La conjecture de Horn : quelques développements récents

Michel Brion

1 La conjecture de Horn

Considérons deux matrices hermitiennes A et B de même taille n. Que peut-on dire du spectre de leur somme $A+B$ en termes des spectres de A et B ? Ce problème remonte au début du 20ème siècle, et un premier résultat est dû à Weyl en 1912 (voir [W]) : en notant $\lambda(X) = (\lambda_1(X) \geq \cdots \geq \lambda_n(X))$ le spectre d'une matrice hermitienne X de taille n, on a les inégalités

$$\lambda_{i+j-1}(A+B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_j(B) \tag{1}$$

pour tous les couples (i, j) d'entiers tels que $1 \leq i, j \leq n$ et $i + j - 1 \leq n$.

Voici une démonstration de ces *inégalités de Weyl*. Observons que

$$\lambda_n(X) \leq (v|Xv) \leq \lambda_1(X), \tag{2}$$

où $(\ |\ )$ désigne le produit scalaire hermitien standard sur $\mathbb{C}^n$, et $v \in \mathbb{C}^n$ vérifie $(v|v) = 1$. Choisissons une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$, où chaque e_i est vecteur propre de A de valeur propre $\lambda_i(A)$; introduisons de même des bases orthonormées $(f_1, \ldots, f_n)$ de vecteurs propres de B, et $(g_1, \ldots, g_n)$ de vecteurs propres de $A + B$. Considérons les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$

$$E := \mathrm{Vect}(e_i, \ldots, e_n), \quad F := \mathrm{Vect}(f_j, \ldots, f_n), \quad G := \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_{i+j-1}).$$

Alors $\dim(E) + \dim(F) + \dim(G) = (n-i+1) + (n-j+1) + (i+j-1) = 2n+1$; on en déduit que l'intersection $E \cap F \cap G$ est non nulle. Soit donc $v \in E \cap F \cap G$ tel que $(v|v) = 1$. En appliquant successivement (2) à $X = (A+B)|_G$, $A|_E$ et $B|_F$, on obtient

$$\lambda_{i+j-1}(A+B) \leq (v|(A+B)v) = (v|Av) + (v|Bv) \leq \lambda_i(A) + \lambda_j(B),$$

comme annoncé.

D'autres inégalités ont été obtenus par plusieurs mathématiciens dans les années 1950 ; elles sont toutes de la forme

$$\sum_{i \in I} \lambda_i(A) + \sum_{j \in J} \lambda_j(B) \leq \sum_{k \in K} \lambda_k(A+B) \tag{3}$$

pour des sous-ensembles I, J, K de $\{1,\dots,n\}$ ayant le même nombre d'éléments, noté r, et vérifiant

$$\sum_{i\in I} i + \sum_{j\in J} j = \sum_{k\in K} k + \frac{r(r+1)}{2}. \tag{4}$$

Le sens des inégalités (3) est opposé à celui des inégalités de Weyl, mais celles-ci peuvent se réécrire sous la forme (3) grâce à l'égalité des traces,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(B) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A+B). \tag{5}$$

En 1962, Horn a formulé une remarquable conjecture ; elle affirme que les triplets de spectres de matrices hermitiennes A, B, $A+B$ de taille n sont les solutions d'un nombre fini d'inéquations linéaires homogènes, construites de façon récursive (voir [H2]). Pour énoncer cette conjecture, introduisons quelques notations. Posons

$$\mathrm{Horn}_n := \{(\lambda(A), \lambda(B), \lambda(A+B)) \mid A, B \text{ hermitiennes de taille } n\}.$$

Notons $\mathcal{P}(r,n)$ l'ensemble des parties à r éléments de $\{1,\dots,n\}$, où $r = 1,\dots,n-1$; on identifie chaque $I \in \mathcal{P}(r,n)$ à une suite strictement croissante $(i_1 < \cdots < i_r)$ de $\{1,\dots,n\}$. Désignons par U_r^n l'ensemble formé des triplets (I,J,K) de $\mathcal{P}(r,n)$ qui vérifient l'équation (4) ; enfin, posons

$$T_r^n := \{(I,J,K) \in U_r^n \mid \sum_{f\in F} i_f + \sum_{g\in G} j_g \le \sum_{h\in H} k_h + \frac{s(s+1)}{2} \ \forall s < r,\ \forall (F,G,H) \in T_s^r\}.$$

Conjecture 1.1. *L'ensemble* Horn_n *est formé des solutions communes de l'équation (5) et des inéquations* (3)*, où* $(I,J,K) \in T_r^n$ *pour* $r = 1,\dots,n-1$*.*

Lorsque $r = 1$, on obtient

$$T_1^n = U_1^n = \{(i,j,k) \mid 1 \le i,j,k \le n \text{ et } i+j = k+1\} \ ;$$

on retrouve ainsi les inégalités de Weyl. Celles-ci suffisent pour $n = 2$; en fait, Horn_2 est formé des triplets de spectres $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2)$ tels que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 = \nu_1 + \nu_2, \quad \lambda_2 + \mu_2 \le \nu_2, \quad \lambda_1 + \mu_2 \le \nu_1, \quad \lambda_2 + \mu_1 \le \nu_1$$

(ce qu'on peut vérifier directement). De nouvelles inégalités apparaissent lorsque $n = 3$, par exemple

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2 + \mu_3 \le \nu_2 + \nu_3$$

puisque $\{(1,2),(2,3),(2,3)\} \in T_2^3$.

La conjecture 1.1 affirme en particulier que Horn_n est un *cône convexe polyédral*, c'est-à-dire l'ensemble des solutions d'un système fini d'inéquations linéaires homogènes dans un espace vectoriel réel de dimension finie (ici $3n-1$ compte tenu de l'équation (5)). Lorsqu'on fixe les spectres λ, μ de A, B, l'ensemble obtenu, qu'on notera $\mathrm{Horn}_n(\lambda,\mu)$, est compact comme on le verra dans la seconde partie. Mais toute partie compacte d'un $\mathbb{R}^N$ définie par un nombre fini d'inéquations linéaires est un *polytope convexe*, c'est-à-dire l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. On est ainsi amené à une version qualitative (affaiblie) de la conjecture 1.1 :

Conjecture 1.2. *L'ensemble* $\mathrm{Horn}_n(\lambda, \mu)$ *est un polytope convexe.*

En fait, ces deux conjectures sont maintenant des théorèmes : la seconde se déduit d'un résultat général de convexité pour les projections des orbites coadjointes des groupes de Lie compacts connexes, obtenu par Heckman en 1982 (voir [He]). Quant à la première, elle a été résolue à la fin des années 1990 par la combinaison de travaux de Klyachko (voir [Kl]) et de Knutson et Tao (voir [KT]) ; elle est à l'origine de multiples développements et généralisations.

On va présenter le résultat de Heckman dans la deuxième partie, puis son interprétation en termes de théorie des représentations dans la troisième partie. La quatrième partie est consacrée aux liens entre la conjecture de Horn et le calcul de Schubert (qui permet en gros de résoudre des problèmes de dénombrement portant sur les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$) ; ces liens s'avèrent assez inattendus, et n'ont été mis en lumière que dans les années 1990. Dans la cinquième partie, on donne les grandes lignes d'un résultat dû à Belkale-Kumar et Ressayre, qui forme une vaste généralisation de la conjecture.

Dans cette brève présentation d'un sujet foisonnant, où le problème initial est de nature très élémentaire mais ses solutions sont loin de l'être, on s'est efforcé de garder des prérequis minimes : quelques notions de géométrie différentielle et de groupes de Lie, pour lesquelles une référence récente et accessible est [CG]. Il a fallu ainsi faire l'impasse sur les méthodes de théorie géométrique des invariants, qui sont pourtant au coeur de développements importants. Ces méthodes figurent en bonne place dans plusieurs textes d'exposition plus avancés, tant récents ([Ku], [B]) que moins récents ([F], [Kn], [M2]).

2 Projection d'orbites coadjointes

Dans cette partie, on va reformuler la définition de l'ensemble $\mathrm{Horn}_n(\lambda, \mu)$ en termes de la géométrie du groupe unitaire, puis énoncer le théorème de Heckman qui entraîne la conjecture 1.2 grâce à cette reformulation. On esquissera ensuite une preuve de ce théorème par des méthodes de géométrie différentielle.

Notons H_n l'espace vectoriel réel formé des matrices hermitiennes de taille n. Étant données $X, Y \in \mathrm{H}_n$ de même spectre, il existe une matrice unitaire U de taille n telle que $Y = UXU^{-1}$. Autrement dit, l'ensemble des matrices hermitiennes de spectre donné, $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)$, forme une orbite du groupe unitaire U_n opérant par conjugaison dans H_n ; on note cette orbite $\mathcal{O}_\lambda$. Le groupe U_n est compact, donc $\mathcal{O}_\lambda$ l'est aussi. Notons $\mathrm{D}_n \subset \mathrm{H}_n$ le sous-espace vectoriel formé des matrices diagonales (à coefficients réels), et $\mathrm{C}_n \subset \mathrm{D}_n$ le sous-ensemble formé des matrices de la forme $\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ où $x_1 \geq \cdots \geq x_n$. Alors C_n est un cône convexe polyédral, et on a par définition

$$\mathrm{Horn}_n(\lambda, \mu) = (\mathcal{O}_\lambda + \mathcal{O}_\mu) \cap \mathrm{C}_n \tag{6}$$

où $\mathcal{O}_\lambda + \mathcal{O}_\mu$ désigne bien sûr l'image de $\mathcal{O}_\lambda \times \mathcal{O}_\mu$ par l'application somme,

$$s : \mathrm{H}_n \times \mathrm{H}_n \longrightarrow \mathrm{H}_n, \quad (X, Y) \longmapsto X + Y.$$

Il en résulte aussitôt que $\mathrm{Horn}_n(\lambda, \mu)$ est compact.

On va interpréter les différents ingrédients de (6) à l'aide de la structure du groupe unitaire U_n. C'est un groupe de Lie (réel) compact connexe dont l'algèbre de Lie, $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}_n)$, est l'espace $i\mathrm{H}_n$ des matrices anti-hermitiennes ; l'action adjointe de U_n dans $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}_n)$ est la conjugaison. [1] L'espace vectoriel réel $i\mathrm{H}_n$ s'identifie au dual de H_n grâce à la forme bilinéaire

$$B : i\mathrm{H}_n \times \mathrm{H}_n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (X,Y) \longmapsto \mathrm{Tr}(iXY),$$

qui est non dégénérée car la forme quadratique $X \mapsto \mathrm{Tr}(X^2)$ est définie positive sur H_n. De plus, B est invariante sous l'action de U_n définie par

$$U \cdot (X,Y) := (UXU^{-1}, UYU^{-1}).$$

On peut donc identifier la représentation de U_n dans H_n à la duale de la représentation adjointe, appelée *représentation coadjointe*.

Observons aussi que le sous-espace $i\mathrm{D}_n$ de $i\mathrm{H}_n$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe $\mathrm{T}_n \subset \mathrm{U}_n$ formé des matrices diagonales. De plus, T_n est isomorphe au tore $\mathrm{U}_1 \times \cdots \times \mathrm{U}_1$ (n facteurs), où U_1 est le cercle unité ; puisque T_n est son propre centralisateur, on en déduit que c'est un *tore maximal* de U_n. On peut ainsi identifier D_n à la représentation coadjointe de T_n. Le normalisateur $N_{\mathrm{U}_n}(\mathrm{T}_n)$ est formé des matrices monomiales (ayant au plus un coefficient non nul par ligne et par colonne) ; c'est donc le produit semi-direct de T_n par le groupe symétrique S_n opérant dans T_n par permutation des coefficients diagonaux. En particulier, le *groupe de Weyl* de U_n (le quotient de $N_{\mathrm{U}_n}(\mathrm{T}_n)$ par T_n) s'identifie au groupe symétrique. Ce groupe opère aussi dans D_n par permutation des coefficients diagonaux, et toute orbite rencontre C_n en un point unique ; par ailleurs, toute orbite de U_n rencontre D_n suivant une unique orbite de S_n. Ainsi, la *chambre de Weyl* C_n est un domaine fondamental pour l'action coadjointe de U_n.

Enfin, l'application $s : \mathrm{H}_n \times \mathrm{H}_n \to \mathrm{H}_n$ s'identifie à la projection

$$p : \mathrm{Lie}(\mathrm{U}_n)^* \times \mathrm{Lie}(\mathrm{U}_n)^* \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathrm{U}_n)^*$$

transposée de l'inclusion diagonale $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}_n) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{U}_n) \times \mathrm{Lie}(\mathrm{U}_n)$, $X \mapsto (X,X)$.

La conjecture 1.2 est ainsi un cas particulier du

Théorème 2.1. *Soient K un groupe de Lie compact connexe et $L \subset K$ un sous-groupe fermé connexe. Notons $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de L, K, et $p : \mathfrak{k}^* \to \mathfrak{l}^*$ la projection, transposée de l'inclusion $\mathfrak{l} \to \mathfrak{k}$. Soient $T_L \subset L$ un tore maximal, $\mathfrak{t}_L$ son algèbre de Lie, et $C_L \subset \mathfrak{t}_L^*$ une chambre de Weyl. Pour toute K-orbite coadjointe $\mathcal{O} \subset \mathfrak{k}^*$, l'intersection $p(\mathcal{O}) \cap C_L$ est un polytope convexe.*

En effet, il suffit de prendre pour K le groupe $\mathrm{U}_n \times \mathrm{U}_n$ et pour L la diagonale.

Le théorème 2.1 est dû à Heckman (voir [He, Th. 7.5]) par des méthodes de théorie des représentations sur lesquelles on reviendra dans la troisième partie. C'est aussi une

1. Un *groupe de Lie G* est une variété différentielle munie d'une structure de groupe telle que les opérations de multiplication et de passage à l'inverse soient différentiables. L'*algèbre de Lie* de G est l'espace tangent en l'élément neutre ; l'action de G dans lui-même par conjugaison induit une action linéaire de G dans son algèbre de Lie, la *représentation adjointe*. On renvoie au chapitre IX de [CG] pour plus de détails sur ces notions, et leurs illustrations sur les groupes classiques.

conséquence d'un résultat de géométrie différentielle, qu'on va présenter après quelques définitions.

Soit M une variété différentielle ; on dit que M est *symplectique* si elle est munie d'une 2-forme différentielle alternée ω qui est fermée (c'est-à-dire $\mathrm{d}\omega = 0$) et non dégénérée en tout point $p \in M$ (autrement dit, l'application $T_p(M) \to T_p(M)^*$, $x \mapsto (y \mapsto \omega_p(x, y))$ est un isomorphisme). Toute fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ définit alors un champ de vecteurs $H(f)$ sur M, tel que $H(f)_p$ est l'image de la différentielle $\mathrm{d}f_p \in T_p(M)$ par l'isomorphisme ci-dessus ; on dit que $H(f)$ est le *hamiltonien* de f.

Soit de plus K un groupe de Lie compact connexe opérant dans M et laissant ω invariante. On dit que cette opération est *hamiltonienne* s'il existe une application $\mu \in C^\infty(M, \mathfrak{k}^*)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\mu(k \cdot p) = \mathrm{Ad}(k)^* \mu(p)$ pour tous $k \in K$ et $p \in M$, où $\mathrm{Ad}^* : K \to \mathrm{GL}(\mathfrak{k}^*)$ désigne la représentation coadjointe.

(ii) Pour tout $X \in \mathfrak{k}$, le champ de vecteurs induit X_M est le hamiltonien de la fonction $M \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \mu(p)(X)$.

La propriété (i) signifie que μ est équivariante pour l'action de K ; quant à (ii), elle se réécrit sous la forme $\mathrm{d}\mu_p(x)(X) = \omega_p(x, X_p)$ pour tous $x \in T_p(M)$ et $X \in \mathfrak{k}$.

On appelle μ l'*application moment* associée à l'action de K dans M (une telle application est unique à translation près par un élément K-invariant de $\mathfrak{k}^*$).

Exemple 2.2. Avec les notations du théorème 2.1, *toute K-orbite coadjointe $\mathcal{O}$ a une structure naturelle de variété symplectique compacte connexe, pour laquelle l'action de K est hamiltonienne.* En effet, choisissons $\lambda \in \mathcal{O}$, de sorte que $\mathcal{O}$ s'identifie à l'espace homogène K/K^λ, où K^λ désigne le stabilisateur de λ ; c'est un sous-groupe fermé connexe de K. On a donc $T_\lambda(\mathcal{O}) \cong \mathfrak{k}/\mathfrak{k}^\lambda$, où $\mathfrak{k}^\lambda := \mathrm{Lie}(K^\lambda)$; de plus, $\mathfrak{k}^\lambda$ est formé des $X \in \mathfrak{k}$ tels que $\mathrm{ad}(X)^*(\lambda) = 0$, ce qui équivaut à $\lambda([X, Y]) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{k}$. L'application $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \to \mathbb{R}$, $(X, Y) \mapsto \lambda([X, Y])$ est une forme bilinéaire alternée de noyau $\mathfrak{k}^\lambda$; elle passe donc au quotient en une forme symplectique ω_λ sur $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}^\lambda$. On vérifie que ω_λ est invariante par K^λ ; elle définit donc une 2-forme différentielle K-invariante ω sur $\mathcal{O}$. De plus, ω est fermée (cela résulte de l'identité de Jacobi) ; c'est donc une forme symplectique sur $\mathcal{O}$, dite de Kostant-Kirillov-Souriau. On a par définition $\omega_\lambda(X_\lambda, Y_\lambda) = \mathrm{ad}(X)^*(\lambda)(Y)$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{k}$ vus comme champs de vecteurs sur $\mathcal{O}$. En utilisant l'invariance de ω, on en déduit que *l'inclusion $\mathcal{O} \subset \mathfrak{k}^*$ est l'application moment.*

Exemple 2.3. Considérons une K-variété hamiltonienne M et un sous-groupe fermé connexe $L \subset K$. L'action induite de L dans M est alors hamiltonienne, d'application moment $p \circ \mu : M \to \mathfrak{l}^*$ avec les notations du théorème 2.1. En particulier, la projection $p : \mathcal{O} \to \mathfrak{l}^*$ est l'application moment pour l'action de L dans une K-orbite coadjointe $\mathcal{O}$.

Compte tenu de l'exemple 2.3, le théorème 2.1 résulte du

Théorème 2.4. *Soit M une variété symplectique compacte connexe, munie d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie compact connexe K, d'application moment μ. Soit $C \subset \mathfrak{k}^*$ une chambre de Weyl. Alors l'intersection $\mu(M) \cap C$ est un polytope convexe.*

Ce résultat est dû à Kirwan (voir [Ki]) ; il conclut (et repose sur) des travaux de Guillemin et Sternberg (voir [GS1, GS2]). Sa preuve, de nature qualitative, ne permet pas en général d'obtenir des inéquations définissant $\mu(M) \cap C$. Mais lorsque K est un tore (si bien que $C = \mathfrak{k}^*$), l'ensemble $\mu(M)$ est l'enveloppe convexe des points $\mu(p)$, où p décrit les points fixes de K dans M (voir [A, Th. 1] et [GS1, Th. 4]).

Appliquons ce dernier résultat à l'action du tore maximal $\mathrm{T}_n \subset \mathrm{U}_n$ dans l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_\lambda \subset \mathrm{H}_n$. La projection $p : \mathrm{H}_n \to \mathrm{D}_n$ envoie chaque matrice hermitienne $X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ sur sa diagonale, $(x_{11}, \ldots, x_{nn})$. Par ailleurs, les points fixes de T_n sont les matrices hermitiennes de spectre λ qui commutent aux matrices diagonales unitaires ; ce sont donc les matrices diagonales de spectre λ. On obtient ainsi le résultat suivant, dû à Schur et Horn (voir [Sc, H1]) par des méthodes bien différentes :

Corollaire 2.5. *L'ensemble des diagonales des matrices hermitiennes de spectre donné, $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)$, est l'enveloppe convexe des $(\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)})$, où $\sigma \in \mathrm{S}_n$.*

3 Restriction de représentations

Le but de cette partie est de présenter une autre interprétation de l'ensemble Horn_n en termes de théorie des représentations ; il en résultera que cet ensemble est un polyèdre convexe *rationnel*, c'est-à-dire défini par des inéquations à coefficients rationnels.

Commençons par rappeler quelques résultats sur la structure des groupes de Lie compacts connexes et de leurs représentations ; on renvoie à [BtD] pour une exposition détaillée.

Soient K un groupe de Lie compact connexe, et $T \subset K$ un tore maximal ; alors $T \cong \mathrm{U}_1 \times \cdots \times \mathrm{U}_1$ (r facteurs) où r est le *rang* de K. On note $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K, et $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ celle de T ; on a donc $\mathfrak{t} \cong \mathbb{R}^r$. Notons $W = N_K(T)/T$ le *groupe de Weyl*, et Λ le groupe des *caractères* de T, c'est-à-dire des homomorphismes de groupes de Lie $\lambda : T \to \mathrm{U}_1$. Puisque tout caractère de $\mathrm{U}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est de la forme $z \mapsto z^n$ pour un unique $n \in \mathbb{Z}$, on a $\Lambda \cong \mathbb{Z}^r$. En considérant la différentielle en l'élément neutre de K, on identifie Λ à un réseau dans $\mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^r$: le *réseau des poids*.

Choisissons une *chambre de Weyl* $C \subset \mathfrak{t}^*$. Rappelons que C est un cône convexe polyédral *rationnel* (on peut le définir par des inéquations linéaires de la forme $f \geq 0$, où $f \in \mathfrak{t}$ est à valeurs entières sur Λ) ; c'est aussi un domaine fondamental pour l'action de W dans $\mathfrak{t}^*$, et pour l'action coadjointe de K dans $\mathfrak{k}^*$. On note $\Lambda^+ := \Lambda \cap C$ l'ensemble des poids *dominants* ; il est stable par addition et contient 0. D'après le lemme de Gordan, il existe un ensemble fini de poids dominants, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, tel que

$$\Lambda^+ = \{\sum_{i=1}^N n_i \lambda_i \mid n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{N}\}.$$

On dit que Λ^+ est un *sous-monoïde de type fini* du groupe abélien Λ.

Exemple 3.1. Lorsque K est le groupe unitaire U_n, on peut prendre $T = \mathrm{T}_n$; alors $W = \mathrm{S}_n$ et $\mathfrak{t}^*$ s'identifie à D_n, dont C_n est une chambre de Weyl. Le réseau des poids est $\mathbb{Z}^n$ avec pour base les caractères $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ donnés par les coefficients diagonaux, et Λ^+ est formé des suites décroissantes d'entiers relatifs.

Étant donnée une représentation différentiable de K dans un espace vectoriel complexe V de dimension finie, on a une décomposition unique

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

dans laquelle

$$V_\lambda := \{v \in V \mid t \cdot v = \lambda(t)v \ \forall t \in T\}$$

désigne le sous-espace de poids λ ; de plus, W permute ces sous-espaces. On dit que λ est un *poids de* V si $V_\lambda \neq \{0\}$; l'enveloppe convexe de ces poids dans $\mathfrak{t}^*$ est un polytope convexe, stable par W. Lorsque V est irréductible comme représentation de K, les sommets de ce polytope forment une orbite de W ; autrement dit, ces sommets sont de la forme $w\lambda_0$ ($w \in W$) pour un unique $\lambda_0 \in \Lambda^+$. De plus, V_{λ_0} est de dimension 1, et la représentation irréductible V est uniquement déterminée par son *plus grand poids* λ_0 à isomorphisme près. On obtient ainsi une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de K, sur l'ensemble Λ^+ des poids dominants ; on note $\lambda \mapsto V_K(\lambda)$ la bijection réciproque.

Revenons à la situation du théorème 2.1 ; notons T_K, W_K, Λ_K, ... les objets ainsi associés à K, et T_L, W_L, Λ_L, ... ceux associés à L. On peut supposer que $T_L \subset T_K$; par suite, la projection $p : \mathfrak{k}^* \to \mathfrak{l}^*$ envoie $\mathfrak{t}_K^*$ dans $\mathfrak{t}_L^*$ et Λ_K dans Λ_L (les relations entre W_K et W_L sont plus compliquées, voir [BS, Sec. 2]). Étant donnée une représentation irréductible $V_K(\lambda)$ de K, sa restriction au sous-groupe L admet une unique décomposition de la forme

$$\mathrm{Res}_L^K V_K(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in \Lambda_L^+} m(\lambda, \mu)\, V_L(\mu),$$

où on pose $mV_L(\mu) = V_L(\mu) \oplus \cdots \oplus V_L(\mu)$ (m copies) pour tout entier $m \geq 1$; les *multiplicités* $m(\lambda, \mu)$ sont des entiers naturels uniquement déterminés. Posons

$$\Lambda^+(K, L) := \{(\lambda, \mu) \in \Lambda_K^+ \times \Lambda_L^+ \mid m(\lambda, \mu) \neq 0\}$$

et désignons par $C(K, L)$ le sous-cône de $\mathfrak{t}_K^* \times \mathfrak{t}_L^*$ engendré par $\Lambda^+(K, L)$.

Théorème 3.2. (i) *L'ensemble* $\Lambda^+(K, L)$ *est un sous-monoïde de type fini de* $\Lambda_K \times \Lambda_L$.
(ii) *L'ensemble* $C(K, L)$ *est un cône convexe polyédral rationnel.*
(iii) *Avec les notations du théorème 2.1, on a*

$$C(K, L) = \{(\lambda, \mu) \in C_K \times C_L \mid \mu \in p(\mathcal{O}_\lambda)\}.$$

L'assertion (i) se déduit d'un résultat de finitude en théorie des invariants, dû à Hilbert et Nagata. L'assertion (ii) en résulte aussitôt. Enfin, l'assertion (iii) est conséquence d'un résultat de Sjamaar qui généralise et précise le théorème 2.4 (voir [Sj, Th. 7.6] et aussi l'introduction de [BS]).

Exemple 3.3. Lorsque L est un tore maximal de K, noté simplement T, on a $\Lambda_L = \Lambda$ et $C_L = \mathfrak{t}^*$. On montre alors que $\Lambda^+(K, T)$ est formé des couples $(\lambda, \mu) \in \Lambda^+ \times \Lambda$ tels que $\mu \in \mathrm{Conv}(W\lambda)$ (où Conv désigne l'enveloppe convexe dans $\mathfrak{t}^*$), et que $\lambda(t) = \mu(t)$ pour tout t dans le centre de K (qui est l'intersection de tous les tores maximaux). Le théorème 3.2 entraîne alors que $p(\mathcal{O}_\lambda) = \mathrm{Conv}(W\lambda)$. Ce résultat, dû à Kostant (voir [Ko]), généralise le théorème de Schur et Horn (corollaire 2.5).

Exemple 3.4. Un problème classique est de décomposer le produit tensoriel de deux représentations irréductibles de K en somme directe de représentations irréductibles ; en d'autres termes, il s'agit de déterminer les multiplicités $c_{\lambda,\mu}^{\nu}$ dans la décomposition

$$V_K(\lambda) \otimes V_K(\mu) = \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+} c_{\lambda,\mu}^{\nu} V_K(\nu). \tag{7}$$

Ce problème rentre dans le cadre ci-dessus, en considérant l'inclusion diagonale de K dans $K \times K$. Lorsque $K = \mathrm{U}_n$, les $c_{\lambda,\mu}^{\nu}$ sont appelés *coefficients de Littlewood-Richardson* ; ils se calculent par une règle combinatoire due à ces deux mathématiciens. D'après l'égalité (6) et le théorème 3.2, on a

$$C(\mathrm{U}_n \times \mathrm{U}_n, \mathrm{U}_n) = \mathrm{Horn}_n.$$

4 Conjecture de Horn et calcul de Schubert

Dans cette partie, on va introduire progressivement des notions de calcul de Schubert, et présenter ses liens avec la conjecture 1.1.

On revient au cadre de la première partie ; on va tout d'abord obtenir une famille d'inégalités du type (3) qui contient celles de Weyl, en généralisant la preuve de ces dernières. On considère à nouveau A, B dans H_n de spectres respectifs $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)$ et $\mu = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n)$; on pose $C = A + B$ et on note $\nu = (\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_n)$ son spectre. On choisit une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $Ae_i = \lambda_i e_i$ pour tout i ; on introduit de même des bases orthonormées $(f_1, \ldots, f_n)$ pour B, et $(g_1, \ldots, g_n)$ pour C. On se donne enfin I, J, K dans $\mathcal{P}(r, n)$; on écrit $I = (i_1 < \cdots < i_r)$, et de même pour J et K.

Proposition 4.1. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\sum_{k \in K} \nu_k \leq \sum_{i \in I} \lambda_i + \sum_{j \in J} \mu_j$$

s'il existe un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{C}^n$ de dimension r tel que

$$\dim(V \cap \mathrm{Vect}(e_{i_m}, \ldots, e_n)) \geq r + 1 - m, \quad \dim(V \cap \mathrm{Vect}(f_{j_m}, \ldots, f_n)) \geq r + 1 - m \quad \text{et}$$

$$\dim(V \cap \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_{k_m})) \geq m \quad \forall m \in \{1, \ldots, r\}.$$

Lorsque $r = 1$, on retrouve les inégalités de Weyl. La preuve de la proposition utilise la notion de *trace de Rayleigh* : étant donnée une base orthonormée $(v_1, \ldots, v_r)$ de V, on pose

$$R_A(V) := \sum_{i=1}^{r} (Av_i | v_i).$$

On vérifie que $R_A(V)$ est la trace de l'application composée

$$V \xrightarrow{i} \mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^n \xrightarrow{p} V,$$

où i désigne l'inclusion, et p la projection orthogonale ; en particulier, $R_A(V)$ ne dépend pas du choix de $v_1, \ldots, v_r$.

Montrons d'abord que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = \min_W R_A(W), \tag{8}$$

où le minimum porte sur les sous-espaces $W \subset \mathbb{C}^n$ de dimension r qui vérifient

$$\dim(W \cap \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{i_m})) \geq m \quad (1 \leq m \leq r).$$

En effet, pour un tel W, on peut choisir $w_1 \in W \cap \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{i_1})$ tel que $(w_1|w_1) = 1$; alors $(Aw_1|w_1) \geq \lambda_{i_1}$ d'après (2). Puis on choisit $w_2 \in W \cap \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{i_2})$ tel que $(w_1|w_2) = 0$ et $(w_2|w_2) = 1$; on a alors $(Aw_2|w_2) \geq \lambda_{i_2}$. En itérant cette construction, on obtient $R_A(W) = \sum_{i=1}^{r}(Aw_i|w_i) \geq \sum_{i \in I} \lambda_i$, avec égalité lorsque $W = \mathrm{Vect}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$; ceci démontre (8).

On montre de façon analogue que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = \max_W R_A(W), \tag{9}$$

où le maximum porte cette fois sur les sous-espaces $W \subset \mathbb{C}^n$ de dimension r qui vérifient

$$\dim(W \cap \mathrm{Vect}(e_{i_m}, \ldots, e_n)) \geq r + 1 - m \quad (1 \leq m \leq r).$$

Comme l'application $X \to R_X(V)$ est linéaire, on a $R_{-A}(V) + R_{-B}(V) + R_C(V) = 0$. Mais $R_C(V) \geq \sum_{k \in K} \nu_k$ d'après (8). Puisque le spectre de $-A$ est $(-\lambda_n \geq \cdots \geq -\lambda_1)$ pour la base orthonormée $(e_n, \ldots, e_1)$, on a aussi $R_{-A}(V) \geq -\sum_{i \in I} \lambda_i$ d'après (9). On obtient de même $R_{-B}(V) \geq -\sum_{j \in J} \mu_j$, ce qui établit la proposition.

Cette démonstration fait apparaître les principaux ingrédients du *calcul de Schubert*, qu'on va présenter très brièvement (voir [M1] pour une exposition approfondie). L'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ de dimension r est muni d'une structure naturelle de variété projective complexe, appelée *grassmannienne* et notée $\mathrm{Gr}(r, \mathbb{C}^n)$. Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$, où $i = 1, \ldots, n-1$, forment un *drapeau complet*, c'est-à-dire une suite croissante $(E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_{n-1})$ où chaque E_i est un sous-espace de dimension i de $\mathbb{C}^n$. Étant donnés un tel drapeau complet $E_\bullet$ et $I \in \mathcal{P}(r, n)$, l'ensemble

$$X_I(E_\bullet) := \{V \in \mathrm{Gr}(r, \mathbb{C}^n) \mid \dim(V \cap E_{i_m}) \geq m \ \ (1 \leq m \leq r)\}$$

est une sous-variété fermée, irréductible, de dimension $\sum_{m=1}^{r}(i_m - m)$. Les $X_I(E_\bullet)$, où $I \in \mathcal{P}(r, m)$, sont appelées les *variétés de Schubert* associées au drapeau $E_\bullet$. On introduit aussi les *cellules de Schubert*

$$\Omega_I(E_\bullet) := \{V \in \mathrm{Gr}(r, \mathbb{C}^n) \mid \dim(V \cap E_j) = m \ \ (i_m \leq j < i_{m+1}, \ 0 \leq m \leq r)\}.$$

On montre que $\Omega_I(E_\bullet)$ est un ouvert dense de $X_I(E_\bullet)$, isomorphe à un espace affine complexe ; de plus, $\mathrm{Gr}(r, \mathbb{C}^n)$ est la réunion disjointe de toutes les cellules de Schubert, et $X_I(E_\bullet)$ est réunion de certaines d'entre elles (voir [CG, Chap. IV] pour plus de détails sur cette décomposition cellulaire de la grassmannienne).

Il s'avère plus commode d'indexer les variétés de Schubert par des partitions, c'est-à-dire des suites décroissantes d'entiers naturels : à tout $I = (i_1 < \cdots < i_r) \in \mathcal{P}(r,n)$, on associe la suite

$$\lambda = \lambda(I) := (i_r - r, \ldots, i_1 - 1).$$

On obtient ainsi une bijection de $\mathcal{P}(r,n)$ sur l'ensemble des partitions $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r)$, où $\lambda_1 \leq n-r$. On pose $X_\lambda(E_\bullet) := X_I(E_\bullet)$; sa dimension est $\sum_{m=1}^r \lambda_m =: |\lambda|$. L'hypothèse de la proposition 4.1 se réécrit alors

$$X_{\lambda(I')}(E_\bullet) \cap X_{\lambda(J')}(F_\bullet) \cap X_{\lambda(K)}(G_\bullet) \neq \emptyset,$$

où $I' := (n+1-i_r, \ldots, n+1-i_1)$ de sorte que $\lambda(I') = (n-r-\lambda_r, \ldots, n-r-\lambda_1)$ est la partition *duale* de $\lambda(I)$, qu'on notera $\lambda(I)'$; $\lambda(J')$ est définie de même, et $E_\bullet$, $F_\bullet$, $G_\bullet$ sont des drapeaux complets, associés à $-A$, $-B$, C.

Les variétés de Schubert permettent de décrire l'anneau de cohomologie $H^*(\mathrm{Gr}(r,\mathbb{C}^n))$. [2] Pour toute partition $\lambda = (n-r \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0)$, on note σ_λ la classe fondamentale de la variété de Schubert $X_{\lambda'}(E_\bullet)$, si bien que $\sigma_\lambda \in H^{2|\lambda|}\mathrm{Gr}(r,\mathbb{C}^n)$. On montre que les classes σ_λ sont indépendantes du choix du drapeau complet $E_\bullet$ et forment une base du groupe abélien $H^*(\mathrm{Gr}(r,\mathbb{C}^n))$; la base duale (pour la dualité de Poincaré) est formée des $\sigma_{\lambda'}$. De plus, on a les relations :

$$\sigma_\lambda \cup \sigma_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu}\, \sigma_\nu,$$

où $c^\nu_{\lambda,\mu}$ est le coefficient de Littlewood-Richardson introduit dans l'exemple 3.4. Pour que $c^\nu_{\lambda,\mu} \neq 0$, il faut que $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$; en écrivant $\lambda = \lambda(I)$, $\mu = \lambda(J)$ et $\nu = \lambda(K)$, ceci équivaut à la mystérieuse égalité (4).

Théorème 4.2. *L'ensemble* Horn_n *est formé des solutions de l'équation (5) et des inéquations (3) pour tout triplet* (I,J,K) *de* $\mathcal{P}(r,n)$ *tel que* $c^{\lambda(K)}_{\lambda(I),\lambda(J)} \neq 0$*, et pour* $r = 1, \ldots, n$.

Le fait que Horn_n vérifie les inéquations ci-dessus se déduit de la proposition 4.1 et d'arguments de dualité en calcul de Schubert. La réciproque utilise deux ingrédients nouveaux : la théorie géométrique des invariants, en particulier le critère de Hilbert-Mumford, et la propriété de *saturation* des coefficients de Littlewood-Richardson : s'il existe un entier $n > 0$ tel que $c^{n\nu}_{n\lambda,n\mu} \neq 0$, alors $c^\nu_{\lambda,\mu} \neq 0$. Cette propriété a été établie par Knutson et Tao (voir [KT]) ; par ailleurs, le lien entre conjecture de Horn et théorie géométrique des invariants, mis en évidence par Klyachko (voir [Kl]), joue un rôle fondamental dans la plupart des développements ultérieurs.

En fait, on peut montrer que l'ensemble T^r_n (qui définit les inégalités de la conjecture 1.1) est formé des $(I,J,K) \in U^r_n$ tels que $c^{\lambda(K)}_{\lambda(I),\lambda(J)} \neq 0$. Mais certaines de ces inégalités sont superflues : pour définir Horn_n, il suffit de conserver celles indexées par les (I,J,K) tels que

2. Rappelons qu'on associe à tout espace topologique X, son anneau de cohomologie à coefficients entiers $H^*(X)$, muni du cup produit $\cup$; c'est un anneau gradué. Lorsque X est une variété projective complexe, toute sous-variété complexe $Y \subset X$ définit une classe fondamentale $[Y] \in H^{2d}(X)$, où d est la codimension complexe de Y dans X ; on a $[Y] \cup [Z] = [Y \cap Z]$ si Y et Z se coupent transversalement. On renvoie à [M1, App. A] pour plus de détails sur ces notions.

$c^{\lambda(K)}_{\lambda(I),\lambda(J)} = 1$. Ces résultats sont dus à Fulton, voir [F, Th. 12, Th. 13]) ; Knutson, Tao et Woodward ont montré que les inégalités pour lesquelles $c^{\lambda(K)}_{\lambda(I),\lambda(J)} = 1$ forment un système minimal (voir [KTW]). En d'autres termes, les égalités correspondantes définissent des faces de codimension 1 du cône convexe polyédral Horn_n.

5 Le cône de Littlewood-Richardson

Le but de cette partie est d'énoncer un résultat de Belkale-Kumar et Ressayre qui peut être vu comme une généralisation de la conjecture de Horn (reformulée en termes du groupe unitaire U_n) à un groupe de Lie compact connexe K arbitraire. Plus précisément, on va présenter une version quantitative du théorème 2.1, pour le cas de l'inclusion diagonale de K dans $K \times K$ (le cas général, traité dans des travaux de Ressayre (voir [R1, R2]), sort du cadre de ce texte).

Considérons à nouveau le cône $C(K \times K, K)$ associé à la décomposition des produits tensoriels de représentations irréductibles (exemple 3.4). On va introduire une variante de ce cône qui contient les mêmes informations et qui est plus symétrique, puis en présenter un système minimal d'équations et d'inéquations.

On conserve les notations T, W, Λ, C, …, $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ de la troisième partie. Observons que

$$c^{\nu}_{\lambda,\mu} = \dim(V(\lambda) \otimes V(\mu) \otimes V(\nu)^*)^K,$$

où pour toute représentation de K dans V, on note $V^K \subset V$ le sous-espace des invariants. De plus, la représentation de K dans $V(\nu)^*$ est irréductible, et donc de la forme $V(\nu^*)$ pour un unique $\nu^* \in \Lambda^+$; on a $\nu^* = -w_0\nu$, où w_0 désigne l'unique élément de W tel que $w_0(C) = -C$. Notons $\mathcal{LR}(K)$ le cône convexe de $(\mathfrak{t}^*)^3$ engendré par les triplets (λ, μ, ν) de poids dominants tels que $(V(\lambda) \otimes V(\nu) \otimes V(\nu))^K \neq 0$; c'est le *cône de Littlewood-Richardson*. D'après le théorème 3.2, on a

$$\mathcal{LR}(K) = \{(\lambda, \mu, \nu) \in C^3 \mid 0 \in K\lambda + K\mu + K\nu\}$$

et ce cône convexe est polyédral rationnel ; il est donc défini par un système minimal d'équations et d'inéquations linéaires homogènes, où chaque inéquation est uniquement déterminée modulo la multiplication par un scalaire positif, et l'ajout d'une combinaison linéaire des équations. Il est facile de montrer que ces équations sont toutes de la forme

$$(\lambda + \mu + \nu)(\theta) = 0 \quad (\theta \in \mathfrak{k}^K), \tag{10}$$

où le sous-espace $\mathfrak{k}^K \subset \mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie du centre de K ; de plus, $\mathfrak{k}^K = \mathfrak{t}^W$.

La description des inéquations, bien plus élaborée, met en jeu une collection de résultats sur la structure du groupe de Lie K et de certains espaces homogènes qui lui sont associés. On va présenter brièvement ces résultats ; ils seront illustrés par l'exemple du groupe unitaire, après l'énoncé du théorème principal.

On peut choisir un produit scalaire $(\ , \ )$ sur $\mathfrak{k}$, invariant par K ; par restriction et passsage au dual, on en déduit un produit scalaire sur $\mathfrak{t}^*$, invariant par W, qu'on notera encore $(\ , \ )$.

Soit R l'ensemble (fini) des poids non nuls de la représentation adjointe de K ; c'est l'ensemble des *racines* de (K,T). Une racine α est dite *positive* si $(\alpha,\lambda) \geq 0$ pour tout $\lambda \in C$; on note $R^+ \subset R$ le sous-ensemble formé des racines positives, et on pose

$$\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha.$$

Une racine positive α est dite *simple* si l'hyperplan $(\alpha = 0) \subset \mathfrak{t}^*$ définit une face de codimension 1 de la chambre C. Les racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ forment une base du sous-espace de $\mathfrak{t}^*$ orthogonal à $\mathfrak{t}^W$.

Pour toute racine α, l'application linéaire

$$s_\alpha : \mathfrak{t}^* \longrightarrow \mathfrak{t}^*, \quad \lambda \longmapsto \lambda - \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$$

est la symétrie orthogonale qui fixe point par point l'hyperplan $\alpha^\perp$; elle appartient au groupe de Weyl W. Les symétries s_{α_i} associées aux racines simples forment un système générateur minimal de ce groupe ; on note $\ell : W \to \mathbb{N}$ la fonction longueur associée.

On appelle *poids fondamentaux* une suite $(\varpi_1, \ldots, \varpi_s)$ de $\mathfrak{t}^*$ qui vérifie les équations

$$\frac{2(\varpi_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)} = \delta_{i,j} \quad (1 \leq i,j \leq s).$$

Ainsi, chaque poids fondamental est uniquement déterminé à translation près par $(\mathfrak{t}^*)^W$. La chambre C est le plus petit cône convexe qui contient $(\mathfrak{t}^*)^W$ et les poids fondamentaux.

Choisissons une suite de tels poids et posons $L_i = K^{\varpi_i}$ pour $i = 1, \ldots, s$. Alors L_i est un sous-groupe fermé connexe de K, maximal pour ces propriétés, et contenant le tore T ; il est indépendant du choix de ϖ_i. Le groupe de Weyl de (L_i, T) est le sous-groupe $W_i \subset W$ engendré par les s_{α_j}, où $j \neq i$. L'ensemble $W^i \subset W$, formé des w tels que $\ell(w) \leq \ell(wv)$ pour tout $v \in W_i$, est un système complet de représentants du quotient W/W_i. L'espace homogène K/L_i est muni d'une structure de variété projective complexe, réunion disjointe de sous-variétés localement fermées Ω_w, où $w \in W^i$; chaque Ω_w est un espace affine complexe de dimension $\ell(w)$. Les classes fondamentales des adhérences des cellules, notées σ_w, forment donc une base de $H^*(K/L_i)$; on a $\sigma_w \in H^{2\ell(w)}(K/L_i)$. En particulier, la classe du point est σ_e, où e désigne l'élément neutre de W.

Pour tout $w \in W^i$, on pose

$$\chi_w := \rho + w^{-1}\rho - 2\rho_i$$

où $\rho_i := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+, (\varpi_i, \alpha) = 0} \alpha$. On peut maintenant énoncer le

Théorème 5.1. *Avec les notations précédentes, le cône $\mathcal{LR}(K)$ est formé des $(\lambda,\mu,\nu) \in C^3$ qui vérifient les équations (10) où θ décrit une base de $(\mathfrak{t}^*)^W$, et les inéquations*

$$(\lambda, u\varpi_i) + (\mu, v\varpi_i) + (\nu, w\varpi_i) \leq 0$$

pour $i = 1, \ldots, r$ et pour tout $(u,v,w) \in (W^i)^3$ tel que $\sigma_u \cup \sigma_v \cup \sigma_w = \sigma_e$ dans $H^*(K/L_i)$ et que $(\chi_u + \chi_v + \chi_w - \chi_e, \varpi_i) = 0$. De plus, ce système d'équations et d'inéquations est minimal.

La première assertion de ce théorème est due à Belkale et Kumar en 2006 (voir [BK, Th. 28]) ; la minimalité a été obtenue par Ressayre en 2010 (voir [R1]).

Lorsque G est le groupe unitaire U_n, rappelons que le réseau Λ est engendré par les coefficients diagonaux $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$; on peut prendre $\theta = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$. Les racines (resp. les racines positives) sont formées des $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, où $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$ (resp. $i < j$) ; les symétries orthogonales associées sont les transpositions $(i, j) \in \mathrm{S}_n$. Les racines simples sont les $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, où $1 \leq i \leq n-1$; elles correspondent aux transpositions élémentaires de S_n. La fonction longueur de ce groupe est donnée par le nombre d'inversions. On peut prendre pour poids fondamentaux les sommes partielles $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i$, où $1 \leq i \leq n-1$; on a $L_i = \mathrm{U}_i \times \mathrm{U}_{n-i}$, si bien que l'espace homogène K/L_i est isomorphe à la grassmannienne $\mathrm{Gr}(i, \mathbb{C}^n)$. De plus, $W_i = \mathrm{S}_i \times \mathrm{S}_{n-i}$ et W^i est formé des permutations $\sigma \in \mathrm{S}_n$ telles que $\sigma(1) < \cdots < \sigma(i)$ et $\sigma(i+1) < \cdots < \sigma(n)$. On peut donc identifier W^i à $\mathcal{P}(i, n)$, en associant à σ la suite $(\sigma(1), \cdots, \sigma(i))$. On montre que l'égalité des poids $(\chi_u + \chi_v + \chi_w - \chi_e, \varpi_i) = 0$ est toujours vérifiée (c'est un phénomène propre au groupe unitaire), et que l'égalité des classes de cohomologie $\sigma_u \cup \sigma_v \cup \sigma_w = \sigma_e$, reformulée en termes de partitions, équivaut à $c_{\lambda,\mu}^{\nu'} \neq 0$. Le théorème 5.1 entraîne donc une reformulation plus symétrique de la conjecture de Horn, qui caractérise les spectres de trois matrices hermitiennes de somme nulle.

Références

[A] M. F. Atiyah, *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), no. 1, 1–15.

[BK] P. Belkale, S. Kumar, *Eigenvalue problem and a new product in cohomology of flag varieties*, Invent. math. **166** (2006), no. 1, 185–228.

[BS] A. Berenstein, R. Sjamaar, *Coadjoint orbits, moment polytopes and the Hilbert-Mumford criterion*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), no. 2, 433–466.

[B] M. Brion, *Restriction de représentations et projections d'orbites coadjointes (d'après Belkale, Kumar et Ressayre)*, Astérisque **352** (2013), 1–33.

[BtD] T. Bröcker, T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, Grad. Texts in Math. **98**, Springer-Verlag, New York, 1985.

[CG] P. Caldero, J. Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie. Tome premier*, Calvage & Mounet, 2013.

[F] W. Fulton, *Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus*, Bull. Amer. Math. Soc. **37** (2000), no. 3, 209–249.

[GS1] V. Guillemin, S. Sternberg, *Convexity properties of the moment mapping*, Invent. math. **67** (1982), no. 3, 491–513.

[GS2] V. Guillemin, S. Sternberg, *Convexity properties of the moment mapping. II*, Invent. math. **77** (1984), no. 3, 533–546.

[He] G. J. Heckman, *Projections of orbits and asymptotic behavior of multiplicities of compact connected Lie groups*, Invent. math. **67** (1982), no. 3, 515–538.

[H1] A. Horn, *Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix*, Amer. J. Math. **76** (1954), 620–630.

[H2] A. Horn, *Eigenvalues of sums of Hermitian matrices*, Pacific J. Math. **12** (1962), 225–241.

[KLM] M. Kapovich, B. Leeb, J. Millson, *The generalized triangle inequalities in symmetric spaces and buildings with applications to algebra*, Mem. Amer. math. Soc. **192** (2008), no. 896, viii + 83 pp.

[Ki] F. Kirwan, *Convexity properties of the moment mapping. III*, Invent. math. **77** (1984), no. 3, 547–552.

[Kl] A. A. Klyachko, *Stable bundles, representation theory and Hermitian operators*, Selecta Math. (N.S.) **4** (1998), no. 3, 419–445.

[Kn] A. Knutson, *The symplectic and algebraic geometry of Horn's problem*, Linear Algebra Appl. **319** (2000), no. 1-3, 61–81.

[KT] A. Knutson, T. Tao, *The honeycomb model of* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *tensor products. I. Proof of the saturation conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 4, 1055–1090.

[KTW] A. Knutson, T. Tao, C. Woodward, *The honeycomb model of* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *tensor products. II. Puzzles determine facets of the Littlewood-Richardson cone*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), no. 1, 19–48.

[Ko] B. Kostant, *On convexity, the Weyl group and the Iwasawa decomposition*, Ann. scient. École Norm. Sup. (4) **6** (1973), 413–455.

[Ku] S. Kumar, *Additive eigenvalue problem (a survey). (With an appendix by M. Kapovitch)*, http ://arxiv.org/abs/1305.4697.

[M1] L. Manivel, *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*, Cours Spécialisés **3**, Soc. Math. France, Paris, 1998.

[M2] L. Manivel, *Around the Horn conjecture*, notes d'un cours au CIRM en mars 2000, disponibles sur http ://math.univ-lyon1.fr/˜ressayre/PDFs/manivel.pdf

[MFK] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (2) **34**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[R1] N. Ressayre, *Geometric invariant theory and the generalized eigenvalue problem*, Invent. math. **180** (2010), no. 2, 389–441.

[R2] N. Ressayre, *Geometric invariant theory and generalized eigenvalue problem II*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **61** (2011), no. 4, 1467–1491.

[Sc] I. Schur, *Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf der Determinantentheorie*, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft **22** (1923), 9–20.

[Sj] R. Sjamaar, *Convexity properties of the moment mapping re-examined*, Adv. Math. **138** (1998), no. 1, 46–91.

[W] H. Weyl, *Das asymptotisches Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann. **71** (1912), 441–479.