$$

où c est un nombre complexe non nul (dépendant de t) et où chaque $v_\mu \in M$ est vecteur propre de T (dépendant de t) de poids μ, tel que $\lambda - \mu$ est une combinaison linéaire de racines simples, à coefficients positifs. Ecrivons de même

$$g_t w = d v_\lambda + \sum_\mu w_\mu,$$

alors $d = ct$. Soit $\theta : \mathbf{C}^* \to T$ un sous-groupe à un paramètre dont le produit scalaire avec chaque racine simple est strictement positif. Alors

$$\theta(s)x = [cs^{\langle \lambda, \theta \rangle}(v_\lambda \oplus tv_\lambda) + \sum_\mu s^{\langle \mu, \theta \rangle}(v_\mu \oplus w_\mu)] = [c(v_\lambda \oplus tv_\lambda) + \sum_\mu s^{\langle \mu - \lambda, \theta \rangle}(v_\mu \oplus w_\mu)]$$

Il en résulte que

$$\lim_{s \to \infty} \theta(s)x = [v_\lambda \oplus tv_\lambda].$$

Ainsi, X contient la G-orbite de $[v_\lambda \oplus tv_\lambda]$ pour tout $t \in \mathbf{C}$, et ces orbites sont fermées et deux à deux distinctes.

L'orbite ouverte de G dans X est G/G_x avec $G_x \supset H$. Soit (X', x') un plongement compact de G/H; considérons l'adhérence de $G(x, x')$ dans $X \times X'$, et sa normalisation X''. Alors X'' est un plongement de G/H, et l'application naturelle $X'' \to X$ est propre car X' est compact. Il en résulte que X'' contient une infinité d'orbites.

(iii)⇒(i) D'après le théorème de Rosenlicht, il suffit de montrer que toute fonction rationnelle invariante par B sur X est constante. Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample sur X. Quitte à remplacer $\mathcal{L}$ par une puissance positive, on peut le supposer G-linéarisé. Pour toute $f \in \mathbf{C}(X)^B$, il existe alors un entier $n \geq 0$ ainsi que $u, v \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ tels que $f = u/v$. De plus, on peut supposer u, v vecteurs propres de B; alors leurs poids sont égaux. Par suite, les sous-G-modules de $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ engendrés par u, v sont simples et isomorphes, donc égaux. Il en résulte que u et v sont proportionnels, c'est-à-dire que f est constante.

L'implication (iii)⇒(iii)' est évidente. Si de plus X est quasi-affine, alors $\mathbf{C}(X)$ est le corps des fractions de $\mathbf{C}[X]$, et l'implication (iii)'⇒(iiii) se démontre comme ci-dessus.

On démontre de même le

Corollaire. *Pour un espace homogène G/H, les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) G/H est sphérique.
(ii) Tout plongement de G/H ne contient qu'un nombre fini d'orbites de G.
(iii) Pour tout G-module simple M et tout caractère χ de H, l'espace $M_\chi^{(H)}$ est de dimension au plus 1.

Si de plus G/H est quasi-affine, on peut remplacer (iii) par
(iii)' Pour tout G-module simple M, l'espace M^H est de dimension au plus 1.

Exemples. 1) Soit $H = \mathrm{SL}_2$ plongé diagonalement dans $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 = G$. Vérifions que l'espace homogène affine G/H est sphérique. En effet, si B est le sous-groupe de Borel de G formé des triplets de matrices triangulaires supérieures, alors $G/B = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Ainsi, H a une orbite ouverte dans G/B, formée des triplets de points deux à deux distincts; autrement dit, B a une orbite ouverte dans G/H.

Il résulte alors du corollaire que pour tout triplet (M_1, M_2, M_3) de SL_2-modules simples, la dimension de $(M_1 \otimes M_2 \otimes M_3)^{\mathrm{SL}_2}$ est au plus 1. Ainsi, le SL_2-module $M_1 \otimes M_2$ est sans multiplicité. Ceci résulte aussi de la formule de Clebsch-Gordan, qui donne une décomposition explicite du produit tensoriel de deux SL_2-modules simples; en fait, on peut aussi retrouver cette formule, et plus généralement la “formule de Pieri”, à l'aide de certains espaces homogènes sphériques [B1].

2) Soient m, n deux entiers tels que $1 \leq m \leq n-1$. Identifions $H = \mathrm{GL}_m$ au sous-groupe de $G = \mathrm{GL}_n$ formé des matrices qui s'écrivent $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}$ où I_{n-m} est la matrice identité de taille $n-m$. Alors l'espace homogène G/H est sphérique si et seulement si $m = n-1$. En effet, si H' désigne le sous-groupe de G formé des matrices qui s'écrivent $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & I_{n-m} \end{pmatrix}$, alors H' est le groupe d'isotropie dans G de la suite des $n-m$ derniers vecteurs de base. Ainsi, G/H' admet comme plongement $(\mathbf{C}^n)^{n-m}$ et ce dernier contient une infinité d'orbites de G lorsque $n-m \geq 2$. Dans ce cas, G/H' n'est pas sphérique, ni G/H puisque H' contient H. Mais si $n-m = 1$ alors la G-variété G/H est isomorphe à

l'ensemble des $(x, f) \in \mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^n)^*$ tels que $\langle f, x\rangle \neq 0$. Par suite, le sous-groupe de Borel standard de G a une orbite ouverte dans G/H, formée des (x, f) tels que $\langle e_n^*, x\rangle \neq 0$ et $\langle f, e_1\rangle \neq 0$ (où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{C}^n$, et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est la base duale).

2.2. *Variétés sphériques simples*

Soient X une variété sphérique et Y une orbite de G dans X. L'ensemble

$$X_{Y,G} := \{x \in X \mid \overline{Gx} \text{ contient } Y\}$$

est ouvert dans X (en effet, X ne contient qu'un nombre fini d'orbites de G, et si $x \in X \setminus X_{Y,G}$ alors $\overline{Gx}$ est contenu dans $X \setminus X_{Y,G}$). De plus, $X_{Y,G}$ est stable par G et contient Y comme unique orbite fermée de G. On peut donc recouvrir X par des G-variétés sphériques simples, au sens suivant.

Définition. Une G-variété X est *simple* si elle contient une unique orbite fermée de G.

Soit donc X une G-variété sphérique simple, d'orbite fermée Y. Puisque B n'a qu'un nombre fini d'orbites dans X, il a une orbite ouverte dans Y, qu'on note Y_B^0.

Proposition. *Avec les notations précédentes, X contient un unique ouvert $X_{Y,B}$ affine, stable par B, rencontrant Y, et minimal pour ces propriétés. On a*

$$X_{Y,B} = \{x \in X \mid \overline{Bx} \textit{ contient } Y\}.$$

En particulier, $X_{Y,B} \cap Y = Y_B^0$. De plus, le complémentaire $X \setminus X_{Y,B}$ est la réunion des diviseurs premiers de X, stables par B et qui ne contiennent pas Y; chacun de ces diviseurs est de Cartier et engendré par ses sections globales.

Démonstration. D'après la proposition 1.1, X contient des ouverts affines stables par B et rencontrant Y. Soit X_0 un tel ouvert; alors son complémentaire est réunion de diviseurs premiers, stables par B et ne contenant pas Y. Puisque l'ensemble de ces diviseurs est fini, il en est de même pour l'ensemble des ouverts affines, stables par B et rencontrant Y. Comme toute intersection finie d'ouverts affines non vides est un ouvert affine non vide, l'existence de $X_{Y,B}$ en résulte.

Montrons que $X_{Y,B} \cap Y = Y_B^0$. Puisque $X_{Y,B}$ rencontre Y, il contient Y_B^0. D'autre part, soit X_0 un ouvert de X qui vérifie les conditions de la proposition 1.1. On peut trouver $\varphi \in \mathbf{C}[Y_B^0]$, vecteur propre de B et qui s'annule identiquement sur $(X_0 \cap Y) \setminus Y_B^0$. On peut ensuite choisir $f \in \mathbf{C}[X_0]^{(B)}$ tel que $\varphi = f|_{X_0 \cap Y}$. Alors $X_0 \cap (f \neq 0)$ est un ouvert affine, stable par B, et rencontrant Y suivant Y_B^0. L'assertion en résulte.

Soit D la réunion des diviseurs premiers stables par B et ne contenant pas Y; alors $X \setminus D$ est contenu dans $X_{Y,B}$. Montrons que D est de Cartier et engendré par ses sections globales. Soit $i : X^{reg} \to X$ l'inclusion de l'ouvert des points réguliers et soit

$$\mathcal{L}^{reg} := \mathcal{O}_{X^{reg}}(D \cap X^{reg})$$

le faisceau sur X^{reg} associé au diviseur $D \cap X^{reg}$; alors $\mathcal{L}^{reg}$ est inversible. Quitte à remplacer G par un revêtement fini, on peut supposer que $\mathcal{L}^{reg}$ est G-linéarisé; alors G opère dans le faisceau

$$\mathcal{L} := i_* \mathcal{L}^{reg}.$$

Puisque X est normale, on a
$$\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D).$$
L'ensemble des points où $\mathcal{L}$ n'est pas inversible est stable par G, et contenu dans D; cet ensemble est donc vide, car E ne contient aucune orbite de G. Ainsi, $\mathcal{L}$ est inversible, c'est-à-dire: le diviseur D est de Cartier. Soit η la section canonique de $\mathcal{O}_X(D)$; alors D est l'ensemble des zéros de η. Les $g\eta$ ($g \in G$) n'ont pas de zéro commun, donc D est engendré par ses sections globales. De même, toute composante irréductible de D est de Cartier et engendrée par ses sections globales.

Montrons maintenant que $X_{Y,B} = X \setminus D$; pour cela, il suffit de construire un ouvert affine, stable par B, rencontrant Y mais non D. Soient N le sous-G-module de $\Gamma(X, \mathcal{L})$ engendré par η, et M le G-module dual de N. Pour tout $x \in X$, l'ensemble des $\sigma \in N$ tels que $\sigma(x) \neq 0$ est un hyperplan de N; notons-le $\varphi(x)$. Ceci définit un G-morphisme
$$\varphi : X \to \mathbf{P}(M)$$
et on a par définition de η:
$$X \setminus D = \varphi^{-1}(\mathbf{P}(M)_\eta).$$
D'après le théorème 1.4, il existe une sous-variété fermée S de $X \setminus D$, stable par un sous-groupe de Levi L de P, telle que l'application naturelle
$$R_u(P) \times S \to X \setminus D$$
est un isomorphisme. Puisque $B = R_u(P)(B \cap L)$ et que $B \cap L$ est un sous-groupe de Borel de L, la L-variété S est sphérique; elle rencontre Y. D'après la proposition 1.1, S contient un ouvert S_0 affine, stable par $B \cap L$, et rencontrant Y. Alors $R_u(P)S_0$ est un ouvert affine de $X \setminus D$, stable par B, et rencontrant Y.

Ainsi, $X \setminus D = X_{Y,B}$ est affine, donc il en est de même de S. De plus, la L-variété $Y \cap S$ est une unique orbite de $B \cap L$, puisque $X_{Y,B} \cap Y = Y_B^0$.

Montrons enfin que $X_{Y,B}$ est l'ensemble des $x \in X$ tels que $\overline{Bx}$ contient Y. Ce dernier ensemble est ouvert, stable par B et contient Y_B^0 comme unique orbite fermée de B; il est donc contenu dans $X_{Y,B}$. D'autre part, soit Z une orbite fermée de B dans $X_{Y,B}$; alors $Z \cap S$ est une orbite fermée de $B \cap L$ dans S, donc $L(Z \cap S)$ est une orbite fermée de L dans S. Mais la L-variété affine S contient une orbite ouverte de L, et donc une unique orbite fermée, à savoir $Y \cap S$. Ainsi, $Z \cap S \subseteq Y \cap S$, d'où $Z = Y_B^0$. Ceci termine la preuve de la proposition.

2.3. *Structure locale des variétés sphériques*

On considère, comme en 2.2, une G-variété sphérique X et une orbite Y de G dans X. On va ramener la description de X le long de Y, ou encore de l'ouvert $X_{Y,B}$ le long de Y_B^0, à celle d'une variété sphérique affine avec point fixe; pour cela, on va préciser l'argument de la preuve de la proposition 2.2.

Pour illustrer cet argument, reprenons l'exemple de $G = \mathrm{GL}_n$ opérant dans $X = \mathbf{P}(M)$ où M est l'espace des formes quadratiques en $x_1, \ldots, x_n$. Chaque orbite Y de G dans X est l'image de l'ensemble des formes quadratiques d'un rang fixé j. Alors $Y_B^0 = B[x_1^2 + \cdots + x_j^2]$, et $X_{Y,B}$ est formé des images des $q \in M$ telles que les restrictions de q à $V_1, , \ldots, V_j$ sont non dégénérées, où V_j désigne le sous-espace de $\mathbf{C}^n$ défini par: $x_k = 0$ pour tout $k > j$.

Soit P le sous-groupe de G qui stabilise $V_1, \ldots, V_j$; c'est un sous-groupe parabolique de G, et c'est aussi le stabilisateur de l'ouvert $X_{Y,B}$. Soit S l'image dans X de l'ensemble des formes qui s'écrivent

$$c_1 x_1^2 + \cdots + c_j x_j^2 + q'(x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

où $c_1, \ldots, c_j$ sont dans $\mathbf{C}^*$. Alors S est stable sous l'action évidente du groupe $L := (\mathbf{C}^*)^j \times \mathrm{GL}_{n-j}$, plongé diagonalement dans GL_n. De plus, L est un sous-groupe de Levi de P, et on voit comme en 1.4 que l'application naturelle

$$R_u(P) \times S \to X_{Y,B}$$

est un isomorphisme P-équivariant.

L'intersection $S \cap Y$ est formée des $[c_1 x_1^2 + \cdots + c_j x_j^2]$; c'est une orbite de L, dont le groupe d'isotropie $L_Y := \{1, -1\}^j \times \mathrm{GL}_{n-j}$ contient le sous-groupe dérivé de L. Notons S_Y le sous-ensemble de S formé des

$$[x_1^2 + \cdots + x_j^2 + q'(x_{j+1}, \ldots, x_n)].$$

Alors S_Y est stable par L_Y et rencontre Y en l'unique point $[x_1^2 + \cdots + x_j^2]$. Enfin, l'application naturelle $L \times_{L_Y} S_Y \to S$ est un isomorphisme L-équivariant. Ceci complète la description de la P-variété $X_{Y,B}$.

Revenons au cas général, et notons

$$P = \{g \in G \mid gX_{Y,B} = X_{Y,B}\}$$

le stabilisateur de $X_{Y,B}$; c'est un sous-groupe parabolique de G qui contient B.

Théorème. *Avec les notations précédentes, il existe un sous-groupe de Levi L de P et une sous-variété fermée S de $X_{Y,B}$ tels que:*
(i) S est stable par L, et
(ii) l'application

$$\begin{array}{ccc} R_u(P) \times S & \to & X_{Y,B} \\ (g, x) & \mapsto & gx \end{array}$$

est un isomorphisme P-équivariant.

De plus, S est une L-variété sphérique affine, et $S \cap Y$ est une unique orbite de L, dont chaque groupe d'isotropie contient $[L, L]$. En particulier, ce groupe d'isotropie est indépendant du point de $S \cap Y$; notons-le L_Y.

Enfin, il existe une sous-variété S_Y de S, fermée, stable par L_Y et contenant un point fixe de ce groupe, telle que l'application canonique

$$L \times_{L_Y} S_Y \to S$$

est un isomorphisme; alors S_Y est une L_Y-variété sphérique affine, de rang égal à $rg(X) - rg(Y)$.

Démonstration. Comme en 2.2, on peut supposer que X est simple d'orbite fermée Y; on utilise alors les notations de la preuve de la proposition 2.2. Observons que P est le stabilisateur de $D = X \setminus X_{Y,B}$ dans G, donc aussi de $[\eta] \in \mathbf{P}(N)$. L'existence de L et de S vérifiant les propriétés (i) et (ii), a été obtenue dans cette preuve; on a vu aussi que S est une L-variété sphérique, et que $Y \cap S$ est une orbite de $B \cap L$. Choisissons $y \in Y \cap S$ et notons L_y son groupe d'isotropie dans L. Comme $Ly = (B \cap L)y$, on a

$$L = (B \cap L)L_y$$

et donc L_y contient $[L, L]$ grâce au lemme ci-dessous. Par suite, $L_y := L_Y$ ne dépend pas du choix de y, et le quotient L/L_Y est un tore. Ce dernier est isomorphe à l'orbite $Ly = S \cap Y$.

Soit $(\chi_1, \ldots, \chi_r)$ une base du groupe des caractères de ce tore. Puisque $S \cap Y$ est fermé dans la variété affine S, on peut étendre $\chi_1, \ldots, \chi_r$ en des fonctions régulières $f_1, \ldots, f_r$ sur S. Puisque $S \cap Y$ est stable par L, on peut supposer que $f_1, \ldots, f_r$ sont des vecteurs propres de L de poids $\chi_1, \ldots, \chi_r$. Alors les fonctions $f_1, \ldots, f_r$ sont inversibles, car elles ne s'annulent pas sur l'orbite fermée $S \cap Y$ de L dans S. Par suite, $f_1, \ldots, f_r$ définissent un morphisme L-équivariant de S sur $(\mathbf{C}^*)^r \simeq L/L_Y$. Soit S_Y la fibre de ce morphisme en l'élément neutre de L/L_Y. L'application naturelle $L \times S_Y \to S$ se factorise par un morphisme $L \times_{L_Y} S_Y \to S$. Ce dernier est bijectif par construction; c'est donc un isomorphisme, car S est normale. Enfin, on a

$$rg(X) = rg(S) = \dim(L/L_Y) + rg(S_Y) = rg(S \cap Y) + rg(S_Y) = rg(Y) + rg(S_Y)$$

d'où la dernière assertion.

Lemme. *Soit H un sous-groupe de G tel que $G = BH$. Alors H contient $[G, G]$.*

Démonstration du lemme. On peut supposer que G est semi-simple et que H est connexe. Soit H^{ss} le quotient de H par son radical; c'est un groupe semisimple connexe. Puisque $G = BH$, on a

$$G/B = H/B \cap H,$$

donc les variétés des drapeaux de G et de H^{ss} sont isomorphes. Ainsi, G et H^{ss} ont le même rang (qui est le rang du groupe de Picard de leur variété des drapeaux, d'après [KSS; p. 82]) et le même nombre de racines (qui est le double de la dimension de leur variété des drapeaux). Par suite, $\dim G = \dim H^{ss}$ ce qui entraîne que $G = H^{ss} = H$.

Corollaire 1. *Soient X une G-variété sphérique et X' une sous-variété de X, fermée et stable par G; alors X' est une G-variété sphérique.*

Démonstration. D'après le corollaire 1.3, B a une orbite ouverte dans X'; il suffit donc de vérifier que X' est normale. Pour cela, on peut supposer que X est simple, puis qu'elle est affine grâce au théorème ci-dessus. Alors $\mathbf{C}[X]^U$ est l'algèbre des fonctions régulières sur une T-variété torique affine $X//U$. Notons de même $X'//U$ la T-variété affine d'algèbre $\mathbf{C}[X']^U$; alors $X'//U$ est une sous-variété de $X//U$, fermée et stable par T. D'après [O; Corollary 1.7], $X'//U$ est normale; il en résulte que X' est normale [Kr; III.3.3].

Corollaire 2. *Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample sur une variété sphérique projective X; soit X' une sous-variété de X, fermée et stable par G. Alors la restriction $\Gamma(X,\mathcal{L}) \to \Gamma(X',\mathcal{L})$ est surjective.*

Démonstration. Quitte à remplacer G par un revêtement fini, on peut supposer que $\mathcal{L}$ est G-linéarisé. Alors l'algèbre

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$$

est de type fini (car $\mathcal{L}$ est ample), normale (car X est normale), et sans multiplicité pour l'action de $G \times \mathbf{C}^* =: \tilde{G}$. C'est donc l'algèbre des fonctions régulières sur une $\tilde{G}$-variété sphérique affine $\tilde{X}$, avec un point fixe 0. De même, soit $\tilde{X}'$ la $\tilde{G}$-variété sphérique affine associée à

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(X', \mathcal{L}^{\otimes n}).$$

Soit $\iota : \tilde{X}' \to \tilde{X}$ le $\tilde{G}$-morphisme défini par la restriction des sections; alors $\iota(0) = 0$. Puisque $\mathcal{L}$ est ample, $\tilde{X} \setminus \{0\}$ est isomorphe à l'espace total du fibré dual de $\mathcal{L}$, privé de la section nulle. Il en résulte que ι est un isomorphisme en dehors de 0; en particulier, ι est birationnelle et finie. Mais l'image de ι est normale d'après le corollaire 1; par suite, ι est un isomorphisme.

On trouvera dans [B1] d'autres applications du théorème ci-dessus; une démonstration plus conceptuelle des corollaires 1 et 2 est donnée dans [BI], par les méthodes de "Frobenius splitting".

2.4. *Variétés toroïdales*

On introduit une classe de variétés sphériques, dont la structure des orbites est celle d'une variété torique.

Pour toute variété sphérique X, on note Δ_X la réunion des diviseurs premiers de X qui sont stables par B et non par G. On note P_X le stabilisateur de Δ_X dans G; c'est un sous-groupe parabolique de G qui contenient B. Soit X_B^0 (resp. X_G^0) l'orbite ouverte de B (resp. G) dans X. Les composantes irréductibles de Δ_X sont les adhérences dans X de $X_0^G \setminus X_0^B$; il en résulte que P_X est le stabilisateur de X_0^B. En particulier, P_X est un invariant birationnel de X; on note $P_X = P$.

Proposition 1. *Pour toute G-variété sphérique X, les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) Tout diviseur premier de X qui est stable par B et qui contient une orbite de G, est stable par G.
(ii) Il existe alors un sous-groupe de Levi L de P, ne dépendant que de X_G^0, et une sous-variété S de $X \setminus \Delta_X$ fermée et stable par L, tels que l'application

$$R_u(P) \times S \to X \setminus \Delta_X$$

est un isomorphisme. De plus, $[L,L]$ opère trivialement dans S, qui est une variété torique pour un quotient du tore $L/[L,L]$. Enfin, toute orbite de G rencontre S, suivant une unique orbite de L.

Démonstration. (i)$\Rightarrow$(ii) Comme dans la preuve du théorème 2.3, on construit un sous-groupe de Levi L de P, indépendant de X, et une sous-variété S de $X \setminus \Delta_X$, fermée et stable par L, tels que l'application $R_u(P) \times S \to X \setminus \Delta_X$ est un isomorphisme.

Par définition de Δ_X et de P, l'intersection $X_G^0 \cap (X \setminus \Delta_X)$ est stable par P et ne contient aucun diviseur premier stable par B. Mais X_B^0 est affine; il en résulte que $X_G^0 \cap (X \setminus \Delta_X) = X_B^0$. D'où $X_G^0 \cap S = S_{B\cap L}^0$ et cette dernière est stable par L. Grâce au lemme 2.3, il en résulte que $[L, L]$ opère trivialement dans $X_G^0 \cap S$ et donc dans S. Ainsi, S est une variété torique pour un quotient de $L/[L, L]$.

Soit X' l'adhérence d'une orbite de G dans X. Alors X', n'étant pas contenue dans Δ_X, est l'adhérence de $X' \setminus \Delta_X$, donc aussi de $R_u(P)(X' \cap S)$. De plus, $X' \cap S$ est l'adhérence d'une orbite de L. Réciproquement, soit S' l'adhérence d'une orbite de L dans S. Puisque S est une variété torique, il existe des diviseurs premiers $S_1, \ldots, S_r$ de S, stables par L et tels que $S' = S_1 \cap \cdots \cap S_r$, où r est la codimension de S' dans S. En effet, ceci résulte de la description des adhérences d'orbites dans une variété torique, en termes de cônes de son éventail [O; p.10]. Chaque diviseur

$$X_j := \overline{R_u(P)S_j}$$

est premier, stable par B, et ne rencontre pas X_G^0 (car S_j ne rencontre pas $S_{B\cap L}^0 = X_G^0 \cap S$); par suite, X_j est stable par G. Posons

$$X' := \overline{R_u(P)S'}.$$

Alors X' est une sous-variété de codimension r de X, contenue dans $X_1 \cap \cdots \cap X_r$, donc X' est une composante irréductible de $X_1 \cap \cdots \cap X_r$. Par suite, X' est stable par G, et $X' \cap S = S'$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Par hypothèse, Δ_X ne contient aucune orbite de G.

Définition. Une variété qui vérifie l'une des conditions ci-dessus est appelée *toroïdale*.

La structure des orbites de G dans une variété toroïdale X est la même que celle des orbites de C dans la variété torique S. En particulier, toute sous-variété Z de X, fermée et stable par G, est intersection de diviseurs $X_1, \ldots, X_r$ premiers et stables par G, où r est la codimension de Z dans X. Si de plus X est lisse, alors $X_1, \ldots, X_r$ sont les diviseurs premiers et stables par G qui contiennent Z, et ils se coupent transversalement (ceci résulte de la description des orbites d'une variété torique en termes des cônes de son éventail [O; 1.3] ou [Fu; 3.1]).

Toute G-variété sphérique est *dominée* par une G-variété toroïdale, au sens suivant:

Proposition 2. *(i) Pour toute G-variété sphérique X, il existe une G-variété toroïdale $\tilde{X}$ et un G-morphisme birationnel projectif $\pi : \tilde{X} \to X$.*
(ii) Soient G/H un espace homogène sphérique, B un sous-groupe de Borel de G tel que BH est ouvert dans G, et P le stabilisateur à gauche de BH dans G. Il existe alors des sous-groupes de Levi L de P, de centre connexe C, qui vérifient les propriétés suivantes:

a) Le groupe $P \cap H$ est égal à $L \cap H$ et contient $[L, L]$.

b) Pour tout plongement (X, x) de G/H, l'ensemble $R_u(P)\overline{Cx}$ contient un ouvert de toute orbite de G dans X.

Démonstration. (i) Soit D un diviseur effectif de X_G^0, de support $X_G^0 \setminus X_B^0$, et tel que le fibré en droites associé sur X_G^0 admet une G-linéarisation. Soit $\eta \in \Gamma(X_G^0, \mathcal{O}_X(D))$ la section canonique de D; soient N le G-module engendré par η, et M son dual. On a une application rationnelle équivariante

$$\varphi : X - \to \mathbf{P}(M).$$

Soit $\tilde{X}$ la normalisation du graphe de φ, avec les projections $\pi : \tilde{X} \to X$ et $p : \tilde{X} \to \mathbf{P}(M)$; soit Δ l'adhérence de D dans $\tilde{X}$. Alors Δ est contenue dans l'image réciproque par p de l'hyperplan $(\eta = 0)$ de $\mathbf{P}(M)$. Puisque le G-module N est simple, cet hyperplan ne contient aucune orbite de G, donc il en est de même de Δ: ainsi, $\tilde{X}$ est toroïdale.

(ii) Soit (X, x) un plongement toroïdal. Soient L et S comme dans la proposition 1 ci-dessus. Puisque $x \in X_B^0$, on peut trouver $g \in R_u(P)$ tel que $x \in gS$. Alors l'application $R_u(P) \times gS \to X \setminus \Delta_X$ est un isomorphisme; de plus, gS est stable par le sous-groupe de Levi gLg^{-1}, et fixée par son sous-groupe dérivé. Par suite, l'orbite $gCg^{-1}x$ est dense dans gS, et $P \cap H = gLg^{-1} \cap H$ contient $g[L, L]g^{-1}$. On a donc trouvé L qui vérifie (a), ainsi que (b) pour tout plongement toroïdal. D'après (i), il en résulte que (b) est vérifiée pour tout plongement.

Définition. Un sous-groupe de Levi L de P qui vérifie les propriétés (a) et (b) ci-dessus est dit *adapté à* G/H.

Il résulte de (a) que le groupe $\mathcal{X}(G/H)$ s'identifie à $\mathcal{X}(L/L \cap H) = \mathcal{X}(C/C \cap H)$. En particulier, le rang de G/H est la dimension du tore $C/C \cap H$.

Exemples. 1) Soit T un tore maximal de B; soit B^- le sous-groupe de Borel de G tel que $B \cap B^- = T$, et soit U^- la partie unipotente de B^-. L'espace homogène G/U^- est sphérique, car BU^- est ouvert dans G. Montrons que T est adapté à G/U^-.

D'après [Hu; 28.5], l'application $B \to G/U^- : g \mapsto gU^-$ est une immersion ouverte. Soit P le stabilisateur de l'ouvert B de G/U^-; c'est le stabilisateur à gauche de BU^- dans G. D'après [Hu; 29.2], le sous-groupe parabolique P est engendré par B et par $P \cap N$ où N est le normalisateur de T. Mais si $x \in N$ vérifie $xB^-U = B^-U$, alors $x \in B^-U \cap N$ et ce dernier est égal à T (ceci résulte de la décomposition de Bruhat [Hu; 28.3]). Ainsi, $P = B$; en particulier, $P \cap U^-$ est trivial.

Soit (X, x) un plongement de G/U^-; alors la variété $\overline{Tx}$ est stable par B^-, car elle est formée de points fixes de U^-. La normalisation S de $\overline{Tx}$ est une B^--variété, torique pour l'action de T. Considérons la G-variété

$$\tilde{X} := G \times_{B^-} S$$

et le morphisme G-équivariant $\pi : \tilde{X} \to X$ qui étend le morphisme de normalisation $S \to \overline{Tx}$. Alors $\tilde{X}$ est un plongement de G/U^-, et

$$\tilde{X} \setminus \Delta_{\tilde{X}} = UB^- \times_{B^-} S \simeq U \times S$$

donc $\tilde{X}$ vérifie la condition (ii) de la proposition 1. Enfin, π se factorise par le morphisme fini $G \times_B S \to G \times_B \overline{Tx}$ suivi du morphisme projectif $G \times_{B^-} \overline{Tx} \to X$, donc π est projectif. On conclut grâce aux propositions 1 et 2.

En fait, on peut montrer que $\overline{Tx}$ est normale [P1; 5.4] et [P2; 2.1].
2) Le groupe $G \times G$ opère transitivement dans G par $(g_1, g_2)g := g_1 g g_2^{-1}$; le groupe d'isotropie de l'élément neutre 1 est la diagonale $\mathrm{diag}(G)$. Soient T et B^- comme ci-dessus; alors $B \times B^-$ est un sous-groupe de Borel de $G \times G$, et BB^- est ouvert dans G. Ainsi, l'espace homogène $G = (G \times G)/\mathrm{diag}(G)$ est sphérique.

Comme dans l'exemple précédent, on montre que le sous-groupe parabolique P défini ci-dessus, est égal à $B \times B^-$. Montrons que le tore maximal $T \times T$ de $G \times G$ est adapté à $(G \times G)/\mathrm{diag}(G)$. La condition (a) est évidemment vérifiée; pour (b), on va raisonner comme dans la preuve du critère de Hilbert-Mumford [Kr; III.2.3] ou [MFK; 2.1].

Soit (X, x) un plongement simple de $(G \times G)/\mathrm{diag}(G)$, d'orbite fermée Y. Il existe alors une courbe irréductible γ contenue dans G, telle que $\overline{\gamma x}$ rencontre Y. Notons $\mathbf{C}[[t]]$ l'anneau des séries formelles en la variable t, à coefficients complexes, et $\mathbf{C}((t))$ son corps des fractions; soit $G_{\mathbf{C}((t))}$ le groupe des points de G à valeurs dans ce corps. Il existe alors $g(t) \in G_{\mathbf{C}((t))}$ tel que $\lim_{t\to 0} g(t)x$ existe et est dans Y. D'après [MFK; 2.1], on peut écrire

$$g(t) = g_1(t)\lambda(t)g_2(t)$$

où $g_1(t)$ et $g_2(t)$ sont dans $G_{\mathbf{C}[[t]]}$, et où λ est un sous-groupe à un paramètre de T. Par suite, $\lim_{t\to 0} \lambda(t)x := y$ existe et appartient à Y.

Soit $G(\lambda)$ le sous-ensemble de G formé des g tels que $\lambda(t)g\lambda(t)^{-1}$ a une limite dans G. C'est un sous-groupe parabolique de G, avec pour radical unipotent l'ensemble des g tels que $\lim_{t\to 0} \lambda(t)g\lambda(t)^{-1} = 1$. De plus, le centralisateur de l'image de λ, noté $L(\lambda)$, est un sous-groupe de Levi de $G(\lambda)$. Enfin, pour le sous-groupe à un paramètre $-\lambda$ défini par $(-\lambda)(t) = \lambda(t^{-1})$, on a $G(\lambda) \cap G(-\lambda) = L(\lambda)$ [Kr; III.2.5] ou [MFK; 2.1]. On a $G(g\lambda g^{-1}) = gG(\lambda)g^{-1}$ pour tout $g \in G$. Quitte à conjuguer λ par un élément du groupe de Weyl de (G, T), on peut donc supposer que $G(\lambda)$ contient B. Autrement dit, λ est dans la chambre de Weyl positive.

Montrons alors que $(B \times B^-)y$ est ouvert dans Y, ce qui terminera la démonstration. Soit $g \in R_uG(\lambda)$, alors

$$\lambda(t)x = ((\lambda(t), 1)(g, g)x = (\lambda(t)g\lambda(t)^{-1}, g)(\lambda(t), 1)x.$$

En prenant la limite en 0, on obtient $y = (1, g)y$, d'où $(G \times G)_y$ contient $1 \times R_uG(\lambda)$. De même, $(G \times G)_y$ contient $R_uG(-\lambda) \times 1$. Enfin, tout $g \in L(\lambda)$ vérifie $\lambda(t)x = (g, g)\lambda(t)x$, donc $(G \times G)_y$ contient $\mathrm{diag}(L(\lambda))$. Mais le produit

$$(B \times B^-)((R_uG(-\lambda) \times R_uG(\lambda))\mathrm{diag}(L(\lambda))$$

est ouvert dans $G \times G$, d'où l'assertion.

3. Plongements des espaces homogènes sphériques

3.1. *Valuations invariantes*

On commence par quelques rappels sur un outil important en géométrie birationnelle: les valuations des corps de fonctions.

Soit X une variété normale. Une *valuation* de X est une application

$$\nu : \mathbf{C}(X)^* \to \mathbf{Q}$$

qui vérifie les conditions suivantes:
(i) $\nu(f_1+f_2) \geq \min(\nu(f_1), \nu(f_2))$ chaque fois que f_1, f_2 et f_1+f_2 sont dans $\mathbf{C}(X)^*$.
(ii) $\nu(f_1 f_2) = \nu(f_1) + \nu(f_2)$ chaque fois que f_1 et f_2 sont dans $\mathbf{C}(X)^*$.
(iii) $\nu|_{\mathbf{C}^*} = 0$.

On vérifie alors que l'image de ν est un sous-groupe discret de $\mathbf{Q}$, donc de la forme $a\mathbf{Z}$ pour un unique $a \in \mathbf{Q}_{>0}$; on dit que ν est *normalisée* si $a = 1$. On pose

$$\mathcal{O}_\nu := \{f \in \mathbf{C}(X) \mid \nu(f) \geq 0 \text{ ou } f = 0\},\ \mathcal{M}_\nu := \{f \in \mathbf{C}(X) \mid \nu(f) > 0 \text{ ou } f = 0\}.$$

Alors $\mathcal{O}_\nu$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M}_\nu$.

Tout diviseur premier D de X définit une valuation normalisée ν_D, où $\nu_D(f)$ est l'ordre du zéro ou du pôle de f le long de D; on a $\mathcal{O}_{\nu_D} = \mathcal{O}_{X,D}$ (l'anneau des fonctions rationnelles sur X, définies sur D) et $\mathcal{M}_{\nu_D} = \mathcal{M}_{X,D}$ (l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,D}$, formé des fonctions rationnelles sur X, nulles sur D).

Soit Y une sous-variété fermée de X. Alors Y est le *centre* de ν dans X si on a: $\mathcal{O}_{X,Y} \subseteq \mathcal{O}_\nu$ et $\mathcal{M}_{X,Y} \subseteq \mathcal{M}_\nu$ (il en résulte que $\mathcal{M}_{X,Y} = \mathcal{M}_\nu \cap \mathcal{O}_{X,Y}$). De façon équivalente, il existe un ouvert affine X_0 de X qui rencontre Y, tel que $\mathbf{C}[X_0]$ est contenu dans $\mathcal{O}_\nu$, et que $\mathbf{C}[X_0] \cap \mathcal{M}_\nu$ est l'idéal de $X_0 \cap Y$ dans $\mathbf{C}[X_0]$. Par suite, le centre de ν dans X est unique s'il existe.

Toute sous-variété fermée Y de X est le centre d'une valuation de X. En effet, si Y est un diviseur alors Y est le centre de ν_Y; dans le cas général, la normalisation de l'éclatement de Y dans X nous donne un morphisme birationnel propre $\pi : \tilde{X} \to X$ où $\tilde{X}$ est une variété normale, et où l'image réciproque de Y dans $\tilde{X}$ est un diviseur de Cartier. Soit $\tilde{Y}$ une composante irréductible de ce diviseur, alors $\pi(\tilde{Y}) = Y$ et le centre dans X de $\nu_{\tilde{Y}}$ (une valuation du corps $\mathbf{C}(\tilde{X}) = \mathbf{C}(X)$) est Y.

Si de plus X est une G-variété, une valuation ν de X est *invariante par* G si elle vérifie $\nu(gf) = \nu(f)$ pour tous $g \in G$ et $f \in \mathbf{C}(X)^*$. L'ensemble des valuations invariantes par G est noté $\mathcal{V}(X)$; en particulier, $\mathcal{V}(G)$ désigne l'ensemble des valuations de G qui sont invariantes par multiplication à gauche. Si $\nu \in \mathcal{V}(X)$ a un centre, celui-ci est stable par G; réciproquement, toute sous-variété fermée et stable par G est le centre d'une valuation invariante.

Proposition. *(i) Soit ν une valuation de G. Il existe un unique $\overline{\nu} \in \mathcal{V}(G)$ tel que $\overline{\nu}(f) = \nu(gf)$ pour tout $f \in \mathbf{C}(G)$ et pour tout g dans un ouvert non vide de G (dépendant de f). On a $\overline{\nu}(f) = \min_{g\in G} \nu(gf)$ pour toute $f \in \mathbf{C}[G]$.*
(ii) Soit $f \in \mathbf{C}[G]$ et soit M le sous-G-module de $\mathbf{C}[G]$ engendré par f. Alors, pour tout $\nu \in \mathcal{V}(G)$, on a $\nu(f) = \min_{f' \in M^{(B)}} \nu(f')$.

Démonstration. (i) Soit $f \in \mathbf{C}[G]$. Montrons qu'il existe un ouvert non vide G_0 de G (dépendant de f) tel que $\nu(gf)$ est indépendante de $g \in G_0$. On peut supposer que $f \in \mathbf{C}[G]$ et que ν est normalisée. Soit M le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[G]$ engendré par les gf $(g \in G)$. Puisque M est de dimension finie, il existe un entier n tel que $\nu(f') \geq n$ pour tout $f' \in M$. Soit n maximal pour cette propriété; soit M' l'ensemble des $f' \in M$ tels que $\nu(f') > n$. Alors M' est un sous espace vectoriel propre de M. Par suite,

$$G_0 := \{g \in G \mid gf \notin M'\}$$

est un ouvert non vide de G, et $\nu(gf) = n$ pour tout $g \in G_0$, d'où l'assertion.

On définit alors $\overline{\nu}$ par $\overline{\nu}(f) = \nu(gf)$ pour tout $g \in G_0$; il est immédiat que $\overline{\nu}$ convient.

(ii) Puisque M est l'espace vectoriel engendré par les gf $(g \in G)$, on a $\nu(f) \leq \nu(f')$ pour tout $f' \in M$, et donc $\nu(f) \leq \min_{f' \in M^{(B)}} \nu(f')$. Pour l'inégalité opposée, on observe que le G-module M est engendré par $M^{(B)}$.

Corollaire 1. *Soit H un sous-groupe de G, et soit $\nu \in \mathcal{V}(G/H)$. Il existe alors $\overline{\nu} \in \mathcal{V}(G)$ telle que ν est la restriction de $\overline{\nu}$ à $\mathbf{C}(G/H)$.*

Démonstration. On peut étendre ν en une valuation de $\mathbf{C}(G)$, qu'on peut supposer invariante grâce à la proposition ci-dessus.

On considère maintenant un espace homogène sphérique G/H et on note x son point de base (la classe de l'unité de G). Quitte à remplacer H par un conjugué, on peut supposer que BH est ouvert dans G. Alors $Bx = BH/H = B/B \cap H$ est un ouvert affine de G/H (cela résulte par exemple de la proposition 2.2). En particulier, $\mathbf{C}(G/H)$ est le corps des fractions de $\mathbf{C}[Bx]$, et de plus, toute composante irréductible du complémentaire de Bx dans Gx est de codimension 1. On note $\mathcal{D}(G/H)$ l'ensemble de ces composantes; c'est aussi l'ensemble des diviseurs premiers et stables par B de G/H. Les éléments de $\mathcal{D}$ sont appelés les *couleurs* de G/H. D'après le lemme 2.3, l'ensemble $\mathcal{D}$ est vide si et seulement si H contient le sous-groupe dérivé de G, c'est-à-dire si G/H est un tore.

Tout $D \in \mathcal{D}(G/H)$ définit une valuation B-invariante ν_D de G/H. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on note simplement $\mathcal{D} = \mathcal{D}(G/H)$, $\mathcal{V} := \mathcal{V}(G/H)$, etc.

Corollaire 2. *Soient $f_0 \in \mathbf{C}[Bx]$ et $\nu_0 \in \mathcal{V}$. Il existe alors $f \in \mathbf{C}(G/H)^{(B)}$ telle que: $\nu_0(f) = \nu_0(f_0)$, $\nu(f) \geq \nu(f_0)$ pour tout $\nu \in \mathcal{V}$ et $\nu_D(f) \geq \nu_D(f_0)$ pour tout $D \in \mathcal{D}$.*

Démonstration. Quitte à remplacer G par un revêtement fini, on peut supposer que l'algèbre $\mathbf{C}[G]$ est factorielle [KSS; p.74]. Autrement dit, tout diviseur δ de G est le diviseur d'une fonction rationnelle φ; si de plus δ est stable par l'action de $B \times H$, alors φ est vecteur propre de $B \times H$. Prenons pour δ la partie stable par B du diviseur de $1/f_0$, où on considère f_0 dans $\mathbf{C}(G/H)$; alors on obtient $\varphi \in \mathbf{C}(G)^{(B \times H)}$ telle que $\nu_D(\varphi) = -\nu_D(f_0)$ pour tout $D \in \mathcal{D}$. Puisque f_0 et φ sont définies partout sur BH, il en résulte que $f_0\varphi \in \mathbf{C}[G]^{(H)}$. D'après la proposition appliquée à $f_0\varphi$, il existe $f_0' \in \mathbf{C}[G]^{(B \times H)}$ telle que: $f_0'/\varphi \in \mathbf{C}(G/H)$, $\nu_0(f_0) = \nu_0(f_0'/\varphi)$ et $\nu(f_0) \leq \nu(f_0'/\varphi)$ pour tout $\nu \in \mathcal{V}$. De plus, pour tout $D \in \mathcal{D}(G/H)$, on a: $\nu_D(f_0'/\varphi) \geq \nu_D(1/\varphi) = \nu_D(f_0)$. On peut donc prendre $f = f_0'/\varphi$.

Puisque G/H contient une orbite ouverte de B, on a $\mathbf{C}(G/H)^B = \mathbf{C}$. Il en résulte que toute $f \in \mathbf{C}(G/H)^{(B)}$ est déterminé par son poids $\chi(f)$ à une constante multiplicative près. Autrement dit, l'application $f \mapsto \chi(f)$ définit une suite exacte

$$1 \to \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}(G/H)^{(B)} \to \mathcal{X}(G/H) \to 0.$$

Toute valuation ν de G/H se restreint en un homomorphisme de $\mathbf{C}(G/H)^{(B)}$ vers $\mathbf{Q}$ qui est nul sur $\mathbf{C}^*$, c'est-à-dire en un élément $\rho(\nu)$ de $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}(G/H), \mathbf{Q})$. On pose

$$V(G/H) := \mathrm{Hom}(\mathcal{X}(G/H), \mathbf{Q}).$$

C'est un espace vectoriel rationnel de dimension égale au rang de G/H.

Corollaire 3. *L'application $\rho : \mathcal{V}(G/H) \to V(G/H)$ est injective.*

Démonstration. Comme Bx est un ouvert affine de G/H, toute valuation de G est uniquement déterminée par sa restriction à $\mathbf{C}[Bx]$. Soient ν, $\nu' \in \mathcal{V}$. Si $\nu \neq \nu'$ alors il existe $f_0 \in \mathbf{C}[Bx]$ telle que $\nu(f_0) \neq \nu'(f_0)$; on peut supposer $\nu(f_0) < \nu'(f_0)$. D'après le corollaire 2, il existe alors $f \in \mathbf{C}(G/H)^{(B)}$ telle que $\nu(f) = \nu(f_0) < \nu'(f_0) \leq \nu'(f')$, d'où $\rho(\nu) \neq \rho(\nu')$.

Exemples. 1) Soit T un tore, vu comme espace homogène sous lui-même; alors $\mathcal{D}(T)$ est vide, et $\mathcal{X}(T)$ est le groupe des caractères. Montrons que ρ est un isomorphisme. D'après la proposition ci-dessus, il suffit de construire, pour tout $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathcal{X}(T), \mathbf{Z})$, une valuation invariante ν_λ telle que $\rho(\nu_\lambda) = \lambda$.

Tout $f \in \mathbf{C}[T]$ s'écrit de façon unique

$$f = \sum_{\chi \in \mathcal{X}(T)} a_\chi f_\chi$$

avec des $a_\chi \in \mathbf{C}$. Posons alors

$$\nu_\lambda(f) := \min_{a_\chi \neq 0} \langle \chi, \lambda \rangle.$$

On vérifie alors que $\nu_\lambda : \mathbf{C}[T] \setminus \{0\} \to \mathbf{Z}$ s'étend en une valuation invariante de $\mathbf{C}(T)$, qui convient. Cette construction sera généralisée en 4.1.

2) Reprenons l'exemple de l'espace homogène G/U^- considéré en 2.4; on peut alors identifier $\mathcal{X}$ au groupe des caractères de T. Soient R le système de racines de (G, T), avec R^+ l'ensemble des racines de (B, T), et S l'ensemble des racines simples. Soit W le groupe de Weyl de (G, T); pour tout $\alpha \in S$, notons $s_\alpha \in W$ la réflexion correspondante. D'après la décomposition de Bruhat, le complémentaire dans G de l'ouvert BU^- est réunion des diviseurs premiers $\overline{Bs_\alpha U^-}$ où α décrit S. Il en résulte que $\mathcal{D}$ est formé des

$$D_\alpha := \overline{Bs_\alpha U^-}/U^-.$$

Si de plus G est produit direct d'un tore par un groupe semisimple et simplement connexe, alors chaque D_α a une équation dans $\mathbf{C}[G]$, vecteur propre de $B \times B^-$ de poids $(\omega_\alpha, -\omega_\alpha)$ où ω_α est le poids fondamental associé à α [Hu; 31.1]. On en déduit que $\rho(\nu_{D_\alpha})$ s'identifie à la coracine $\alpha^\vee$. Ceci reste vrai pour G arbitraire, car il existe alors un revêtement fini $\pi : \tilde{G} \to G$ où $\tilde{G}$ est produit direct d'un tore par un groupe semisimple simplement connexe. D'autre part, on peut montrer que $\rho : \mathcal{V} \to V$ est un isomorphisme, en s'inspirant de l'exemple précdent [P1; 1.8]; ce résultat sera retrouvé en 4.3.

3) Dans l'exemple de $G \times G/\mathrm{diag}(G)$ considéré en 2.4, on identifie aussi $\mathcal{X}$ au groupe des caractères de T, et on montre comme ci-dessus que les $\rho(\nu_D)$ sont les coracines simples. On verra en 4.1 que $\mathcal{V}$ s'identifie à la chambre de Weyl négative.

3.2. *Plongements simples et valuations invariantes.*

On utilise les notations de 2.2 et de 3.1. Soit (X, x) un plongement simple de G/H, d'orbite fermée Y. On note $\mathcal{V}_X$ l'ensemble des diviseurs premiers de X qui sont stables par G. En identifiant un tel diviseur à la valuation normalisée de $\mathbf{C}(X) = \mathbf{C}(G/H)$ qui lui est associée, on considère $\mathcal{V}_X$ comme un sous-ensemble fini de $\mathcal{V}$.

On note $\mathcal{D}_X$ l'ensemble des diviseurs premiers de G/H qui sont stables par B et dont l'adhérence dans X contient Y. On identifie de même le sous-ensemble $\mathcal{D}_X$ de $\mathcal{D}$ à un ensemble fini de valuations de G/H. Observons que $\mathcal{D}_X$ est vide si et seulement si X est toroïdale (au sens de 2.4).

Proposition 1. *(i) Soit $f \in \mathbf{C}(X)$. Alors $f \in \mathbf{C}[X_{Y,B}]$ si et seulement si: $f \in \mathbf{C}[Bx]$ et $\nu(f) \geq 0$ pour tout $\nu \in \mathcal{V}_X \cup \mathcal{D}_X$.*
(ii) Le plongement (X, x) est uniquement déterminé par le couple $(\mathcal{V}_X, \mathcal{D}_X)$.

Démonstration. (i) D'après la proposition 2.2, l'ensemble $X_{Y,B} \setminus Bx$ est réunion des diviseurs premiers de $\mathcal{V}_X \cup \mathcal{D}_X$. De plus, puisque X est normale, une fonction rationnelle sur X est régulière sur $X_{Y,B}$ si et seulement si elle est régulière sur Bx et elle n'a pas de pôle sur $\mathcal{V}_X \cup \mathcal{D}_X$.

(ii) Soit (X', x') un autre plongement simple qui définit le même couple. D'après (i), les sous-anneaux $\mathbf{C}[X_{Y,B}]$ et $\mathbf{C}[X'_{Y',B}]$ de $\mathbf{C}(G/H)$ sont égaux. On a donc une application rationnelle $\varphi : X - \to X'$ qui est G-équivariante, définie sur $X_{Y,B}$, et qui se restreint en un isomorphisme de $X_{Y,B}$ sur $X'_{Y',B}$. Comme $GX_{Y,B} = X$, il suit que φ est un isomorphisme.

Rappelons que toute valuation ν de X définit un élément $\rho(\nu)$ de $V(G/H) := V$. On note $\mathcal{C}_X$ le cône convexe de V engendré par $\mathcal{V}_X$ et $\rho(\mathcal{D}_X)$.

Proposition 2. *(i) Les demi-droites $\mathbf{Q}_{\geq 0}\nu$ où $\nu \in \mathcal{V}_X$, sont les arêtes du cône $\mathcal{C}_X$ qui ne rencontrent pas $\rho(\mathcal{D}_X)$.*
(ii) Le plongement (X, x) est uniquement déterminé par le couple $(\mathcal{C}_X, \mathcal{D}_X)$.

Démonstration. (i) Soit $\nu \in \mathcal{V}_X$ associée au diviseur premier G-stable D de X. On peut trouver $f \in \mathbf{C}[X_{Y,B}]$ telle que f s'annule sur tous les éléments de $\mathcal{V}_X \cup \mathcal{D}_X$, sauf sur D. Autrement dit, $\nu(f) = 0$ et $\nu'(f) > 0$ pour tout $\nu' \in \mathcal{V}_X \cup \mathcal{D}_X$ tel que $\nu' \neq \nu$. D'après le corollaire 3.1.2, on peut supposer de plus que $f \in \mathbf{C}(G/H)^{(B)}$. Alors $\mathcal{C}_X$ est contenu dans le demi-espace $(f \geq 0)$ de V, et $\mathcal{C}_X \cap (f = 0)$ est égal à $\mathbf{Q}_{\geq 0}\nu$, d'où l'assertion.

(ii) résulte aussitôt de (i) et de la proposition 1.

Pour tout cône convexe fermé $\mathcal{C}$ de V, on note $\mathcal{C}^0$ son intérieur relatif, c'est-à-dire $\mathcal{C}$ privé de ses faces propres. On note aussi $\mathcal{C}^\vee$ le cône dual, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires f sur V telles que $f(\nu) \geq 0$ pour tout $\nu \in \mathcal{C}$. La partie linéaire de $\mathcal{C}^\vee$ est alors l'orthogonal de $\mathcal{C}$, noté $\mathcal{C}^\perp$.

Proposition 3. *(i) Soit $f \in \mathbf{C}(G/H)^{(B)}$. Alors $f \in \mathbf{C}[X_{Y,B}]$ si et seulement si $\chi(f) \in \mathcal{C}_X^\vee$. De plus, f est inversible sur $X_{Y,B}$ si et seulement si $\chi(f) \in \mathcal{C}_X^\perp$.*

(ii) Soit $\nu \in \mathcal{V}$. Alors le centre de ν dans X existe (resp. est Y) si et seulement si $\nu \in \mathcal{C}_X$ (resp. $\nu \in \mathcal{C}_X^0$).

Démonstration. (i) résulte aussitôt de la proposition 1.

(ii) Puisque $X_{Y,B}$ est affine et rencontre toutes les G-orbites de X, le centre de ν existe si et seulement si $\mathbf{C}[X_{Y,B}]$ est contenu dans $\mathcal{O}_\nu$. D'après le corollaire 3.1.2, cela signifie que $\mathcal{C}[X_{Y,B}]^{(B)}$ est contenu dans $\mathcal{O}_\nu$, ou encore que $\nu \in \mathcal{C}_X$.

Soit donc $\nu \in \mathcal{V} \cap \mathcal{C}_X$. Si le centre de ν est Y, alors toute $f \in \mathbf{C}[X_{Y,B}]$ telle que $\nu(f) = 0$ vérifie $f|_Y \neq 0$. Par suite, toute $f \in \mathbf{C}[X_{Y,B}]^{(B)}$ telle que $\nu(f) = 0$ est inversible. D'où $\mathcal{C}_X^\vee \cap (\chi(f) = 0) = \mathcal{C}_X^\perp$, c'est à dire $f \in \mathcal{C}_X^0$.

Soit $\nu' \in \mathcal{C}_X$. Si le centre de ν' contient strictement Y, on peut trouver $f \in \mathbf{C}[X_{Y,B}]$ telle que $\nu'(f) = 0$ et $f|_Y = 0$. Alors $\nu(f) > 0$ pour ν comme ci-dessus. D'après le corollaire 3.1.2, on peut suposer que $f \in \mathbf{C}[X_{Y,B}]^{(B)}$; alors $\chi(f) \notin \mathcal{C}_X^\perp$ et donc $\nu' \notin \mathcal{C}_X^0$.

Remarque. Soit S la variété sphérique affine associée à X et Y comme en 2.3. L'assertion (i) ci-dessus signifie que le cône $\mathcal{C}(S)$ est dual de $\mathcal{C}_X$.

3.3. *Classification des plongements simples.*

Définition. Un *cône colorié* est un couple $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ où $\mathcal{C} \subseteq V$ et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ vérifient les conditions suivantes:

C1: $\mathcal{C}$ est un cône convexe engendré par $\rho(\mathcal{F})$ et par un nombre fini d'éléments de $\mathcal{V}$.

C2: L'intérieur relatif de $\mathcal{C}$ rencontre $\mathcal{V}$.

Les *couleurs* sont les éléments de $\mathcal{F}$. Un cône colorié est *saillant* s'il vérifie:

SC: $\mathcal{C}$ est saillant, et $\rho(\mathcal{F})$ ne contient pas l'origine.

Théorème. *L'application $(X, x) \mapsto (\mathcal{C}_X, \mathcal{D}_X)$ définit une bijection des classes d'isomorphisme de plongements simples, sur les cônes coloriés saillants.*

Démonstration. Soit (X, x) un plongement simple. Alors **C1** est vérifiée par définition, et **C2** résulte de la proposition 3.2.3. On peut trouver $f \in \mathbf{C}[X_{Y,B}]^{(B)}$ qui s'annule sur $X_{Y,B} \setminus Bx$; alors $\nu(f) > 0$ pour tout $\nu \in \mathcal{V}_X \cup \mathcal{D}_X$ d'où la condition **SC**.

L'application de l'énoncé est injective grâce à la proposition 3.2.2. Pour la surjectivité, soit $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ un cône colorié saillant ; en particulier, le cône $\mathcal{C}$ est polyédral. D'après le lemme de Gordan [O; p. 3], le monoïde $\mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$ admet un nombre fini de générateurs. On peut donc trouver $g_1, \ldots, g_n \in \mathbf{C}(G/H)^{(B)}$ dont les poids engendrent ce monoïde. Soit D_0 la réunion des $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}$; alors les pôles dans G/H de $g_1, \ldots, g_n$ sont contenus dans D_0. On peut donc trouver $f_0 \in \mathbf{C}[G]^{(B \times H)}$ telle que l'ensemble des zéros de f_0 dans G est $\pi^{-1}(D_0)$ et que chaque $f_j := f_0 g_j$ est dans $\mathbf{C}[G]$. Soit χ le poids de f_0 par rapport à H, soit N le sous-G-module de $\mathbf{C}[G]$ engendré par $f_0, f_1, \ldots, f_n$, et soit M le dual de N. Alors N est formé de vecteurs propres de H de poids χ dans $\mathbf{C}[G]$, d'où un G-morphisme

$$\varphi : G/H \to \mathbf{P}(M).$$

Posons

$$X_0 := \overline{\varphi(G/H)} \cap (f_0 \neq 0) \text{ et } X := GX_0.$$

Vérifions que (X, x) est un plongement simple de G/H avec $\mathcal{C}_X = \mathcal{C}$ et $\mathcal{D}_X = \mathcal{F}$. Soit

$$\mathcal{M} := \{f \in \mathbf{C}(G/H)^{(B]} \mid \chi(f) \in \mathcal{C}^\vee\}.$$

Montrons que $\mathcal{M} = \mathbf{C}[X_0]^{(B)}$. Par construction, $\mathcal{M}$ est contenu dans $\mathbf{C}[X_0]^{(B)}$. Soit $f \in \mathbf{C}[X_0]^{(B)}$ et soit $\nu \in V$ engendrant une arête de $\mathcal{C}$. D'après **C1**, on peut supposer que $\nu \in \rho(\mathcal{F}) \cup \mathcal{V}$. Si $\nu \in \rho(\mathcal{F})$ alors $\nu(f) \geq 0$ car les pôles de f sont contenus dans D_0. Si $\nu \in \mathcal{V}$ alors $\nu \geq 0$ sur $f_0, \ldots, f_n$ et donc sur N. Mais N engendre l'algèbre $\mathbf{C}[X_0]$ d'où l'assertion.

D'après **SC**, le groupe $\mathcal{X}$ est engendré par $\mathcal{M}$. Il en résulte que $\mathcal{X} = \mathcal{X}(X)$. Ceci entraîne que φ est injective (par exemple grâce au corollaire 2.3). D'après **C2**, on peut trouver $\nu \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{V}$. En particulier, $\nu \geq 0$ sur $\mathbf{C}[X_0]^{(B)}$ et donc sur $\mathbf{C}[X_0]$ grâce au corollaire 3.2.2. Ainsi, ν a un centre Y dans X.

Montrons que Y est l'unique orbite fermée de G dans X. Sinon, il existe une sous-variété Z de X, fermée, stable par G et ne contenant pas Y. On peut trouver $\nu' \in \mathcal{V}$ dont le centre est Z. Puisque $\nu' \geq 0$ sur $\mathbf{C}[X_0]$, on a $\nu' \in \mathcal{C}$. Puisque Z ne contient pas Y, il existe $f \in \mathbf{C}[X_0]^{(B)}$ telle que $\nu(f) = 0$ et $\nu'(f) > 0$. Alors $\chi(f) \in \mathcal{C}^\vee \setminus \mathcal{C}^\perp$ ce qui est absurde car $\nu \in \mathcal{C}^0$.

Montrons que X est normale; il suffit de vérifier que X_0 l'est. Soit P le stabilisateur de D_0 dans G, soit N_0 le sous-G-module de N engendré par f_0, et soit M_0 le dual de N_0. Alors la projection $\mathbf{P}(M) - \to \mathbf{P}(M_0)$ est définie sur $\varphi(X)$, et X_0 est l'image réciproque de $\mathbf{P}(M_0)_{f_0}$. En appliquant le théorème 1.4, on obtient un sous-groupe de Levi L de P et une sous-variété S de X_0 tels que S est stable par L et que l'application $R_u(P) \times S \to X_0$ est un isomorphisme. Puisque X_0 est affine, S l'est aussi. De plus, $\mathbf{C}[S]^{(B \cap L)}$ s'identifie à $\mathcal{M}$; en particulier, c'est l'intersection du cône $\mathcal{C}^\vee$ et du réseau $\mathcal{X}$. Si $\tilde{S} \to S$ désigne la normalisation, il suit que $\mathbf{C}[S]^{(B \cap L)} = \mathbf{C}[\tilde{S}]^{(B \cap L)}$ puis que $\mathbf{C}[S] = \mathbf{C}[\tilde{S}]$. Ainsi, S est normale, et donc $X_0 \simeq R_u(P) \times S$ l'est aussi.

Ainsi, (X, x) est un plongement simple de G/H avec Y comme orbite fermée de G. On montre comme précédemment que Y est contenue dans l'adhérence de tout $D \in \mathcal{F}$, d'où $\mathcal{F}$ est contenu dans $\mathcal{D}_X$. D'autre part, si $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}$ alors $\varphi(D)$ est contenu dans l'hyperplan $(f_0 = 0)$. Ce dernier ne contient pas Y, d'où $D \notin \mathcal{D}_X$. On a donc $\mathcal{F} = \mathcal{D}_X$; en outre, $\mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X} = \mathcal{M} = \mathcal{C}_X^\vee \cap \mathcal{X}$ d'où $\mathcal{C} = \mathcal{C}_X$.

Exemple. Lorsque G/H est un tore T comme dans l'exemple 1 en 3.1, les cônes coloriés saillants sont simplement les cônes saillants engendrés par un nombre fini d'éléments de V. Pour un tel cône $\mathcal{C}$, soient $\chi_1, \ldots, \chi_n$ des caractères qui engendrent le monoïde $\mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$. Alors le plongement simple X construit ci-dessus n'est autre que la T-variété affine associée à la sous-algèbre $\mathbf{C}[\chi_1, \ldots, \chi_n]$ de $\mathbf{C}[T]$.

3.4. *Classification des plongements*

Définition. Une *face* d'un cône colorié $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ est un couple $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ où $\mathcal{C}'$ est une face du cône $\mathcal{C}$, l'intérieur relatif de $\mathcal{C}'$ rencontre $\mathcal{V}$, et $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap \rho^{-1}(\mathcal{C}')$.

Soit (X, x) un plongement et Y une orbite de G dans X. On note $(\mathcal{C}_{X,Y}, \mathcal{D}_{X,Y})$ le cône colorié associé au plongement simple $X_{Y,G}$.

Proposition. *Avec les notations précédentes, l'application $Z \mapsto (\mathcal{C}_{X,Z}, \mathcal{D}_{X,Z})$ est une bijection de l'ensemble des orbites de G dans X dont l'adhérence contient Y, sur l'ensemble des faces de $(\mathcal{C}_{X,Y}, \mathcal{D}_{X,Y})$.*

Démonstration. On peut supposer X simple, d'orbite fermée Y. Soit $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ une face du cône colorié de X; soit $\nu_0 \in \mathcal{C}'^0 \cap \mathcal{V}$. D'après la proposition 3.2.3, ν_0 a un centre dans

X, dont on note Z l'orbite ouverte. Soit $D \in \mathcal{D}_X \cup \mathcal{V}_X$. D'après le corollaire 3.1.2, D ne contient pas Z si et seulement s'il existe $f \in \mathbf{C}[X_{Y,B}]^{(B)}$ telle que $\nu_0(f) = 0$ et $\nu_D(f) = 0$. Il en résulte que $\mathcal{C}_{X,Z} = \mathcal{C}'$ et $\mathcal{D}_{X,Z} = \mathcal{D}'$.

Réciproquement, étant donnée une orbite Z de G dans X, on peut trouver $f \in \mathbf{C}[X_{Y,B}]^{(B)}$ telle que $f|_Z \neq 0$ mais que $\nu_D(f) > 0$ pour tout $D \in \mathcal{V}_X \cup \mathcal{V}_X$ qui ne contient pas Z. Alors $(\mathcal{C}_{X,Z}, \mathcal{D}_{X,Z})$ est la face de $(\mathcal{C}_X, \mathcal{D}_X)$ définie par le demi-espace $(\chi(f) \geq 0)$.

Définition. Un *éventail colorié* est un ensemble fini $\mathbf{F}$ de cônes coloriés qui vérifient les conditions suivantes:

F1: Toute face d'un cône colorié de $\mathbf{F}$ appartient à $\mathbf{F}$.

F2: Pour tout $\nu \in \mathcal{V}$, il existe au plus un $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathbf{F}$ tel que $v \in \mathcal{C}^0$.

Un éventail colorié est dit *saillant* s'il est formé de cônes coloriés saillants. Cela revient à dire que $(0, \emptyset) \in \mathbf{F}$.

Associons au plongement (X, x), l'ensemble

$$\mathbf{F}(X) := \{(\mathcal{C}_{X,Y}, \mathcal{D}_{X,Y}) \mid Y \text{ orbite de } G \text{ dans } X\}.$$

D'après le théorème 3.4 et la proposition ci-dessus, l'application $Y \mapsto (\mathcal{C}_{X,Y}, \mathcal{D}_{X,Y})$ est une bijection croissante de l'ensemble des orbites de G dans X, sur $\mathbf{F}(X)$ (on ordonne les orbites par l'inclusion de leurs adhérences).

Théorème 1. *L'application $(X, x) \mapsto \mathbf{F}(X)$ est une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme des plongements, sur l'ensemble des éventails coloriés saillants.*

Démonstration. Soit (X, x) un plongement. D'après la proposition ci-dessus, la condition **F1** est vérifiée. Si Y et Z sont des orbites de G dans X, et si $\nu \in \mathcal{C}^0_{X,Y} \cap \mathcal{C}^0_{X,Z} \cap \mathcal{V}$, alors ν a pour centres $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ d'après la proposition 3.2.3. Il en résulte que $Y = Z$, d'où **F2**.

D'après le théorème 3.3, X est uniquement déterminé par $\mathbf{F}(X)$. Soit $\mathbf{F}$ un éventail colorié saillant. Pour tout $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathbf{F}$, il existe un plongement simple $X(\mathcal{C}, \mathcal{F})$. Recollons ces plongements simples suivant les identifications définies par les faces grâce à la proposition ci-dessus. On obtient une prévariété X; montrons que X est séparée.

Soient $(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1), (\mathcal{C}_2, \mathcal{F}_2)$ dans $\mathbf{F}$ et X_1, X_2 les plongements simples associés. Soit X_{12} la normalisation de l'adhérence de G/H dans $X_1 \times X_2$. Il suffit de montrer que les projections $p_1 : X_{12} \to X_1$ et $p_2 : X_{12} \to X_2$ sont des immersions ouvertes. Soit Y une orbite de G dans X_{12}; posons $Y_1 = p_1(Y)$ et $Y_2 = p_2(Y)$. On peut suppposer que ces orbites sont fermées, quitte à diminuer X_1 et X_2. Soit $\nu \in \mathcal{V}$ de centre Y dans X_3; alors $\nu \in \mathcal{C}^0_{X,Y_1} \cap \mathcal{C}^0_{X,Y_2} \cap \mathcal{V}$. D'après **F2**, on a $X_1 = X_2 = X_{12}$.

Remarques. 1) Le plongement (X, x) est toroïdal (au sens de 2.4) si et seulement si $\mathcal{D}_{X,Y}$ est vide pour toute orbite Y de G dans X. Il en résulte que les plongements toroïdaux sont décrits par les subdivisions partielles de $\mathcal{V}$ en cônes polyédraux saillants; on verra en 4.1 que $\mathcal{V}$ est lui-même un cône convexe polyédral.

2) Soit $f \in \mathbf{C}[Bx]$; alors f est régulière sur X si et seulement si $\rho(\nu)(f) \geq 0$ pour tout $\nu \in \mathcal{V}_X \cup \mathcal{D}$. En particulier, l'ensemble des poids des vecteurs propres de B dans $\mathbf{C}[X]$ est l'intersection du réseau $\mathcal{X}$ et d'un cône convexe défini par un nombre fini d'inéquations linéaires. D'après le lemme de Gordan, cet ensemble est un monoïde de type fini. Il en résulte que l'algèbre $\mathbf{C}[X]^U$ est de type fini, puis que $\mathbf{C}[X]$ l'est aussi.

Plus généralement, pour toute variété sphérique X et pour tout fibré en droites $\mathcal{L}$ sur X, l'algèbre

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$$

est de type fini. En effet, c'est l'algèbre des fonctions régulières sur l'espace total du fibré dual $\mathcal{L}^\vee$. Soit $\pi : \tilde{G} \to G$ un revêtement fini tel que $\mathcal{L}^\vee$ est $\tilde{G}$-linéarisable. Alors $\tilde{G} \times \mathbf{C}^*$ opère dans $\mathcal{L}^\vee$ (où $\mathbf{C}^*$ opère par homothéties sur chaque fibre), et cette variété est sphérique.

3) Soit (X, x) un plongement complet de G/H. Puisque toute fonction régulière sur X est constante, il n'existe aucun demi-espace fermé de V contenant $\mathcal{V}_X$ et $\rho(\mathcal{D})$. En particulier, le cône convexe engendré par $\mathcal{V}$ et par $\rho(\mathcal{D})$ est égal à V.

Décrivons maintenant les morphismes de plongements. Soit H' un sous-groupe de G contenant H; autrement dit, le quotient $G \to G/H'$ se factorise par

$$\varphi : G/H \to G/H'.$$

On en déduit un homomorphisme injectif

$$\varphi^* : \mathcal{X}(G/H') \to \mathcal{X}(G/H)$$

et une application linéaire surjective

$$\varphi_* : V(G/H) \to V(G/H').$$

D'après le corollaire 3.1.1, l'application φ_* envoie $\mathcal{V}(G/H)$ sur $\mathcal{V}(G/H')$.

Soit $\mathcal{D}_\varphi$ l'ensemble des $D \in \mathcal{D}(G/H)$ tels que $\varphi(D) = G/H'$. Alors $\varphi(D) \in \mathcal{D}(G/H')$ pour tout $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varphi$.

Définitions. 1) Soient $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ et $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ des cônes coloriés pour G/H et G/H' respectivement. Alors $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ *domine* $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ si les conditions suivantes sont vérifiées:
M1 $\varphi_*(\mathcal{C})$ est contenu dans $\mathcal{C}'$.
M2 $\varphi_*(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varphi)$ est contenu dans $\mathcal{F}'$.

2) Soient $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$ des éventails coloriés pour G/H et G/H' respectivement. Alors $\mathbf{F}$ *domine* $\mathbf{F}'$ si tout élément de $\mathbf{F}$ domine un élément de $\mathbf{F}'$.

3) Le *support* d'un éventail colorié $\mathbf{F}$ est l'ensemble $\mathrm{Supp}\,\mathbf{F}$ formé des $\nu \in \mathcal{V}$ tels qu'il existe $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathbf{F}$ avec $\nu \in \mathcal{C}$.

Théorème 2. *Soient (X, x) et (X', x') des plongements de G/H et G/H' respectivement.*
(i) $\varphi : G/H \to G/H'$ s'étend en un morphisme $\varphi : X \to X'$ si et seulement si $\mathbf{F}(X)$ domine $\mathbf{F}(X')$.
(ii) Le morphisme $\varphi : X \to X'$ est propre si et seulement si $\mathrm{Supp}\,\mathbf{F}(X) = \varphi_*^{-1}(\mathrm{Supp}\,\mathbf{F}(X'))$.

Démonstration. (i) Supposons que $\varphi : X \to X'$ existe; il est alors G-équivariant. On peut supposer X et X' simples, d'orbites fermés respectives Y et Y'. Si $D \in \mathcal{D}_X$ alors l'adhérence de $\varphi(D)$ contient Y, d'où **M2**. D'autre part, puisque $\varphi_*(X_{Y,B})$ est contenu dans $X'_{Y',B}$, la composition avec φ envoie $\mathbf{C}[X'_{Y',B}]^{(B)}$ dans $\mathbf{C}[X_{Y,B}]^{(B)}$, d'où **M1**.

Réciproquement, supposons que $\mathbf{F}$ domine $\mathbf{F}'$. D'après **M2**, φ envoie $(G/H)_{Y,B}$ dans $(G/H')_{Y',B}$. Puis, d'après **M1**, φ^* envoie $\mathbf{C}[X'_{Y',B}]$ dans $\mathbf{C}[X_{Y,B}]$. Grâce au corollaire 3.1.2, la composition avec φ envoie $\mathbf{C}[X'_{Y',B}]$ dans $\mathbf{C}[X_{Y,B}]$. Autrement dit, φ s'étend en un morphisme de $X_{Y,B}$ vers $X'_{Y',B}$. Puisque $GX_{Y,B} = X$ et $GX'_{Y',B} = X'$, on conclut que φ s'étend en un morphisme de X vers X'.

(ii) On observe que $\operatorname{Supp}\mathbf{F}(X')$ est formé des valuations invariantes qui ont un centre dans X'. Si φ est propre, une telle valuation ν' se relève en une valuation ν qui a un centre dans X, d'après le critère valuatif de propreté. De plus, on peut supposer ν invariante, grâce à 3.1.

Réciproquement, supposons qu'il existe $\nu \in \mathcal{V}$ telle que $\nu \notin \operatorname{Supp}\mathbf{F}(X)$ mais que $\varphi_*(\nu) \in \operatorname{Supp}\mathbf{F}(X')$. Alors

$$\tilde{\mathbf{F}} := \mathbf{F} \cup \{(\mathbf{Q}_{\geq 0}\nu, \emptyset)\}$$

est un éventail colorié saillant, d'où un plongement $\tilde{X}$ de G/H, distinct de X. D'après (i), le morphisme φ se factorise par $X \to \tilde{X} \to X'$ et le premier morphisme est une immersion ouverte non triviale. Ainsi, φ ne peut être propre.

On va donner une interprétation des éventails coloriés non nécessairement saillants. Pour cela, on commence par la

Définition. Un *sous-espace colorié* est un cône colorié $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ tel que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $V(G/H)$.

Autrement dit, $\mathcal{C}$ est un sous-espace de $V(G/H)$ engendré (comme cône convexe) par $\rho(\mathcal{F})$ et par un nombre fini d'éléments de $\mathcal{V}(G/H)$.

Théorème 3. *(i) Pour tout sous-espace colorié $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, il existe un unique sous-groupe H' de G contenant H, tel que H'/H est connexe et que $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = (\mathcal{C}_\varphi, \mathcal{D}_\varphi)$ où on note $\varphi : G/H \to G/H'$ l'application canonique, $\mathcal{C}_\varphi$ le noyau de $\varphi_* : V(G/H) \to V(G/H')$ et $\mathcal{D}_\varphi$ l'ensemble des $D \in \mathcal{D}(G/H)$ telles que $\varphi(D) = G/H'$. De plus, $\mathcal{V}(G/H') = \varphi_*\mathcal{V}(G/H)$ et $\mathcal{D}(G/H') = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varphi$.*

(ii) L'application $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \to H'$ est une bijection entre sous-espaces coloriés et sous-groupes $H' \supset H$ tels que H'/H est connnexe.

La démonstration est analogue à celle des théorèmes 3.3 et 3.4.1, avec pour ingrédient nouveau le

Lemme. *Soit $\varphi : G/H \to G/H'$ avec H'/H connexe.*
(i)

$$\mathbf{C}[Bx'] = \{f \in \mathbf{C}[Bx] \mid v_D(f) \geq 0 \; \forall D \in \mathcal{D}_\varphi \text{ et } v(f) \geq 0 \; \forall \nu \in \mathcal{C}_\varphi \cap \mathcal{V}(G/H)\}.$$

(ii) Le couple $(\mathcal{C}_\varphi, \mathcal{F}_\varphi)$ est un sous-espace colorié.

Démonstration du lemme. (i) On peut trouver un plongement (X, x) de G/H tel que φ s'étend en un morphisme propre $\overline{\varphi} : X \to G/H'$. Soit X_0 l'image réciproque de Bx' dans X. Puisque φ est propre et à fibres connexes, on a $\mathbf{C}[X_0] = \mathbf{C}[Bx']$. Posons $X_1 := X_0 \cap Gx$, alors

$$X_1 = Gx \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varphi} D$$

ce qui entraîne que

$$\mathbf{C}[X_1] = \{f \in \mathbf{C}[Bx] \mid \nu_D(f) \geq 0 \; \forall D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varphi\}.$$

En outre, l'adhérence de $X_0 \setminus Gx$ est stable par G. Il en résulte que $f \in \mathbf{C}[X_0]$ si et seulement si $f \in \mathbf{C}[X_1]$ et $\nu(f) \geq 0$ pour toute $\nu \in \mathcal{V}(G/H)$ dont le centre rencontre X_0. Ceci a lieu précisément lorsque $\nu \in \mathcal{C}_\varphi \cap \mathcal{V}$.

(ii) Soit f un vecteur propre de B dans $\mathbf{C}(G/H)$ tel que $\chi(f) \geq 0$ sur $\mathcal{C}_\varphi \cap \mathcal{V}(G/H)$ et sur $\rho(\mathcal{F}_\varphi)$. D'après (i), $f \in \mathbf{C}(G/H')$, d'où $\chi(f) = 0$ sur $\mathcal{C}_\varphi$. Ainsi, $\mathcal{C}_\varphi$ est engendré par $\rho(\mathcal{F}_\varphi)$ et $\mathcal{C}_\varphi \cap \mathcal{V}(G/H)$.

Exemple. On a une bijection croissante entre les sous-groupes paraboliques de G qui contiennent H, et les sous-ensembles $\mathcal{F}$ de $\mathcal{D}(G/H)$ tels que le cône engendré par $\rho(\mathcal{F})$ et par $\mathcal{V}$ est égal à V. En effet, le sous-groupe H' est parabolique dans G si et seulement si le rang de G/H' est nul, c'est-à-dire $\mathcal{X}(G/H') = 0$. Cela équivaut à $\mathcal{C}_\varphi = V(G/H)$.

On obtient de façon analogue le

Théorème 4. *L'application $X \to \mathbf{F}(X)$ est une bijection des classes d'isomorphisme de G-variétés normales X munies d'un morphisme $\varphi : G/H \to X$ dominant, G-équivariant, et à fibre générique connexe, sur les éventails coloriés.*

4. Le cône des valuations d'un espace homogène sphérique

4.1. *Valuations invariantes, plongements élémentaires et sous-groupes à un paramètre*

Soit G/H un espace homogène sphérique. Les plongements les plus simples de G/H sont les plongements élémentaires au sens suivant.

Définition. Un plongement (X, x) est *élémentaire* si le complémentaire dans X de l'orbite ouverte Gx est une unique orbite de G, de codimension 1.

Soit alors ν la valuation associée au diviseur premier $X \setminus Gx$. On a $\nu \in \mathcal{V}$, et (X, x) est le plongement simple dont le cône colorié est $(\mathbf{Q}_{\geq 0}\nu, \emptyset)$. Réciproquement, d'après le théorème 3.3, toute valuation invariante ν de G/H définit un plongement élémentaire, qui ne dépend que de la demi-droite $\mathbf{Q}_{\geq 0}\nu$. On obtient ainsi une bijection entre classes d'isomorphisme de plongements élémentaires, et demi-droites dans $\mathcal{V}$.

On va construire des valuations invariantes à l'aide de sous-groupes à un paramètre de G, c'est-à-dire d'homomorphismes de groupes algébriques de $\mathbf{C}^*$ vers G. Soit λ un tel sous-groupe à un paramètre; soit $f \in \mathbf{C}[G]$. Il existe alors des $f_n \in \mathbf{C}[G]$ (où $n \in \mathbf{Z}$) en nombre fini, tels que

$$f(g\lambda(t)) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f_n(g) t^n$$

pour tous $g \in G$ et $t \in \mathbf{C}^*$. On pose

$$\overline{\nu}_\lambda(f) := \min\{n \mid f_n \neq 0\}.$$

Alors $\overline{\nu}_\lambda$ s'étend en une valuation de G, invariante à gauche; on note $\overline{\nu}_\lambda$ cette valuation, et ν_λ sa restriction au sous-corps $\mathbf{C}(G/H)$ de $\mathbf{C}(G)$. Lorsque G/H est un tore, on retrouve la construction de l'exemple 1 en 3.1.

Soit L un sous-groupe de Levi adapté à G/H (voir 2.4), et soit C le centre connexe de L. On va montrer que toute valuation invariante de G/H provient d'un sous-groupe à un paramètre λ à valeurs dans C. Grâce à 2.4, on peut identifier $\mathcal{X}(G/H)$ au groupe des caractères de $C/C \cap H$; ceci identifie λ à un point de

$$V(G/H) = \mathrm{Hom}(\mathcal{X}(C/C \cap H), \mathbf{Q}) := V.$$

Proposition. *Soit (X, x) un plongement élémentaire d'orbite fermée $Y = X \setminus Gx$. Il existe alors un sous-groupe à un paramètre indivisible λ de C tel que $\lim_{t \to 0} \lambda(t)x$ existe et appartient à l'orbite ouverte de B dans Y. De plus, λ est unique à multiplication près par un sous-groupe à un paramètre de $C \cap H$; la valuation invariante normalisée associée à X est ν_λ, et son image dans V est $-\lambda$.*

Démonstration. Observons que X est toroïdale; en effet, son orbite fermée de G est un diviseur premier. Avec les notations de 2.4, on peut donc trouver une sous-variété (localement fermée) S de X telle que S contient x, est stable par L, et que l'application $R_u(P) \times S \to X \setminus \Delta_X$ est un isomorphisme. Alors S est un plongement élémentaire du tore $C/C \cap H$ d'après la proposition 2.4.1. On a donc une unique décomposition

$$C/C \cap H \cong C' \times \mathbf{C}^*$$

telle que $S \cong C' \times \mathbf{C}$ [Fu; p. 29]. Ainsi, le sous-groupe à un paramètre indivisible $t \mapsto (0, t)$ convient, et c'est le seul modulo les sous-groupes à un paramètre de $C \cap H$.

Soit ν la valuation invariante normalisée associée à X. Montrons que $\nu = \nu_\lambda$; il suffit de vérifier que le centre de ν_λ dans X existe et est Y. Soit $y := \lim_{t\to 0} \lambda(t)x$, alors By est ouvert dans Gy donc BG_y est ouvert dans G. Pour tout $g \in BG_y$ et tout $f \in \mathbf{C}[X_{Y,B}]$, l'application $t \mapsto f(g\lambda(t)x)$ est définie en 0, car $\lim_{t\to 0} g\lambda(t)x = gy \in X_{Y,B}$. On peut donc écrire

$$f(g\lambda(t)x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} f_n(g)t^n$$

pour tous $g \in G$ et $t \in \mathbf{C}^*$, avec des f_n dans $\mathbf{C}[G]$. Il en résulte que $\nu_\lambda(f) \geq 0$. Si de plus f s'annule sur Y, alors l'application $t \mapsto f(g\lambda(t)x)$ s'annule en 0, d'où $\nu_\lambda(f) > 0$. Ainsi, $\mathcal{O}_{\nu_\lambda}$ contient $\mathbf{C}[X_{Y,B}]$, et $\mathcal{M}_{\nu_\lambda}$ contient l'idéal de Y. La valuation ν_λ est non triviale et a un centre dans X, donc ce centre est Y.

Vérifions enfin que l'image de ν_λ dans V est $-\lambda$. Soit $f \in \mathcal{O}_\nu$ un vecteur propre de B, et soit χ son poids. Alors $f \in \mathbf{C}[X_{Y,B}]$ et

$$t^{-\langle\chi,\lambda\rangle} f(x) = f(\lambda(t)x) = \sum_{n\geq 0} f_n(1)t^n$$

et $f(x) \neq 0$, d'où $\langle\chi, \lambda\rangle \leq 0$. Par suite, $-\lambda$ est non négatif sur le demi-espace $(\nu \geq 0)$ de V. Puisque $-\lambda$ et ν sont indivisibles, ils sont égaux.

Une conséquence importante de cette interprétation de $\mathcal{V}$ est le résultat suivant, qui sera redémontré par une autre méthode en 4.2.

Théorème. *L'ensemble $\mathcal{V}$ est un cône convexe polyédral.*

Démonstration. Soient ν_1, ν_2 des valuations invariantes normalisées distinctes; soient a_1, a_2 des entiers positifs. Montrons que $a_1\nu_1 + a_2\nu_2 \in \mathcal{V}$. Soit $\mathcal{C}$ le cône convexe engendré par ν_1 et ν_2. D'après le théorème 3.3, le cône colorié $(\mathcal{C}, \emptyset)$ provient d'un plongement toroïdal simple (X, x). Soient X_1, X_2 les diviseurs premiers, stables par G, de X associés à ν_1, ν_2. Soit n un entier positif, et soient $\mathcal{O}_X(-na_2X_1)$, $\mathcal{O}_X(-na_1X_2)$ les faisceaux d'idéaux de X associés aux diviseurs de Weil na_2X_1, na_1X_2. Posons

$$\mathcal{I} := \mathcal{O}_X(-na_2X_1) + \mathcal{O}_X(-na_1X_2).$$

C'est un faisceau d'idéaux de X, stable par G, et définissant l'orbite fermée de G dans X. Notons $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement normalisé de $\mathcal{I}$. Alors G opère dans $\tilde{X}$, qui est donc une G-variété toroïdale. Vérifions que l'éventail colorié de $\tilde{X}$ possède exactement deux cônes maximaux, engendrés par $\nu_1, a_1\nu_1 + a_2\nu_2$ et par $a_1\nu_1 + a_2\nu_2, \nu_2$ respectivement.

Pour cela, on peut supposer que $G = T$ est un tore, d'après 2.4 et la proposition ci-dessus. Il existe alors une décomposition $T \cong T' \times T''$ où T'' est un tore de dimension 2, telle que $X \cong T' \times X''$ où X'' est une T''-variété torique avec point fixe [Fu; p. 29]. On peut ainsi se ramener au cas où T est de dimension 2 et où X est une surface affine torique avec point fixe. Il existe alors un entier $n > 0$ tel que les diviseurs na_2X_1, na_1X_2 sont principaux, associés à des fonctions f_1, f_2 qui sont vecteurs propres de T. De plus

$\nu_1(f_1) = na_2$, $\nu_2(f_1) = \nu_1(f_2) = 0$ et $\nu_2(f_2) = na_1$. Puisque l'idéal $\mathcal{I}$ est engendré par f_1 et f_2, la variété $\tilde{X}$ est la normalisation du graphe de l'application rationnelle

$$f_1/f_2 : X - \to \mathbf{P}^1.$$

L'ensemble exceptionnel de $\pi : \tilde{X} \to X$ est la droite projective dans laquelle T opère via la différence des poids de f_1, f_2. La valuation invariante associée est donc ν_λ où λ est le sous-groupe à un paramètre indivisible qui laisse fixe f_1/f_2. Soient λ_1, λ_2 les sous-groupes à un paramètre indivisibles associés à ν_1, ν_2; alors $a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2$ fixe f_1/f_2, c'est donc un multiple de λ.

Ainsi, $\mathcal{V}$ est un cône convexe; montrons qu'il est polyédral. D'après la proposition 2.4.2, on peut trouver un plongement complet toroïdal (X, x). Soit $\mathcal{V}_X$ le sous-ensemble de $\mathcal{V}$ formé des valuations associées aux diviseurs premiers de X qui sont stables par G. D'après 3.4, l'éventail de X a pour support $\mathcal{V}$; il en résulte que $\mathcal{V}$ est engendré par l'ensemble fini $\mathcal{V}_X$.

Exemple. Pour l'espace homogène $G = (G \times G)/\mathrm{diag}(G)$ considéré en 2.4 et 3.1, on identifie $\mathcal{X}$ au groupe des caractères de T. Tout sous-groupe à un paramètre λ de T définit alors une valuation $(G \times G)$-invariante v_λ. On vérifie que $v_{w(\lambda)} = v_\lambda$ pour tout w dans le groupe de Weyl de (G, T); on peut donc supposer que λ est dans la chambre de Weyl positive. D'après la proposition ci-dessus et l'argument à la fin de 2.4, il en résulte que $\mathcal{V}$ est la chambre de Weyl négative.

En particulier, lorsque $G = \mathrm{PGL}_2$, le cône des valuations est une demi-droite, qui ne contient pas l'image de l'unique couleur (en effet, on a vu que celle-ci est la coracine). Il en résulte que PGL_2 admet un unique plongement non trivial; cela peut aussi se voir directement, comme dans l'introduction. De même SL_2 admet un unique plongement non trivial: la quadrique d'équation $ad - bc = t^2$ dans $\mathbf{P}(M_2 \oplus \mathbf{C})$.

4.2. *Le cône des valuations et son cône dual*

On conserve les notations de 4.1. On va donner une autre démonstration du fait que $\mathcal{V}$ est un cône convexe, et on va aussi décrire son cône dual. Pour cela, on commence par produire des inéquations linéaires vérifiées par tous les éléments de $\mathcal{V}$. Pour $\chi \in \mathcal{X}$ et $\nu \in \mathcal{V}$, on pose

$$\langle \nu, \chi \rangle := \rho(\nu)(\chi),$$

ce qui a un sens puisque ρ est injective sur $\mathcal{V}$.

Soient M_1 et M_2 deux sous-G-modules à gauche de $\mathbf{C}[G]$, simples et formés de vecteurs propres de H opérant par multiplication à droite. Considérons le produit M_1M_2 dans $\mathbf{C}[G]$ et un sous-G-module simple M de M_1M_2. Soient f, f_1, f_2 des vecteurs propres de B dans M, M_1, M_2 respectivement; alors $f_1f_2f^{-1}$ est un vecteur propre de B dans $\mathbf{C}(G/H)$. Soit $\nu \in \mathcal{V}$, et soit $\overline{\nu}$ comme dans la proposition 3.1. Alors $\overline{\nu}(f) \geq \overline{\nu}(f_1) + \overline{\nu}(f_2)$ car f est combinaison linéaire de produits de la forme $(g_1f_1)(g_2f_2)$ avec g_1 et g_2 dans G. On a donc $\nu(f_1f_2f^{-1}) \leq 0$. En notant σ le poids de f, on a: $\sigma \in \mathcal{X}(G/H)$ et $\langle \nu, \sigma \rangle \leq 0$.

Proposition. *Soit Σ le sous-ensemble de $\mathcal{X}(G/H)$ formé des poids des $f_1f_2f^{-1}$ avec f_1, f_2, f comme ci-dessus. Alors $\mathcal{V}$ est l'ensemble des $\nu \in V$ tels que $\langle \nu, \sigma \rangle \leq 0$ pour tout $\sigma \in \Sigma$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{CV}$ cet ensemble; on vient de voir que $\mathcal{V}$ est contenu dans $\mathcal{CV}$. Réciproquement, soit $\nu \in \mathcal{CV}$. On vérifie que $\nu \in \mathcal{V}$ en suivant la preuve du théorème 3.3, avec $\mathcal{C} = \mathbf{Q}_{\geq 0}\nu$ et $\mathcal{F} = \emptyset$. Avec les notations de cette preuve, on a $\nu(f_j) \geq 0$ pour $0 \leq j \leq n$ ce qui entraîne que $\nu \geq 0$ sur N, car $\nu \in \mathcal{CV}$. On a donc $\mathbf{C}[X_0]^{(B)} = \mathcal{M} \neq \mathbf{C}(G/H)^{(B)}$; par suite, (X, x) est un plongement non trivial de G/H. Soit $\nu' \in \mathcal{V}$ ayant un centre dans X; alors ν' est non négative sur le demi-espace $\mathcal{M}$, donc ν' est multiple positif de ν.

Avec les notations ci-dessus, le G-module M apparaît dans la décomposition du produit tensoriel $M_1 \otimes M_2$ en sous-modules simples. Puisque

$$\sigma = \chi(f_1) + \chi(f_2) - \chi(f),$$

il en résulte que σ est combinaison linéaire de racines simples avec des coefficients entiers positifs. Par suite, Σ est contenu dans le cône convexe engendré par les racines simples, et donc $\mathcal{V}$ contient l'image dans V de la chambre de Weyl négative; notons cette image $C_{G/H}$. On a obtenu ainsi le

Corollaire. *L'ensemble $\mathcal{V}$ est un cône convexe qui contient $C_{G/H}$, et dont le cône dual est engendré par $-\Sigma$. En particulier, $\mathcal{V}$ engendre l'espace vectoriel V, et la partie linéaire de $\mathcal{V}$ est $\Sigma^\perp$.*

Exemple. Considérons encore une fois l'espace homogène $(G \times G)/\mathrm{diag}(G)$. Montrons alors que Σ contient toutes les racines simples, ce qui redémontrera que $\mathcal{V}$ est la chambre de Weyl négative.

Soient V un G-module simple, et χ_V son caractère, c'est-à-dire: $\chi_V(g)$ est la trace de l'endomorphisme de V défini par $g \in G$. Alors $\chi_V \in \mathbf{C}[G] = \mathbf{C}[(G \times G)/\mathrm{diag}(G)]$ et le $(G \times G)$-sous-module de $\mathbf{C}[G]$ engendré par χ_V est simple, isomorphe à $V^* \otimes V$; on obtient ainsi tous les sous-modules simples M de $\mathbf{C}[G]$. Soient M_1 et M_2 deux tels sous-modules, associés à V_1 et V_2. Le produit $\chi_{V_1}\chi_{V_2}$ est combinaison linéaire à coefficients entiers positifs des χ_V où le G-module simple V apparaît dans $V_1 \otimes V_2$. Il en résulte que le $(G \times G)$-module simple $M = V^* \otimes V$ apparaît dans le produit $M_1 M_2$. Si de plus les plus grands poids χ_1, χ_2 de V_1, V_2 ne sont pas orthogonaux à une même racine simple α, alors $V_1 \otimes V_2$ contient un sous-G-module simple de plus grand poids $\chi_1 + \chi_2 - \alpha$ [Bo; VIII.7, exercice 17], d'où l'assertion.

4.3. *Le normalisateur d'un sous-groupe sphérique*

On conserve les notations de 4.1 et 4.2, et on note $N_G(H)$ le normalisateur de H dans G. En faisant opérer $N_G(H)$ par multiplication à droite dans G/H, on identifie le quotient $N_G(H)/H$ au groupe des automorphismes G-équivariants de G/H.

Théorème. *(i) Soit $\langle\Sigma\rangle$ le sous-groupe de $\mathcal{X}(G/H)$ engendré par Σ. Alors le groupe algébrique $N_G(H)/H$ est isomorphe à* $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}(G/H)/\langle\Sigma\rangle, \mathbf{C}^*)$*. En particulier, $N_G(H)/H$ est diagonalisable, et sa dimension est celle de la partie linéaire du cône $\mathcal{V}(G/H)$. De plus, $N_G(H) = N_G(H^0)$ où H^0 est la composante neutre de H.*
(ii) On a une suite exacte

$$0 \to \Sigma^\perp \to V(G/H) \to V(G/N_G(H)) \to 0.$$

De plus, le cône $\mathcal{V}(G/N_G(H))$ est le quotient de $\mathcal{V}(G/H)$ par sa partie linéaire.

(iii) Pour tout sous-groupe de Borel B de G tel que BH est ouvert dans G, le stabilisateur à droite de BH est égal à $N_G(H)$. En particulier, $N_G(H)$ est son propre normalisateur.

Démonstration. (i) Soit $\gamma \in N_G(H)$ et soit f un vecteur propre de B dans $\mathbf{C}(G/H)$, de poids χ. Alors l'application $g \mapsto f(g\gamma)$ est invariante par H à droite, et vecteur propre de B de poids χ. Il existe donc un nombre complexe non nul $\Theta_f(\gamma)$ tel que

$$f(g\gamma) = \Theta_f(\gamma) f(g)$$

pour tout $g \in G$. L'application

$$\Theta_f : N_G(H) \to \mathbf{C}^*$$

ainsi définie est un caractère, dont la restriction à H est triviale, et qui ne dépend que de χ; notons-le Θ_χ. On obtient ainsi un homomorphisme

$$\Theta : N_G(H)/H \to \mathrm{Hom}(\mathcal{X}(G/H), \mathbf{C}^*).$$

Montrons que $\Theta_\sigma = 1$ pour tout $\sigma \in \Sigma$. Soient M_1, M_2, M, f_1, f_2, f comme en 4.2, tels que $f_1 f_2 f^{-1}$ est de poids σ; alors $f_1 f_2$ et f sont des vecteurs propres de H de même poids π. Quitte à remplacer f_1, f_2, f par $f_1 f^{n-1}$, $f_2 f^{n-1}$, f^n où n est un entier bien choisi, on peut supposer que π est invariant par $N_G(H)$ (en effet, ce dernier opère dans les caractères de H via un quotient fini). Par suite, $f_1 f_2 f^{-1}$ est invariant par $N_G(H)$, d'où l'assertion.

Montrons que Θ est injective. Soit π un caractère de H, invariant par $N_G(H)$ et tel que le fibré en droites G-linéarisé sur G/H associé à π est très ample. Pour tout entier $n \geq 0$, notons A_n le sous-espace de $\mathbf{C}[G]$ formé des vecteurs propres de H de poids $n\pi$. Le groupe $G \times N_G(H)$ opère par automorphismes dans l'algèbre graduée

$$A := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n.$$

On vérifie que la sous-algèbre A^U est de type fini, donc il en est de même de A [Kr; III.3.1]; de plus A est normale. Il en résulte que $Proj(A)$ est un plongement projectif de G/H, muni d'une opération de $N_G(H)/H$. Si $\gamma \in N_G(H)$ est tel que $\Theta(\gamma) = 1$, alors γ multiplie tous les éléments de $A_n^{(B)}$ par un même scalaire, donc γ opère par homothéties dans chaque A_n. Par suite, γ opère trivialement dans $Proj(A)$ et dans son sous-ensemble G/H, c'est-à-dire: $\gamma \in H$.

Montrons enfin que l'image de Θ est formée des $\delta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{X}(G/H), \mathbf{C}^*)$ dont la restriction à Σ est triviale. Choisissons $f \in A_1^{(B)}$. Soit $\varphi \in A_n^{(B)}$; alors φ/f^n est un vecteur propre de B dans $\mathbf{C}(G/H)$. Pour δ comme ci-dessus, posons

$$\gamma(\varphi) := \delta(\varphi/f^n)\varphi.$$

Alors γ s'étend en un unique endomorphisme du G-module A_n, noté encore γ. Ceci définit un endomorphisme γ de l'espace vectoriel A, qui préserve la graduation et l'action de G. De plus, la condition que δ est trivial sur Σ entraîne que γ préserve la multiplication de A. Par suite, γ définit un automorphisme G-équivariant de G/H (qui est l'orbite ouverte de G dans $Proj(A)$), et ce dernier s'envoie sur δ par Θ.

Ainsi, le groupe $N_G(H)/H$ est diagonalisable, et sa dimension est le rang du quotient $\mathcal{X}(G/H)/\langle\Sigma\rangle$, c'est-à-dire la dimension du sous-espace $\Sigma^\perp$ de l'espace vectoriel $V(G/H) = \mathrm{Hom}(\mathcal{X}(G/H), \mathbf{Q})$. De plus, on a

$$H^0 \subseteq H \subseteq N_G(H) \subseteq N_G(H^0)$$

et le quotient $N_G(H^0)/H^0$ est abélien, car G/H^0 est aussi sphérique. Par suite, $N_G(H^0)$ normalise H, d'où $N_G(H^0) = N_G(H)$.

(ii) Le sous-espace $\mathcal{X}(G/N_G(H))$ de $\mathcal{X}(G/H)$ est formé des invariants à droite du groupe $N_G(H)/H$. Il résulte de (i) que cet espace est engendré par Σ. En passant au dual, on obtient la suite exacte de l'énoncé. La dernière assertion résulte alors de 3.4.

(iii) Notons $\tilde{H}$ le stabilisateur à droite de BH. Soit $g \in N_G(H)$. Alors $BgH = BHg$ est un ouvert non vide de G, donc il rencontre BH. Ainsi $g \in BH$ et $BHg = BH$, donc $g \in \tilde{H}$. Le même argument montre que $\tilde{H}$ est contenu dans BH^0, d'où $BH = BH^0$.

Pour montrer que $\tilde{H}$ est contenu dans $N_G(H)$, on peut donc supposer H connexe (car $N_G(H) = N_G(H^0)$). Quitte à remplacer G par un revêtement fini, on peut aussi supposer que l'algèbre $\mathbf{C}[G]$ est factorielle. D'autre part, toute composante irréductible de $G \setminus BH$ est de codimension 1 (car $G \setminus BH$ est l'image réciproque dans G du complémentaire de $B/B \cap H$ dans G/H, et $B/B \cap H$ est affine); la multiplication à droite par $\tilde{H}$ laisse stable l'ensemble de ces composantes. Soit D une telle composante, et soit f_D une équation de D dans $\mathbf{C}[G]$. Alors f_D est vecteur propre de B (opérant à gauche) et de H (opérant à droite). De plus, tout vecteur propre de $B \times H$ dans $\mathbf{C}[G]$ s'écrit

$$\chi \prod_D f_D^{n_D}$$

où χ est un caractère de G, et où les n_D sont des entiers non négatifs. Il en résulte que l'ensemble $\mathbf{C}[G]^{(B\times H)}$ est stable par multiplication à droite par $\tilde{H}$. Il en est donc de même pour l'ensemble $\mathbf{C}[G]^{(H)}$. Par suite, $\tilde{H}$ normalise H.

Corollaire. *Pour un espace homogène sphérique G/H, les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) Le cône $\mathcal{V}(G/H)$ est un espace vectoriel.
(ii) Le groupe H contient un sous-groupe unipotent maximal de G.

Démonstration. (i)⇒(ii) Il résulte du théorème ci-dessus que le cône des valuations de $G/N_G(H)$ est trivial. D'après le théorème 3.4.3, le rang de $G/N_G(H)$ est nul; le corollaire 1.4.1 implique alors que $N_G(H)$ est un sous-groupe parabolique de G. Puisque $N_G(H)/H$ est diagonalisable, H contient un sous-groupe unipotent maximal de $N_G(H)$ et donc de G.

(ii)⇒(i) Soit U le radical unipotent de B; alors le sous-groupe U est sphérique, et son normalisateur est B. Puisque $rg(G/B) = 0$, le cône des valuations $\mathcal{V}(G/U)$ est égal à sa partie linéaire; autrement dit, c'est un espace vectoriel. D'après 3.4, il en est de même pour $\mathcal{V}(G/H)$.

4.4. *Le plongement canonique d'un espace homogène sphérique sobre*

Une conséquence immédiate mais remarquable du théorème 4.3 est la

Proposition 1. *Pour un espace homogène sphérique G/H, les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) Le groupe H est d'indice fini dans son normalisateur.
(ii) Le cône $\mathcal{V}(G/H)$ est saillant.

Un espace homogène sphérique G/H qui vérifie l'une de ces conditions est appelé *sobre*. D'après la classification des plongements, il existe alors un unique plongement complet, simple et toroïdal $\mathbf{X}$ de G/H: c'est le plongement associé au cône colorié $(\mathcal{V}(G/H), \emptyset)$. De plus, tout plongement complet simple est dominé par $\mathbf{X}$, et tout plongement toroïdal domine $\mathbf{X}$. On appelle $\mathbf{X}$ le *plongement canonique* de G/H.

On suppose désormais que l'espace homogène sphérique G/H est sobre. On va donner une construction de son plongement canonique à l'aide de représentations de G.

Soit M un G-module simple contenant un vecteur propre v de H. Soit B un sous-groupe de Borel de G tel que BH est ouvert dans G, et soit η un vecteur propre de B dans M^*. L'application

$$\langle \eta, \cdot v \rangle : g \mapsto \eta(gv)$$

est alors une fonction régulière sur G, non nulle, et vecteur propre de $B \times H$. Par suite, cette application ne s'annule pas sur BH. On dit que (M, v) est *régulier* si $\langle \eta, \cdot v \rangle$ s'annule partout sur $G \setminus BH$. Si par exemple H est un sous-groupe de Borel de G, les couples réguliers (M, v) sont ceux pour lesquels le plus grand poids de M est régulier, c'est-à-dire dans l'intérieur de la chambre positive.

Proposition 2. *Avec les notations précédentes, il existe des couples réguliers (M, v). Pour un tel couple, en notant $[v]$ l'image de v dans $\mathbf{P}(M)$, on a*

$$H \subseteq G_{[v]} \subseteq N_G(H),$$

et le plongement canonique de G/H est la normalisation de la variété $\overline{G[v]}$ dans le corps $\mathbf{C}(G/H)$ (qui contient $\mathbf{C}(G/G_{[v]})$).

Démonstration. On peut trouver un vecteur propre f de $B \times H$ dans $\mathbf{C}[G]$, qui s'annule partout sur $G \setminus BH$. Puisque le $(G \times G)$-module $\mathbf{C}[G]$ est isomorphe à la somme directe des $M^* \otimes M$ où M décrit tous les G-modules simples, il existe un tel M avec $v \in M^{(H)}$ et $\eta \in (M^*)^{(B)}$ qui vérifient $f = \langle \eta, \cdot v \rangle$. Alors (M, v) est régulier.

Il est clair que $G_{[v]}$ contient H et est contenu dans le stabilisateur à droite de l'ouvert BH; celui-ci est le normalisateur de H, d'après le théorème 4.3.

Puisque le G-module M est simple, $M^{(B)}$ est une droite, donc G a une unique orbite fermée Y dans $\mathbf{P}(M)$ et dans $\overline{G[v]}$. De plus, l'hyperplan $(\eta = 0)$ de $\mathbf{P}(M)$ ne contient pas Y, et rencontre $G[v]$ suivant $G[v] \setminus B[v]$. Ainsi, tout diviseur premier de $\overline{G[v]}$ qui est stable par B et qui rencontre $G[v]$, ne contient pas Y. Il en résulte que la normalisation de $\overline{G[v]}$ dans $\mathbf{C}(G/H)$ est toroïdale, et que la variété torique associée (comme en 2.4) est affine. Par suite, cette normalisation est un plongement complet, simple et toroïdal de G/H.

5. Fibrés en droites sur les variétés sphériques

5.1. *Le groupe de Picard des variétés sphériques simples.*

Soit P un sous-groupe parabolique de G. Le groupe de Picard $Pic(G/P)$ est engendré librement par les classes des diviseurs premiers de G/P qui sont stables par B. De plus, les diviseurs engendrés par leurs sections (resp. amples) sur G/P sont les combinaisons linéaires à coefficients non négatifs (resp. positifs) de ces classes. On va généraliser ce résultat à toutes les variétés sphériques simples.

Théorème. *Soit (X, x) un plongement simple de l'espace homogène sphérique G/H; soit $(\mathcal{C}_X, \mathcal{D}_X)$ son cône colorié.*
(i) Les diviseurs de Cartier sur X sont les diviseurs linéairement équivalents à une combinaison à coefficients entiers

$$\sum_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X} n_D D.$$

De plus, l'application $\chi \in \mathcal{C}_X^\perp \mapsto \sum_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X} \langle \rho(\nu_D), \chi \rangle D$ définit une suite exacte

$$\mathcal{C}_X^\perp \to \mathbf{Z}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X) \to Pic(X) \to 0.$$

(ii) Les diviseurs de Cartier engendrés par leurs sections (resp. amples) sont les diviseurs linéairement équivalents à une combinaison linéaire des $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X$ à coefficients non négatifs (resp. positifs).

Démonstration. (i) D'après le théorème 2.3 et le lemme ci-dessous, le groupe de Picard de $X_{Y,B}$ est trivial. Ainsi, tout diviseur de Cartier sur X est linéairement équivalent à un diviseur à support dans $X \setminus X_{Y,B}$, c'est-à-dire à une combinaison entière des $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X$. Mais d'après la proposition 2.2, tout $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X$ est un diviseur de Cartier, d'où la première assertion.

Pour la seconde assertion, soit

$$\delta = \sum_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X} n_D D$$

un diviseur linéairement équivalent à 0. Écrivons $\delta = div(f)$ avec $f \in \mathbf{C}(X) = \mathbf{C}(G/H)$. Puisque le support de δ est stable par B, la fonction f est vecteur propre de B. En outre, le support de δ ne rencontre pas $\mathcal{V}_X \cup \mathcal{D}_X$, donc $\chi(f) \in \mathcal{C}_X^\perp$. Réciproquement, pour tout f telle que $\chi(f) \in \mathcal{C}_X^\perp$, le diviseur de f est combinaison linéaire des $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X$.

(ii) Soit

$$\delta = \sum_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X} n_D D$$

un diviseur de Cartier sur X; on peut supposer que le fibré en droites associé est G-linéarisé.

Si chaque n_D est non négatif, alors δ est engendré par ses sections globales d'après la proposition 2.2. Supposons de plus que chaque n_D est positif, et montrons que δ est ample. Pour cela, il suffit de trouver une famille finie de sections globales (s_i) engendrant δ, telle que chaque X_{s_i} est affine et que $\mathbf{C}[X_{s_i}]$ est la réunion de ses sous-espaces $\Gamma(X, n\delta)/s_i^n$ où

n décrit les entiers positifs. Soit η la section canonique de δ; alors $X_\eta = X_{Y,B}$ car chaque n_D est positif. Ainsi, X_η est affine; de plus, δ est engendré par un nombre fini de translatés de η par G. Il suffit donc de vérifier que toute $f \in \mathbf{C}[X_{Y,B}]$ s'écrit sous la forme $\eta^{-n}\sigma$ où n est un entier positif (dépendant de f), et où $\sigma \in \Gamma(X, n\delta)$. Mais

$$div(f) = \sum_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X} \nu_D(f) D$$

(car f est régulière sur $X_{Y,B}$). Par suite, le diviseur $div(f) + n\delta$ est effectif pour n assez grand, car chaque n_D est positif; alors $\eta^n f \in \Gamma(X, n\delta)$.

Réciproquement, supposons que δ est engendré par ses sections globales. Il existe alors $s \in \Gamma(X, \delta)$ telle que s ne s'annule pas sur Y. On peut trouver un tel s qui est vecteur propre de B. Autrement dit, il existe $f \in \mathbf{C}(X)^{(B)}$ tel que le diviseur $div(f) + \delta$ est effectif et que son support ne contient pas Y. Par suite, $div(f) + \delta$ est combinaison linéaire des $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X$, à coefficients non négatifs.

Si de plus δ est ample, alors le diviseur

$$n\delta - \sum_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X} D$$

est engendré par ses sections pour n assez grand. Il en résulte que $div(f) + \delta$ est combinaison linéaire des $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X$, à coefficients positifs.

Lemme. *Soit X une G-variété affine normale, contenant une unique orbite fermée Y. Alors la restriction $Pic(X) \to Pic(Y)$ est injective.*

Démonstration du lemme. Quitte à remplacer G par un revêtement fini, on peut supposer que l'algèbre $\mathbf{C}[G]$ est factorielle; alors tout fibré en droites sur X admet une G-linéarisation. Soit $\mathcal{L}$ un tel fibré, dont la restriction à Y est triviale. Soit $s \in \Gamma(Y, \mathcal{L}|_Y)$ une section qui ne s'annule pas; alors s est vecteur propre de G [KSS; p. 78]. Puisque la restriction $\Gamma(X, \mathcal{L}) \to \Gamma(Y, \mathcal{L}|_Y)$ est surjective et G-équivariante, on peut étendre s en une section $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{L})$, vecteur propre de G. L'ensemble des zéros de σ est stable par G et ne contient pas Y, donc cet ensemble est vide, et $\mathcal{L}$ est trivial.

Supposons de plus que l'espace homogène G/H est sobre, et notons $\mathbf{X}$ le plongement canonique de G/H (voir 4.4). Puisque $\mathbf{X}$ est simple avec $\mathcal{D}_{\mathbf{X}} = \emptyset$ et $\mathcal{C}_{\mathbf{X}} = \mathcal{V}$, on obtient aussitôt le

Corollaire. *Le groupe de Picard de $\mathbf{X}$ est engendré librement par les classes des diviseurs premiers stables par B et non par G. De plus, un diviseur de Cartier sur $\mathbf{X}$ est engendré par ses sections (resp. ample) si et seulement s'il est représenté par une combinaison à coefficients non négatifs (resp. positifs) de ces classes.*

Remarque. Soit $Cl(X)$ le groupe des classes de diviseurs d'une variété sphérique X, non nécessairement simple. Puisque Bx est lisse, on a $Cl(Bx) = Pic(Bx)$; mais ce groupe est trivial, par exemple d'après 2.3. Par suite, le groupe $Cl(X)$ est engendré par les classes des composantes irréductibles de $X \setminus Bx$, c'est-à-dire des $D \in \mathcal{D}$ ainsi que des diviseurs premiers stables par G. Ces derniers sont indexés par l'ensemble $\mathcal{V}_X$; pour $\nu \in \mathcal{V}_X$, on note X_ν le diviseur associé. On montre comme ci-dessus que l'application

$$\chi \in \mathcal{X}(G/H) \mapsto \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} \langle \nu, \chi \rangle X_\nu + \sum_{D \in \mathcal{D}} \langle \rho(\nu_D), \chi \rangle D$$

définit une suite exacte

$$\mathcal{X}(G/H) \to \mathbf{Z}(\mathcal{V}_X, \mathcal{D}) \to Cl(X) \to 0.$$

Supposons à nouveau que X est simple. Alors le groupe $Cl(X)$ coïncide avec $Pic(X)$ si et seulement si, pour tout $D \in \mathcal{D}_X \cup \mathcal{V}_X$, il existe $\chi \in \mathcal{X}(G/H)$ tel que

$$\langle \rho(\nu_{D'}), \chi \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } D' = D \\ 0 & \text{si } D' \in \mathcal{V}_X \cup \mathcal{D}_X \text{ et } D' \neq D. \end{cases}$$

Autrement dit, X est localement factorielle (c'est-à-dire: tout diviseur de Weil sur X est de Cartier) si et seulement si les $\rho(\nu)$ ($\nu \in \mathcal{V}_X \cup \mathcal{D}_X$) forment une partie d'une base du réseau $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}(G/H), \mathbf{Z})$. On obtient ainsi une condition nécessaire pour que X soit lisse.

Lorsque X est une variété toroïdale, cette condition signifie simplement que le cône $\mathcal{C}_X$ est engendré par une partie d'une base de $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}(G/H), \mathbf{Z})$; de plus, elle est équivalente à la lissité de X. En effet, ceci résulte de [O; 1.10] dans le cas des variétés toriques, et le cas général s'y ramène grâce à 2.4.

Mais il existe des variétés sphériques singulières et localement factorielles. En effet, soit P un sous-groupe parabolique maximal de G . Le groupe de Picard de G/P est engendré par la classe de l'unique diviseur premier et stable par B. Ce diviseur est ample; soient $\mathcal{L}$ le fibré en droite associé, supposé G-linéarisé, et X le cône affine sur G/P défini par $\mathcal{L}$. Alors X est une G-variété sphérique affine et factorielle; mais X est singulière si G/P n'est pas un espace projectif.

On trouvera dans [B3] un critère général de lissité pour les variétés sphériques, qui est difficile à appliquer; il serait intéressant d'avoir des caractérisations plus maniables des variétés sphériques lisses.

5.2. *Le groupe de Picard des variétés sphériques*

Soit (X, x) un plongement de l'espace homogène sphérique G/H. On a vu que tout diviseur de Weil sur X est linéairement équivalent à une combinaison à coefficients entiers

$$\delta = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} n_\nu X_\nu \; + \; \sum_{D \in \mathcal{D}} n_D D.$$

Le théorème 5.1 implique aussitôt le

Lemme. *Avec les notations précédentes, le diviseur δ est de Cartier si et seulement si, pour toute orbite Y de G dans X, il existe $\chi_{\delta,Y} \in \mathcal{X}$ telle que $\langle \nu, \chi_{\delta,Y} \rangle = n_\nu$ pour tout $\nu \in \mathcal{V}_{X,Y}$, et que $\langle \rho(\nu_D), \chi_{\delta,Y} \rangle = n_D$ pour tout $D \in \mathcal{D}_{X,Y}$.*

Considérons $\chi_{\delta,Y}$ comme une forme linéaire sur V, et notons $l_{\delta,Y}$ sa restriction au cône $\mathcal{C}_{X,Y}$ (engendré par $\mathcal{V}_{X,Y}$ et $\rho(\mathcal{D}_{X,Y})$). Observons que $l_{\delta,Y}$ est uniquement déterminée par δ et Y; mais $\chi_{\delta,Y}$ n'est déterminée qu'à addition près d'un élément de $\mathcal{C}_{X,Y}^{\perp}$.

Notons $PL(X)$ le groupe additif formé des familles (l_Y) indexées par les orbites Y de G dans X, qui vérifient les conditions suivantes:

- Chaque l_Y est la restriction à $\mathcal{C}_{X,Y}$ d'un élément de $\mathcal{X}$.
- $l_Z|_{\mathcal{C}_{X,Y}} = l_Y$ chaque fois que Z est contenue dans $\overline{Y}$.

D'après la classification des plongements, $PL(X)$ ne dépend que de l'éventail colorié $\mathbf{F}(X)$; on peut le voir comme le groupe des fonctions linéaires par morceaux sur $\mathbf{F}(X)$. Soit $Car^B(X)$ le groupe additif formé des diviseurs de Cartier sur X qui sont stables par B. À tout $\delta \in Car^B(X)$, on associe un élément $l_\delta = (l_{\delta,Y})$ de $PL(X)$; l'application

$$\begin{array}{ccc} Car^B(X) & \to & PL(X) \\ \delta & \mapsto & l_\delta \end{array}$$

définit une suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X) \to Car^B(X) \to PL(X) \to 0.$$

Notons $L(X)$ le sous-groupe de $PL(X)$ formé des familles $(\chi|_Y)$ où $\chi \in \mathcal{X}$; on peut voir $L(X)$ comme le groupe des fonctions linéaires sur $\mathbf{F}(X)$. Soit $Div^B(X)$ le groupe additif formé des diviseurs des vecteurs propres de B dans $\mathbf{C}(X)$. On a une suite exacte

$$\mathcal{C}_X^{\perp} \to Div^B(X) \to L(X) \to 0.$$

On peut maintenant énoncer la généralisation suivante du théorème 5.1.

Théorème. *(i) On a une suite exacte*

$$\mathcal{C}_X^{\perp} \to \mathbf{Z}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X) \to Pic(X) \to PL(X)/L(X) \to 0.$$

(ii) Le groupe abélien $Pic(X)$ est libre de rang fini.
(iii) Pour un diviseur stable par B et de Cartier $\delta = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} \langle \nu, l_\delta \rangle X_\nu + \sum_{D \in \mathcal{D}} n_D D$, les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) δ est engendré par ses sections globales.

(b) Pour toute orbite Y de G dans X, il existe $\chi_Y \in \mathcal{X}$ tel que $\chi_Y = l_\delta$ sur $\mathcal{C}_{X,Y}$, $\chi_Y \leq l_\delta$ sur $\mathcal{C}_X \setminus \mathcal{C}_{X,Y}$, et $\langle \rho(\nu_D), \chi_Y \rangle \leq n_D$ pour tout $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{X,Y}$.

Démonstration. (i) résulte aussitôt des deux suites exactes ci-dessus.

(ii) Le groupe abélien $PL(X)$ est libre de rang fini (car c'est un sous-groupe d'un produit de tels groupes), ainsi que $L(X)$ (car c'est un quotient de $\mathcal{X}$). De plus, si $l \in PL(X)$ et $nl \in L(X)$ pour un entier n non nul, alors $l \in L(X)$. Ainsi, le quotient $PL(X)/L(X)$ est libre de rang fini; de même pour $\mathbf{Z}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X)/\mathcal{C}_X^{\perp}$. On conclut grâce à (i).

(iii) Soit $\delta \in Car^B(X)$ engendré par ses sections globales; soit Y une orbite de G dans X. Comme dans la preuve du théorème 5.1, on peut trouver $f_Y \in \mathbf{C}(X)^{(B)}$ telle que $div(f_Y) + \delta$ est effectif et ne contient pas Y dans son support. En notant χ_Y l'opposé du poids de f_Y, on a donc: $\langle \rho(\nu), l_\delta \rangle \geq \langle \rho(\nu), \chi_Y \rangle$ pour tout $\nu \in \mathcal{D}_X \cup \mathcal{V}_X$, avec égalité si

$\nu \in \mathcal{D}_{X,Y} \cup \mathcal{V}_{X,Y}$, et aussi: $n_D \geq \langle \rho(\nu_D), \chi_Y \rangle$ pour tout $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X$. Autrement dit, la condition (b) est vérifiée. La réciproque s'obtient en inversant ces arguments.

Tout $l \in PL(X)$ est uniquement déterminé par les l_Z où Z décrit les orbites fermées de G dans X. Si de plus X est complète, alors chaque $\mathcal{C}_{X,Z}$ engendre V, donc le poids χ_Z est uniquement défini par l; on peut identifier χ_Z avec l_Z.

Définition. Une fonction $l \in PL(X)$ est appelée *convexe* si $l_Y \geq l_Z|_Y$ pour toute orbite Y et pour toute orbite fermée Z; autrement dit, $l \geq l_Z$ sur $\mathcal{C}_X$. Si de plus $l > l_Z$ en tout point de $\mathcal{C}_X \setminus \mathcal{C}_{X,Z}$, on dit que l est *strictement convexe*.

Corollaire 1. *Soient X une variété sphérique complète, et δ un diviseur de Cartier stable par B sur X. Alors δ est engendré par ses sections globales (resp. ample) si et seulement si: l_δ est convexe (resp. strictement convexe), et $\langle \rho(\nu_D), l_Z \rangle \leq n_D$ (resp. $< n_D$) pour tous Z et $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{X,Z}$.*

Démonstration. La caractérisation des diviseurs engendrés par leurs sections globales résulte aussitôt du théorème ci-dessus. Soit δ un tel diviseur, soit Z une orbite fermée de G dans X, et soit f_Z un vecteur propre de B dans $\mathbf{C}(X)$ de poids $-l_Z$. Alors le diviseur $div(f_Z) + \delta$ est effectif, stable par B, et son support ne contient pas Z.

Réciproquement, soit δ' un diviseur stable par B, linéairement équivalent à δ, et ne contenant pas Z dans son support. Alors on peut écrire $\delta' = div(f) + \delta$ où $f \in \mathbf{C}(X)^{(B)}$. De plus, le poids χ de f vérifie:

$$\langle \rho(\nu), \chi \rangle + \langle l_Z, \chi \rangle = 0$$

pour tout $\nu \in \mathcal{V}_{X,Z} \cup \mathcal{D}_{X,Z}$. Il en résulte que $\chi = -l_Z$ et que $\delta' = div(f_Z) + \delta$.

Si δ est ample, alors le système linéaire associé à un multiple positif de δ sépare les orbites fermées; la discussion ci-dessus entraîne donc que les l_Z sont deux à deux distincts. De plus, la restriction à $X_{Z,G}$ de $div(f_Z) + \delta$ est ample; ainsi, $n_D > \langle \rho(\nu_D), l_Z \rangle$ pour tout $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{X,Z}$, d'après le théorème 5.1. Par suite, l_δ est strictement convexe.

Réciproquement, si δ est strictement convexe, alors le support de $div(f_Z) + \delta$ a pour complémentaire $X_{Z,B}$. Soit η_Z la section correspondante de δ; alors on vérifie, comme dans la preuve du théorème 5.1, que $\mathbf{C}[X_{Z,B}]$ est réunion des sous-espaces $\Gamma(X, n\delta)/\eta_Z^n$. Puisque X est recouverte par un nombre fini de translatés par G des $X_{Z,B}$, on conclut que δ est ample.

Le corollaire 2 entraîne aussitôt que tout diviseur ample est engendré par ses sections globales. On en déduit aussi des critères assez simples pour qu'une variété sphérique X soit projective ou affine.

Corollaire 2. *(i) La variété sphérique complète X est projective si et seulement s'il existe une fonction linéaire par morceaux sur $\mathbf{F}(X)$, et strictement convexe.*
(ii) La variété sphérique X est affine si et seulement si: c'est un plongement simple, et il existe $\chi \in \mathcal{C}_X^\perp$ tel que $\chi \geq 0$ sur $\mathcal{V}$ et que $\chi < 0$ sur $\rho(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X)$.
(iii) L'espace homogène G/H est affine si et seulement si: $\rho(\mathcal{D})$ ne contient pas 0, et engendre un cône convexe qui ne rencontre pas $\mathcal{V} \setminus \{0\}$.

Démonstration. (i) est conséquence immédiate du corollaire 1. Pour (ii), on observe que tout plongement affine est simple [Kr; II.3.3]. De plus, le plongement simple (X, x), d'orbite fermée Y, est affine si et seulement s'il existe un plongement projectif $(\overline{X}, \overline{x})$ contenant (X, x), et un diviseur ample δ sur $\overline{X}$, de support $\overline{X} \setminus X$. Soit $l \in PL(X)$ la fonction associée; alors l est strictement convexe, positive sur $\mathcal{V}_{\overline{X}} \setminus \mathcal{V}_X$, nulle sur $\mathcal{V}_X \cup \mathcal{D}_X$, et négative sur $\rho(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X)$. En particulier, l est positive ou nulle sur $\mathcal{V}$, et elle est nulle sur $\mathcal{C}_X$. Notons V_X l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{C}_X$; notons σ_X le cône convexe engendré par $\rho(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X)$ et par V_X. Alors l est négative ou nulle sur σ_X, et négative sur $\sigma_X \setminus V_X$. Par suite, l'intersection de $\mathcal{V}$ et de σ_X est contenue dans V_X. Ceci implique l'existence de $\chi \in \mathcal{C}_X^{\perp}$ tel que $\chi \geq 0$ sur $\mathcal{V}$ et $\chi < 0$ sur $\rho(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X)$.

Réciproquement, soit χ vérifiant ces conditions. Soit $(\overline{X}, \overline{x})$ un plongement projectif contenant (X, x). D'après (i), on peut trouver une fonction strictement convexe l sur $\mathcal{C}_{\overline{X}}$. Quitte à ajouter à l une fonction linéaire, on peut supposer que l est identiquement nulle sur $\mathcal{C}_X$; alors $l > 0$ sur $\mathcal{V}_{\overline{X}} \setminus \mathcal{V}_X$. Pour tout entier n assez grand, la fonction $l + n\chi$ est strictement convexe, positive sur $\mathcal{V}_{\overline{X}} \setminus \mathcal{V}_X$, nulle sur $\mathcal{C}_X$ et négative sur $\rho(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X)$. Considérons alors le diviseur

$$\sum_{\nu \in \mathcal{V}_{\overline{X}} \setminus \mathcal{V}_X} \langle \nu, l + n\chi \rangle X_\nu + \sum_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X} n_D D$$

où les n_D sont des entiers assez grands. D'après le théorème ci-dessus, ce diviseur est de Cartier, effectif et ample; son support est $\overline{X} \setminus X$. Ainsi X est affine, car c'est le complémentaire d'un diviseur ample dans une variété projective.

(iii) résulte aussitôt de (ii): pour le plongement trivial, on a $\mathcal{C}_X = 0$ et $\mathcal{D}_X = \emptyset$.

Remarque. Il résulte du corollaire que les variétés sphériques de rang 1 sont quasi-projectives, ainsi que les variétés toroïdales de rang 2. Mais il existe des variétés complètes non projectives parmi les variétés toriques de dimension 3 [O; 2.3] ainsi que parmi les variétés sphériques de rang 2 [B1; 3.3].

5.3. *Le polytope convexe associé à un fibré en droites ample*

Soit (X, x) un plongement projectif de G/H et soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample et G-linéarisé sur X. Comme en 1.2, on associe à $\mathcal{L}$ l'ensemble $P(X, \mathcal{L})$ formé des χ/n où n est un entier positif, et où χ est un poids de $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^{(B)}$. On sait que $P(X, \mathcal{L})$ est un polytope convexe (Proposition 1.2.3). On va retrouver ce résultat, en décrivant $P(X, \mathcal{L})$ par des inéquations linéaires; puis on va expliciter les liens entre $P(X, \mathcal{L})$, l'éventail colorié de X, et la fonction linéaire par morceaux associée à une section globale de $\mathcal{L}$, vecteur propre de B. La donnée du diviseur d'une telle section n'est pas équivalente à la donnée du fibré $\mathcal{L}$ avec sa G-linéarisation; c'est pourquoi les résultats qui suivent ne se déduisent pas aussitôt de ceux de 5.2, même s'ils en sont très proches.

Soit $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{L})^{(B)}$. Le diviseur de σ s'écrit alors

$$div(\sigma) = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} n_\nu X_\nu + \sum_{D \in \mathcal{D}} n_D D$$

où les n_ν et les n_D sont des entiers non négatifs. Soit $\chi(\sigma)$ le poids de σ; c'est un poids dominant de B.

Proposition 1. *Avec les notations précédentes,* $P(X,\mathcal{L})$ *est l'ensemble des* $\chi(\sigma)+\xi$ *où* $\xi \in \mathcal{X}_{\mathbf{Q}}$ *vérifie:* $\langle \nu, \xi\rangle + n_\nu \geq 0$ *pour tout* $\nu \in \mathcal{V}_X$ *et* $\langle \rho(\nu_D), \xi\rangle + n_D \geq 0$ *pour tout* $D \in \mathcal{D}$.

Démonstration. Puisque $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ est formé des $\sigma^n f$ où $f \in \mathbf{C}(X)$ et le diviseur $ndiv(\sigma) + div(f)$ est effectif, on voit que

$$P(X,\mathcal{L}) = \bigcup_{n\geq 1} \{\chi(\sigma) + \frac{\chi(f)}{n} \mid f \in \mathbf{C}(G/H)^{(B)},\ ndiv(\sigma) + div(f) \geq 0\}.$$

L'énoncé en résulte aussitôt.

Étudions maintenant les faces de $P(X,\mathcal{L})$, et leurs relations avec les orbites de G dans X. Soit F une face de $P(X,\mathcal{L})$; on lui associe un ouvert X_F de X, affine et stable par B, de la façon suivante.

Soit $p \in F^0$ (l'intérieur relatif de F). Ecrivons $p = \chi/n$ où χ est le poids de $\eta \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^{(B)}$. Observons que l'ouvert X_η de X ne dépend que de p. En effet, si $p = \chi'/\eta'$ où χ' est le poids de $\eta' \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n'})$, alors $\eta^{n'}/\eta'^n$ est une fonction rationnelle sur X, vecteur propre de B de poids nul. Cette fonction est donc constante, d'où $X_{\eta'} = X_\eta$. On note cet ouvert X_p ; il est affine et stable par B. D'après la proposition ci-dessus, pour tout $D \in \mathcal{V}_X \cup \mathcal{D}$, l'application $p \mapsto \langle \rho(\nu_D), p - \chi(\sigma)\rangle + n_D$ est soit identiquement nulle, soit identiquement positive sur F^0. Il en résulte que l'ouvert X_p $(p \in F^0)$ ne dépend que de F; on le notera X_F.

Le cône convexe engendré par $-p + P(X,\mathcal{L})$ ne dépend aussi que de F; son cône dual est appelé le *cône dual de* $P(X,\mathcal{L})$ *en* F. D'après le corollaire 1.4.2, c'est aussi le cône dual de l'ensemble des vecteurs propres de B dans $\mathbf{C}[X_F]$.

Pour toute orbite Y de G dans X, l'adhérence $\overline{Y}$ est une G-variété sphérique, et le polytope $P(\overline{Y},\mathcal{L})$ est contenu dans $P(X,\mathcal{L})$ d'après 2.3. En fait, on a un résultat bien plus précis:

Proposition 2. *Soient* X *une* G*-variété sphérique projective,* $\mathcal{L}$ *un fibré en droites ample et* G*-linéarisé sur* X*, et* Y *une orbite de* G *dans* X*.*
(i) Pour tout $p \in P(\overline{Y},\mathcal{L})^0$*, on a* $X_p = X_{Y,B}$*.*
(ii) Le polytope $P(\overline{Y},\mathcal{L})$ *est une face de* $P(X,\mathcal{L})$*, et le cône dual en cette face est* $\mathcal{C}_{X,Y}$*. De plus,* $\mathcal{D}_{X,Y}$ *est l'ensemble des* $D \in \mathcal{D}$ *tels que* $\langle \rho(\nu_D), p - \chi(\sigma)\rangle + n_D = 0$ *pour tout* $p \in P(\overline{Y},\mathcal{L})$*.*
(iii) L'application $Y \mapsto P(\overline{Y},\mathcal{L})$ *est une bijection de l'ensemble des orbites de* G *dans* X*, sur l'ensemble des faces de* $P(X,\mathcal{L})$ *dont l'intérieur relatif du cône dual rencontre* $\mathcal{V}$*. Ainsi, l'éventail colorié de* X *est formé des cônes duaux de ces faces, leurs couleurs étant déterminées grâce à (ii).*

Démonstration. (i) Soient P, L et S comme au corollaire 1.4.2. D'après ce corollaire, et puisque $p \in P(\overline{Y},\mathcal{L})^0$, le groupe $[L,L]$ opère trivialement dans $S \cap Y$, et Ly est fermée dans $S \cap Y$ pour tout y dans un ouvert non vide de $S \cap Y$. Puisque la L-variété $S \cap Y$ est sphérique, il en résulte que $S \cap Y$ est une orbite de L, fixée par $[L,L]$. Par suite,

$$X_p \cap Y = R_u(P)(S \cap Y)$$

est l'orbite ouverte de B dans Y. Puisque X_p est ouvert dans X et stable par B, il contient donc $X_{Y,B}$. Alors $X_{Y,G} \setminus X_p$ est le support d'un diviseur ample de $X_{Y,G}$, et est contenu dans $X_{Y,G} \setminus X_{Y,B}$. D'après le théorème 5.1, on a $X_{Y,G} \setminus X_{Y,B} = X_{Y,G} \setminus X_p$, autrement dit:

$$X_p \cap X_{Y,G} = X_{Y,B}.$$

En particulier, $X_{Y,B}$ est stable par P, donc $S \setminus X_{Y,B}$ est fermé dans S, stable par L, et ne rencontre pas $S \cap Y$. Mais $S \cap Y$ est l'unique orbite fermée de L dans la variété sphérique affine S; donc $S \setminus X_{Y,B}$ est vide, et $X_p = R_u(P)S = X_{Y,B}$.

(ii) Soit $\nu \in \mathcal{V}$ telle que le centre de ν dans X est $\overline{Y}$. Choisissons pour $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ un vecteur propre de B, non identiquement nul sur Y. Soit η un vecteur propre de B dans $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$; alors η/σ^n est une fonction rationnelle sur X définie sur Y, donc $\nu(\eta/\sigma^n) \geq 0$ avec égalité si et seulement si η ne s'annule pas identiquement sur Y. Autrement dit, on a $\langle \nu, q - \chi(\sigma) \rangle \geq 0$ pour tout $q \in P(X, \mathcal{L})$, avec égalité si et seulement si $q \in P(\overline{Y}, \mathcal{L})$. Ainsi, $P(\overline{Y}, \mathcal{L})$ est une face de $P(X, \mathcal{L})$.

D'après le corollaire 1.4.2, le cône convexe engendré par $-p + P(X, \mathcal{L})$ s'identifie à $\mathcal{C}(S)$. Ce dernier est le cône dual de $\mathcal{C}_{X,Y}$ d'après la remarque à la fin de 2.3.

Soit $D \in \mathcal{D}$. Alors $D \in \mathcal{D}_{X,Y}$ si et seulement si D rencontre $X_{Y,B}$, c'est-à-dire: D rencontre X_p pour un $p \in P(\overline{Y}, \mathcal{L})^0$. Soient n et $\eta \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ tels que np est le poids de η; alors $X \setminus X_p$ est le support du diviseur $div(\eta) = div(\eta/\sigma^n) + div(\sigma^n)$. Par suite, D rencontre X_p si et seulement si $\langle \rho(\nu_D), p - \chi(\sigma) \rangle + n_D = 0$.

(iii) Soit F une face de $P(X, \mathcal{L})$. Si $F = P(\overline{Y}, \mathcal{L})$ pour une orbite Y de G dans X, alors Y est uniquement déterminée d'après (i). De plus, l'intérieur relatif du cône dual de F rencontre $\mathcal{V}$ d'après (ii) et 3.3. Réciproquement, soit $\nu \in \mathcal{V}$ dans l'intérieur relatif du cône dual de F. Cela signifie que $\langle \nu, q - p \rangle \geq 0$ pour tous $p \in F^0$ et $q \in P(X, \mathcal{L})$, avec égalité si et seulement si $q \in F$. Soit Y l'orbite de G dans X telle que le centre de ν est $\overline{Y}$. Alors l'argument de la preuve de (ii) montre que $F = P(\overline{Y}, \mathcal{L})$.

Le diviseur $div(\sigma)$ est effectif, de Cartier et stable par B; soit l_σ la fonction associée comme en 5.2. On va montrer que cette fonction est uniquement déterminée par le polytope $P(X, \mathcal{L})$.

Proposition 3. *Pour toute orbite fermée Z de G dans X, l'ensemble $P(Z, \mathcal{L})$ est réduit au point $\chi(\sigma) - l_{\sigma,Z}$. De plus, on a pour tout $\nu \in \mathcal{C}_X$:*

$$\langle \nu, l_\sigma \rangle = \max_{p \in P(X,\mathcal{L})} \langle \nu, \chi(\sigma) - p \rangle = \max_Z \langle \nu, l_{\sigma,Z} \rangle$$

(maximum sur toutes les orbites fermées Z).

Démonstration. Soit f_Z un vecteur propre de B dans $\mathbf{C}(X)$ de poids $-l_{\sigma,Z}$. Alors σf_Z est une section globale de $\mathcal{L}$, vecteur propre de B de poids $\chi(\sigma) - l_{\sigma,Z}$, et dont le support ne contient pas Z. Par suite, $\chi(\sigma) - l_{\sigma,Z} \in P(Z, \mathcal{L})$. Mais ce dernier est formé d'un seul point, ce qui démontre la première assertion.

Soit $p \in P(X, \mathcal{L})$. Soit $\eta \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ un vecteur propre de B de poids χ, tel que $p = \chi/n$. Puisque le diviseur

$$div(\eta) = n div(\sigma) + div(\eta/\sigma^n)$$

est effectif, on a $\rho(\nu_D), nl_\sigma + \chi - n\chi(\sigma)\rangle \geq 0$ pour tout $D \in \mathcal{V}_X \cup \mathcal{D}$. Il en résulte que

$$\langle \nu, l_\sigma \rangle \geq \langle \nu, \chi(\sigma) - p \rangle$$

pour tous $\nu \in \mathcal{C}_X$ et $p \in P(X, \mathcal{L})$. D'autre part, puisque l_σ est strictement convexe sur $\mathcal{C}_X$, on a

$$\langle \nu, l_\sigma \rangle = \max_Z \langle \nu, l_{\sigma,Z} \rangle = \max_Z \langle \nu, \chi(\sigma) - p_Z \rangle$$

où $p_Z = \chi(\sigma) - l_{\sigma,Z}$. Puisque $p_Z \in P(X, \mathcal{L})$, la deuxième assertion en résulte.

Exemples. 1) Lorsque G est un tore, on retrouve le dictionnaire entre fibrés en droites amples sur les variétés toriques et polytopes convexes entiers [O; Chapitre 2], [Fu].

2) Reprenons l'exemple 3 en 1.2, où $G = \mathrm{GL}_n$, X est l'espace projectif des formes quadratiques en n variables, et $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$. Rappelons que $P(X, \mathcal{L})$ est le simplexe ayant pour sommets les $2\pi_j/j$ $(1 \leq j \leq n)$. Les adhérences des orbites de G dans X sont les images des formes quadratiques de rang au plus k, pour $1 \leq k \leq n$; les faces correspondantes ont pour sommets les $2\pi_j/j$ où $1 \leq j \leq k$. En particulier, chaque orbite contribue à un sommet de $P(X, \mathcal{L})$.

3) Soit (X, x) un plongement toroïdal de l'espace homogène $(G \times G)/\mathrm{diag}(G)$. D'après 4.1, l'éventail associé est une subdivision de la chambre de Weyl négative; d'après 3.1, les $\rho(\nu_D)$ $(D \in \mathcal{D})$ s'identifient aux coracines simples. Avec les notations ci-dessus, les inéquations

$$\langle \rho(\nu_D), p - \chi(\sigma) \rangle + n_D \geq 0$$

signifient donc que le poids rationnel p est dominant, tandis que les inéquations

$$\langle \nu, p - \chi(\sigma) \rangle + n_\nu \geq 0$$

signifient que p appartient à tous les cônes $\chi(\sigma) - l_{\sigma,Z} + \mathcal{V}_{X,Z}^\vee$ où Z décrit les orbites fermées de G dans X. En posant $p_Z := \chi(\sigma) - l_{\sigma,Z}$, on en déduit que $P(X, \mathcal{L})$ est l'intersection de la chambre de Weyl positive et de l'enveloppe convexe des $w(p_Z)$ où w décrit le groupe de Weyl, et Z les orbites fermées.

Ainsi, les p_Z sont les sommets de $P(X, \mathcal{L})$ qui appartiennent à l'intérieur de la chambre de Weyl positive. De plus, p_Z est l'unique point de $P(Z, \mathcal{L})$, et c'est l'opposé du poids de $\mathcal{L}$ au point fixe de B (voir l'exemple 2 en 1.2). En particulier, p_Z est un poids dominant régulier entier, ce qui confirme le corollaire 1.4.2. Plus généralement, les faces associées aux adhérences des orbites sont celles qui rencontrent l'intérieur de la chambre de Weyl positive.

Il en résulte que $P(X, \mathcal{L})$ a en général des sommets non entiers, sur les faces propres de la chambre de Weyl positive. Considérons par exemple $G = \mathrm{PSL}_3$. Soit X le plongement canonique de $(G \times G)/\mathrm{diag}(G)$; soient α, β les racines simples, et D_α, D_β les deux éléments de $\mathcal{D}$ comme en 3.1. Soit $\mathcal{L}$ le fibré en droites sur X associé au diviseur de Cartier $D_\alpha + D_\beta$; soit σ la section canonique de $\mathcal{L}$. Alors le fibré $\mathcal{L}$ admet une unique G-linéarisation, le poids de σ est $\alpha + \beta =: \rho$, et $P(X, \mathcal{L})$ est l'intersection de la chambre de Weyl positive avec l'enveloppe convexe de $W\rho$. En particulier, les sommets de $P(X, \mathcal{L})$ sont

$$\rho,\ 0,\ \frac{1}{2}\alpha + \beta,\ \alpha + \frac{1}{2}\beta.$$

Ces deux derniers ne sont pas entiers, car $\mathcal{X}$ est le réseau des racines.

5.4. *Les faces du polytope moment*

Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample et G-linéarisé sur une variété sphérique projective X. Si X' est une sous-variété stricte de X, fermée et stable par G, alors $P(X', \mathcal{L})$ est une face de $P(X, \mathcal{L})$; par suite, toute face de $P(X', \mathcal{L})$ est une face de $P(X, \mathcal{L})$. Les faces de $P(X, \mathcal{L})$ qui ne peuvent s'obtenir ainsi seront appelées *nouvelles*.

Dans l'exemple 3 ci-dessus, les nouvelles faces sont celles qui contiennent le sommet $2\pi_n/n$; ce dernier est l'unique nouveau sommet.

On va décrire les nouvelles faces en termes de certains ensembles de couleurs; pour cela, on aura besoin de quelques notations. Pour toute face F de $P(X, \mathcal{L})$, soit X_F l'ouvert de X défini en 5.3; on note $\mathcal{D}_F$ l'ensemble des $D \in \mathcal{D}$ tels que D rencontre X_F.

Un sous-ensemble $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ est appelé *admissible* si $\rho(\mathcal{D}')$ ne contient pas 0, et engendre un cône convexe saillant, qui ne rencontre pas $\mathcal{V} \setminus \{0\}$.

Théorème. *(i) Pour toute nouvelle face F de $P(X, \mathcal{L})$, l'ensemble $\mathcal{D}_F$ est admissible et détermine uniquement F. Plus précisément, F est l'ensemble des $p \in P(X, \mathcal{L})$ tels que*

$$\langle \rho(\nu_D), p - \chi(\sigma) \rangle + n_D = 0 \qquad (D \in \mathcal{D}_F)$$

où on choisit $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{L})^{(B)}$, et on note n_D l'ordre d'annulation de σ le long de D.
(ii) Si de plus X est toroïdale, alors pour tout sous-ensemble admissible $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$, il existe un fibré en droites ample et G-linéarisé $\mathcal{L}'$ sur X, et une nouvelle face F de $P(X, \mathcal{L}')$, telles que $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}'$.

Démonstration. (i) Soit $p \in F^0$. Soient n un entier positif, et $\eta \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^{(B)}$, tels que le poids de η est np. Le diviseur $div(\eta)$ est ample, effectif et stable par B; son support est la réunion des X_ν ($\nu \in \mathcal{V}_X$) et des $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_F$. D'après la proposition 2.4.2, on peut trouver un G-morphisme birationnel propre $\pi : \tilde{X} \to X$, où $\tilde{X}$ est toroïdale. Soit δ l'image réciproque de $div(\eta)$ sur $\tilde{X}$; c'est un diviseur de Cartier stable par B, engendré par ses sections globales, et de support la réunion des $\tilde{X}_\nu$ ($\nu \in \mathcal{V}_{\tilde{X}}$) et des $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_F$. D'après le corollaire 5.2.1, la fonction associée l_δ est convexe, positive sur $\mathcal{V}_{\tilde{X}}$, et négative ou nulle sur $\rho(\mathcal{D}_F)$. Soit C le cône convexe engendré par $\rho(\mathcal{D}_F)$; alors l_δ est négative ou nulle sur C. Puisque $\mathcal{V}$ est le cône convexe engendré par $\mathcal{V}_{\tilde{X}}$, il en résulte que $C \cap \mathcal{V} = \{0\}$.

L'ouvert X_p est affine, stable par B, et formé de l'orbite ouverte de B dans X ainsi que d'ouverts non vides des diviseurs $D \in \mathcal{D}_F$. Par suite, on peut trouver $f \in \mathbf{C}[X_p]^{(B)}$ qui s'annule partout sur ces diviseurs. Soit χ le poids de f; alors $\langle \rho(\nu_D), \chi \rangle > 0$ pour tout $D \in \mathcal{D}_F$, donc $\rho(\mathcal{D}_F)$ ne contient pas 0 et C est saillant.

Ainsi, $\mathcal{D}_F$ est admissible; la deuxième assertion résulte de la proposition 1.

(ii) Puisque $\mathcal{D}'$ est admissible, il existe $\chi \in \mathcal{X}$ tel que $\chi > 0$ sur $\mathcal{V} \setminus \{0\}$ et que $\chi < 0$ sur $\rho(\mathcal{D}')$. D'autre part, puisque X est projective, elle admet un diviseur de Cartier stable par B, ample, effectif, et dont le support est le complémentaire de l'orbite ouverte de B. Soit $l \in PL(X)$ la fonction associée; alors l est strictement convexe, et $l > 0$ sur $\mathcal{V} \setminus \{0\}$ car X est toroïdale. Pour tout entier n assez grand, la fonction $l + n\chi$ est strictement convexe, positive sur $\mathcal{V} \setminus \{0\}$ et négative sur $\rho(\mathcal{D}')$. Pour chaque $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$, choisissons un entier

$n_D > 0$. Posons

$$\delta = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} \langle \nu, n\chi + l \rangle X_\nu + \sum_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'} n_D D;$$

c'est un diviseur effectif, stable par B, et de Cartier car X est toroïdale. D'après le corollaire 5.2.1, on peut choisir les n_D assez grands pour que δ soit ample. Quitte à remplacer δ par un multiple positif, on peut aussi supposer que le fibré en droites associé $\mathcal{L}'$ est G-linéarisé. Soit σ la section canonique de $\mathcal{L}'$; alors $P(X, \mathcal{L}')$ est défini par les inéquations

$$\langle \rho(\nu_D), p - \chi(\sigma) \rangle + n_D \geq 0 \qquad (D \in \mathcal{V}_x \cup \mathcal{D})$$

où $n_D = 0$ lorsque $D \in \mathcal{D}'$. Soit F la face de $P(X, \mathcal{L}')$ définie par les équations

$$\langle \rho(\nu_D), p - \chi(\sigma) \rangle = 0 \qquad (D \in \mathcal{D}').$$

Alors $\chi(\sigma) \in F^0$, d'où $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}'$.

Remarques. 1) D'après (i), la codimension de F est la dimension du cône convexe engendré par $\rho(\mathcal{D}_F)$. En particulier, les nouveaux sommets correspondent aux ensembles admissibles $\mathcal{D}'$ tels que l'espace vectoriel V est engendré par $\rho(\mathcal{D}')$. Ceci entraîne que toute fonction régulière inversible sur G/H est constante, c'est-à-dire: $G = [G, G]H$. Cette condition est donc nécessaire pour l'existence de nouveaux sommets.

2) D'après le corollaire 5.2.2, l'ensemble $\mathcal{D}$ est admissible si et seulement si: G/H est affine, et $G = [G, G]H$. Si X est un plongement toroïdal projectif de G/H, il existe alors un fibré en droites $\mathcal{L}$ ample et G-linéarisé sur X tel que 0 soit un nouveau sommet de $P(X, \mathcal{L})$, avec G/H comme ouvert affine associé; le cône dual de $P(X, \mathcal{L})$ en 0 est engendré par $\rho(\mathcal{D})$.

3) Soit F une face de $P(X, \mathcal{L})$ où X est sphérique, projective et lisse. Si $F = P(X', \mathcal{L})$ pour une sous-variété X' de X, fermée et stable par G, alors le cône dual de F est engendré par une base du réseau dual de $\mathcal{X}(X)$. Ceci résulte en effet de la proposition 5.3.2 et de la remarque en 5.1. En particulier, tout sommet de $P(X, \mathcal{L})$ provenant d'une orbite fermée de G dans X est contenu dans exactement r arêtes, où r est le rang de G/H.

Ce résultat ne s'étend pas aux sommets arbitraires de $P(X, \mathcal{L})$. Considérons par exemple $G = \mathrm{SL}_{2n+1}$ où n est un entier positif. Notons $(e_1, \ldots, e_{2n+1})$ la base canonique de $\mathbf{C}^{2n+1}$; soit H le sous-groupe de G qui stabilise la droite $\mathbf{C}e_{2n+1}$ de $\mathbf{C}^{2n+1}$, ainsi que la droite $\mathbf{C}(e_1 \wedge e_2 + \cdots + e_{2n-1} \wedge e_{2n})$ de $\wedge^2 \mathbf{C}^{2n+1}$. Soit χ le caractère de H associé à cette dernière droite propre. On vérifie que le groupe H est réductif, connexe, égal à son normalisateur dans G, et que le groupe des caractères de H est engendré par χ. De plus, G/H possède exactement $2n$ couleurs, et leurs équations dans G sont des vecteurs propres de $B \times H$ de poids

$$(\pi_1, -n\chi),\ (\pi_2, \chi), \ldots, (\pi_{2i}, i\chi),\ (\pi_{2i+1}, (-n+i)\chi), \ldots, (\pi_{2n}, n\chi)$$

où $\pi_1, \ldots, \pi_{2n}$ sont les poids fondamentaux de G. Il en résulte que

$$\mathcal{X}(G/H) = \{(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbf{Z}^{2n} \mid \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) x_{2i+1} = \sum_{j=1}^{n} j x_{2j}\}$$

et que le cône dual de $\rho(\mathcal{D})$ est l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbf{Q}^{2n}_{\geq 0}$ qui vérifient l'équation ci-dessus. Ce cône possède $2n$ facettes et n^2 arêtes, alors que le rang de G/H est $2n-1$.

Références.

[A] D. Akhiezer: *Actions with a finite number of orbits*, Funct. Anal. Appl. **19** (1985), 1-4.

[Bo] N. Bourbaki: *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 7 et 8*, C. C. L. S., Paris 1975.

[B1] M. Brion: *Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques*, Duke Math. J. **58** (1989), 397-424.

[B2] M. Brion: *Vers une généralisation des espaces symétriques*, J. Algebra **134** (1990), 115-143.

[B3] M. Brion: *Sur la géométrie des variétés sphériques*, Comment. Math. Helv. **66** (1991), 237-262.

[BI] M. Brion et S. P. Inamdar: *Frobenius splitting of spherical varieties*, pp. 207-218 dans: Algebraic groups and their generalizations, Proc. Symp. Pure Math. **56**, AMS, Providence 1994.

[BLV] M. Brion, D. Luna et Th. Vust: *Espaces homogènes sphériques*, Invent. math. **84** (1986), 617-632.

[BL] M. Brion et D. Luna: *Sur la structure locale des variétés sphériques*, Bull. Soc. math. France **115** (1987), 211-226.

[DP] C. De Concini et C. Procesi: *Complete Symmetric Varieties*, pp. 1-44 dans: Invariant Theory, Lecture Note in Math. **996**, Springer-Verlag 1983.

[Fo] A. Foschi: *Wonderful varieties and moment polytopes*, thèse, Grenoble 1998.

[Fu] W. Fulton: *Introduction to Toric Varieties*, Annals of Mathematical Studies **131**, Princeton University Press 1993.

[Hu] J. E. Humphreys: *Linear Algebraic Groups*, Springer, New York 1975.

[Kn1] F. Knop: *The Luna-Vust Theory of Spherical Embeddings*, pp. 225-249 dans: Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups, Manoj-Prakashan 1991.

[Kn2] F. Knop: *The Asymptotic Behavior of Invariant Collective Motion*, Invent. math. **116** (1994), 309-328.

[Kn3] F. Knop: *On the Set of Orbits for a Borel Subgroup*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 285-309.

[Kn4] F. Knop: *Automorphisms, Root Systems, and Compactifications of Homogeneous Varieties*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 153-174.

[Kr] H. Kraft: *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Viehweg, Brauschweig-Wiesbaden 1985.

[KSS] H. Kraft, P. Slodowy et T. Springer (éditeurs), *Algebraic Transformation Groups and Invariant Theory*, DMV Seminar Band 13, Birkhäuser, Basel 1989.

[L1] D. Luna: *Grosses cellules pour les variétés sphériques*, pp. 267-280 dans: Algebraic Groups and Lie Groups, Cambridge University Press 1997.

[L2] D. Luna: *Toute variété magnifique est sphérique*, Transformation Groups **1** (1996), 249-258.

[LV] D. Luna et Th. Vust: *Plongements d'espaces homogènes*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), 186-245.

[MFK] D. Mumford, J. Fogarty et F. Kirwan: *Geometric Invariant Theory*, third edition, Springer-Verlag 1994.

[O] T. Oda: *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Springer-Verlag 1988.

[P] D. Panyushev: *Complexity and rank of homogeneous spaces*, Geometriae Dedicata **34** (1990), 249-269.

[P1] F. Pauer: *Normale Einbettungen von G/U*, Math. Annalen **257** (1981), 371-396.

[P2] F. Pauer: *Glatte Einbettungen von G/U*, Math. Annalen **262** (1983), 421-429.

[S] R. Sjamaar: *Convexity properties of the moment mapping re-examined*, Adv. Math. **138** (1998), 46-91.

[Vi] E. B. Vinberg: *Complexity of action of reductive groups*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 1-11.

[Vu1] Th. Vust: *Opérations de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes*, Bull. Soc. math. France **102** (1974), 317-333.

[Vu2] Th. Vust: *Plongements d'espaces symétriques algébriques: une classification*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Ser. IV **17** (1990), 165-194.

[Wa] B. Wassermann: *Wonderful varieties of rank two*, Transformation Groups **1** (1996), 375-403.

[Wo] C. Woodward: *Spherical varieties and existence of invariant Kähler structures*, Duke Math. J. **93** (1998), 345-377.