Séminaire BOURBAKI Novembre 2005
58ème année, 2005-2006, n$^{\text{o}}$ 952

COMPACTIFICATION DE L'ESPACE DES MODULES DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES PRINCIPALEMENT POLARISÉES [D'APRÈS V. ALEXEEV]

par **Michel BRION**

INTRODUCTION

Classiquement, les variétés abéliennes complexes de dimension g munies d'une polarisation principale sont paramétrées par le quotient A_g du demi-espace de Siegel $\mathcal{H}_g$ sous l'action du groupe symplectique entier $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$. L'espace des modules A_g est un espace analytique complexe de dimension $g(g+1)/2$ n'ayant que des singularités quotient par des groupes finis. En fait, A_g est un ouvert de Zariski d'une variété projective $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{min}}$ (construite par Satake, Baily et Borel dans le cadre plus général des espaces localement symétriques) : la compactification minimale, dont le bord est de codimension g. La variété $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{min}}$ est en général bien plus singulière que A_g, mais on en connaît des désingularisations partielles : les compactifications toroïdales (construites pour les espaces localement symétriques par Ash, Mumford, Rapoport et Tai) dont le bord est un diviseur, et qui n'ont que des singularités quotient par des groupes finis.

Toutes ces compactifications de A_g admettent des modèles sur les entiers, les compactifications arithmétiques de Faltings et Chai. Cependant, elles sont construites par des procédés ad hoc qui n'en donnent pas d'interprétation modulaire, à savoir, comme espaces de paramètres d'objets géométriques (ce sens de l'adjectif "modulaire" est sans rapport avec les formes modulaires, qui ont des liens étroits avec la compactification minimale).

Des exemples importants de variétés abéliennes principalement polarisées sont les jacobiennes des courbes algébriques irréductibles, lisses et complètes de genre $g \geq 2$. Ces courbes admettent un espace des modules M_g dont on connaît cette fois une compactification modulaire $\overline{\mathrm{M}}_g$, paramétrant les courbes stables de genre arithmétique g. En associant à chaque courbe sa jacobienne, on obtient un morphisme $\mathfrak{t} : \mathrm{M}_g \to \mathrm{A}_g$ qui est injectif d'après le théorème de Torelli ; de plus, M_g, $\overline{\mathrm{M}}_g$ et $\mathfrak{t}$ admettent des modèles entiers. La question se pose alors de construire une compactification modulaire et canonique de A_g, définie sur les entiers et qui permette de compactifier le morphisme de Torelli $\mathfrak{t}$.

Les travaux [2, 3, 4] d'Alexeev apportent une réponse complète à cette question. Sa compactification $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$ est un espace des modules de "couples quasi-abéliens stables" ; il s'agit des couples (X, D) où X est une variété projective (connexe, mais non nécessairement irréductible) dans laquelle une variété semi-abélienne G opère avec un nombre fini d'orbites, et D est un diviseur effectif et ample sur X qui ne contient aucune de ces orbites. On suppose de plus que X est équidimensionnelle de dimension g et semi-normale (c'est une petite restriction sur ses singularités) et que les stabilisateurs de l'action de G sont des tores.

L'exemple le plus simple d'un tel couple est formé d'une variété abélienne opérant dans elle-même par translations, et d'un diviseur thêta. Un exemple plus singulier est celui où X est une cubique plane nodale munie de l'action du groupe multiplicatif G et du diviseur D formé d'un point distinct du point double ; c'est une dégénérescence des cubiques planes lisses munies d'un point, c.-à-d des courbes elliptiques.

À tout couple quasi-abélien stable on peut associer un complexe de polytopes convexes entiers appelé son type. Les couples dont le type est un "pavage périodique par des polytopes convexes entiers" d'un espace vectoriel $\mathbb{R}^r$, $r \leq g$, sont paramétrés par la compactification modulaire $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$. Parmi ces couples, on trouve ceux associés comme précédemment aux variétés abéliennes principalement polarisées (c'est le cas où $r = 0$), et aussi les jacobiennes compactifiées des courbes stables de genre arithmétique g. Ceci permet d'obtenir un morphisme de Torelli compactifié $\bar{\mathfrak{t}} : \overline{\mathrm{M}}_g \to \overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$; son image est contenue dans l'adhérence de A_g, une composante irréductible de $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$ dont la normalisation est une compactification toroïdale particulière, notée $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{Vor}}$.

En général, $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$ contient d'autres composantes irréductibles [2] ; autrement dit, ce n'est pas une compactification de A_g au sens usuel. Une description modulaire de la "composante principale" $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{Vor}}$ est proposée par Olsson [21] en termes de géométrie logarithmique ; plus généralement, Olsson obtient une compactification canonique des espaces $\mathrm{A}_{g,d}$ qui paramètrent les variétés abéliennes de dimension g munies d'une polarisation de degré $d \geq 2$. Mais la construction d'une compactification modulaire des espaces $\mathrm{A}_{g,d,n}$ (où on se donne aussi une structure de niveau n) est une question ouverte.

La définition des couples quasi-abéliens stables semble assez arbitraire : pourquoi faudrait-il s'intéresser à des objets aussi singuliers ? En fait, la construction d'espaces des modules de variétés projectives et lisses fait apparaître des objets très analogues : afin de pouvoir considérer de telles variétés X dont la classe canonique K_X n'est pas ample (par exemple, les variétés abéliennes, pour lesquelles K_X est triviale), on est amené à introduire des couples (X, D) où D est un diviseur effectif sur X tel que $K_X + D$ est ample. Et pour obtenir des espaces des modules complets, il faut autoriser des dégénérescences singulières de ces couples en des "couples stables".

Les courbes stables pointées forment le premier exemple de tels couples ; d'autres exemples importants sont les surfaces stables de [11]. Dans le manuscrit [1], Alexeev formule une définition générale des couples stables, et montre que l'existence d'un espace des modules complet pour ceux-ci se déduit d'un ensemble de conjectures dans la classification des variétés algébriques : le programme de Mori logarithmique. Ces conjectures sont toujours ouvertes en grande dimension, et la construction de $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$ s'obtient par des méthodes spécifiques liées aux symétries des variétés considérées.

Le but de ce texte est d'exposer une partie des résultats des articles [2, 3, 4, 5] avec des prérequis modestes de géométrie algébrique (par exemple, le contenu du manuel [9]), dans l'espoir de rendre plus accessible un sujet où foisonnent les notations, les définitions et les concepts. C'est pourquoi on rassemble dans la première partie des résultats classiques sur les variétés abéliennes et leurs espaces des modules, tirés des ouvrages [13, 15, 8]. La seconde partie est consacrée à une construction de dégénérescences "maximales" de variétés abéliennes, qui fait apparaître beaucoup d'ingrédients de la compactification modulaire. Celle-ci fait l'objet de la troisième partie ; on y décrit la structure des couples stables qu'elle classifie et on énonce les résultats principaux la concernant, en général sans démonstration détaillée.

Je remercie R. Bacher, O. Debarre, S. Druel et tout particulièrement V. Alexeev et G. Rémond pour des discussions très utiles et pour leurs commentaires sur les versions successives de ce texte ; il va de soi que je suis seul responsable des erreurs et imprécisions qui pourraient y subsister.

1. VARIÉTÉS ABÉLIENNES PRINCIPALEMENT POLARISÉES ET LEURS ESPACES DES MODULES

Dans tout ce texte, on appelle *variété* un schéma réduit, connexe, séparé et de type fini sur un corps algébriquement clos k ; avec cette convention, les variétés ne sont pas nécessairement intègres. On appelle *courbe* une variété de dimension pure 1. Enfin, on identifie chaque faisceau inversible au fibré en droites dont il est le faisceau des sections locales.

1.1. Variétés abéliennes

Une variété complète est dite *abélienne* si elle est munie d'une structure de groupe algébrique. Une telle variété A est intègre, projective et lisse, et sa loi de groupe est commutative ; on la note additivement. De plus, la structure de groupe sur la variété A est uniquement déterminée par la donnée de l'élément neutre 0. Pour tout $a \in A$, on note

$$\tau_a : A \to A, \quad x \mapsto x + a$$

la translation par a.

Le sous-groupe du groupe de Picard de A formé des classes d'isomorphie des fibrés algébriquement équivalents au fibré trivial est noté $\mathrm{Pic}^0(A)$ ou $A^\vee$; c'est aussi une variété abélienne, la *duale* de A. Tout homomorphisme de variétés abéliennes $f : A \to B$ définit un homomorphisme dual $f^\vee : B^\vee \to A^\vee$, la restriction de $f^* : \mathrm{Pic}(B) \to \mathrm{Pic}(A)$.

Soit L un fibré en droites sur A. Pour tout $a \in A$, le fibré en droites $L^{-1} \otimes \tau_a^*(L)$ est algébriquement trivial ; on obtient ainsi un morphisme

$$\lambda_L : A \to A^\vee, \quad a \mapsto [L^{-1} \otimes \tau_a^*(L)]$$

qui est en fait un homomorphisme de groupes d'après le *théorème du carré*

$$L \otimes \tau_{a+b}^*(L) \simeq \tau_a^*(L) \otimes \tau_b^*(L) \quad \text{pour tous } a, b \in A.$$

Pour que λ_L soit trivial (c.-à-d $\tau_a^*(L) \simeq L$ pour tout $a \in A$), il faut et il suffit que $[L] \in \mathrm{Pic}^0(A)$.

Lorsque le fibré en droites L est ample, λ_L est une *isogénie* (à savoir, un homomorphisme de groupes algébriques, surjectif et de noyau fini) et son degré est le carré de $h^0(L) := \dim H^0(A, L)$; de plus, $H^i(X, L) = 0$ pour tout $i \geq 1$. En particulier, A et $A^\vee$ ont la même dimension, notée g, et le degré du fibré en droites ample L est $g!\, h^0(L)$.

Une *polarisation* de A est une isogénie

$$\lambda : A \to A^\vee$$

qui s'écrit sous la forme λ_L pour un fibré en droites ample L ; alors les fibrés en droites M tels que $\lambda = \lambda_M$ ne sont autres que les translatés $\tau_a^*(L)$, $a \in A$. Les classes de ces fibrés dans $\mathrm{Pic}(A)$ forment un translaté de $A^\vee$ noté $\mathrm{Pic}^\lambda(A)$; l'entier positif $h^0(L) = h^0(\tau_a^*(L))$ est appelé le *degré* de la polarisation λ.

Une polarisation $\lambda = \lambda_L$ est dite *principale* si c'est un isomorphisme, c.-à-d si $h^0(L) = 1$; autrement dit, $L = \mathcal{O}_A(\Theta)$ pour un diviseur Θ effectif et ample, uniquement déterminé par L, et déterminé à translation près par λ. On dit alors que le couple (A, λ) est une *variété abélienne principalement polarisée*, qu'on abrège en v.a.p.p.

Les variétés abéliennes de dimension 1 ne sont autres que les courbes de genre 1 munies d'un point, qui définit une polarisation principale. En dimension au moins 2, certaines variétés abéliennes n'admettent aucune polarisation principale ; mais toute variété abélienne est isogène à une v.a.p.p.

Étant données deux variétés abéliennes polarisées (A, λ) et (B, μ), un *morphisme* $f : (A, \lambda) \to (B, \mu)$ est un homomorphisme $f : A \to B$ tel que $f^\vee \circ \mu \circ f = \lambda$. Il en résulte que f est fini, et que c'est un isomorphisme lorsque λ et μ ont le même degré. De plus, le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(A, \lambda)$ est fini et non trivial ; en fait, il contient toujours l'involution $[-1] : a \mapsto -a$.

La classification des v.a.p.p est intimement liée à celles des courbes :

Exemple 1.1. — Soit C une courbe complète et lisse de genre $g := h^1(\mathcal{O}_C) \geq 1$. Soit $J = J(C) := \mathrm{Pic}^0(C)$ sa jacobienne (formée des classes d'équivalence linéaire des diviseurs de degré 0) ; c'est une variété abélienne de dimension g. Le choix d'un point P de C définit un morphisme

$$f : C^{g-1} \to J, \quad (P_1, \ldots, P_{g-1}) \mapsto P_1 + \cdots + P_{g-1} - (g-1)P$$

dont l'image est un diviseur irréductible Θ de J ; un autre choix de P fournit un translaté de Θ, et ces diviseurs définissent une polarisation principale θ de J. D'après le théorème de Torelli, la classe d'isomorphie de la courbe C est uniquement déterminée par celle de la v.a.p.p (J, θ).

1.2. L'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées

Pour définir précisément cet espace qui paramètre les classes d'isomorphie des v.a.p.p de dimension donnée, on a besoin de quelques notions de nature schématique.

Tous les schémas considérés sont supposés localement noethériens. Un *schéma en groupes* sur un schéma de base S est un S-schéma $\pi : \mathcal{G} \to S$ muni de S-morphismes $\mu : \mathcal{G} \times_S \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ (la multiplication), $\varepsilon : S \to \mathcal{G}$ (l'élément neutre) et $\iota : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ (l'inverse) qui vérifient les axiomes des groupes.

Un *schéma abélien* sur S est un schéma en groupes $\pi : \mathcal{A} \to S$ propre, lisse et à fibres géométriques connexes (c.-à-d $\mathcal{A}_{\bar{s}} := \mathcal{A} \times_S \operatorname{Spec} \kappa(\bar{s})$ est connexe pour tout point s de S, où $\kappa(\bar{s})$ désigne une clôture algébrique du corps résiduel $\kappa(s)$). Chaque fibre géométrique $\mathcal{A}_{\bar{s}}$ est une variété abélienne sur $\kappa(\bar{s})$; on peut voir $\mathcal{A}$ comme une famille de variétés abéliennes paramétrée par la base S. La loi de groupe μ est commutative et uniquement déterminée par la section nulle ε. Lorsque S est le spectre d'un corps K, on dit aussi que $\mathcal{A}$ est une variété abélienne sur K.

Tout schéma abélien $\pi : \mathcal{A} \to S$ admet un *dual* $\mathcal{A}^\vee = \mathbf{Pic}^0(\mathcal{A}/S)$; c'est un schéma abélien sur S, dont chaque fibre géométrique est la duale de la fibre géométrique correspondante de $\mathcal{A}$ [8, Sec.I.1.9]. Une *polarisation* est un morphisme $\lambda : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^\vee$ de schémas en groupes sur S, qui induit une polarisation $\lambda_{\bar{s}} : \mathcal{A}_{\bar{s}} \to \mathcal{A}^\vee_{\bar{s}}$ pour tout point géométrique $\bar{s}$. Le degré de $\lambda_{\bar{s}}$ est constant sur toute composante connexe de S. La polarisation est *principale* si ce degré est 1, c.-à-d si λ est un isomorphisme. On dit alors que le couple $(\mathcal{A}, \lambda)$ est un *schéma abélien principalement polarisé*, abrégé en s.a.p.p.

Parmi les s.a.p.p de dimension relative $g \geq 1$ fixée, il n'existe aucun schéma *universel*, dont tout autre s.a.p.p s'obtient par un unique changement de base ; en effet, comme on l'a vu, les v.a.p.p admettent des automorphismes non triviaux. On dit que les s.a.p.p n'ont pas d'*espace des modules fin.* Cependant, il existe un schéma A_g qui est la meilleure approximation schématique de la base d'un objet universel, et dont les points sur k ne sont autres que les classes d'isomorphie des v.a.p.p.

Plus précisément, considérons le foncteur contravariant $\mathcal{A}_g$ de la catégorie des schémas vers celle des ensembles, qui à tout schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphie (dans un sens évident) des s.a.p.p de dimension relative g sur S. D'après [15, Thm.7.10], ce foncteur admet un *espace des modules grossier*, c.-à-d la donnée d'un schéma A_g et d'un morphisme de foncteurs $\varphi : \mathcal{A}_g \to h_{\mathrm{A}_g} := \mathrm{Mor}(-, \mathrm{A}_g)$ tels que :

(i) L'application induite $\mathcal{A}_g(\operatorname{Spec} k) \to h_{\mathrm{A}_g}(\operatorname{Spec} k) = \mathrm{A}_g(k)$ est bijective pour tout corps algébriquement clos k.

(ii) Pour tout schéma M et tout morphisme de foncteurs $\psi : \mathcal{A}_g \to h_M$, il existe un unique morphisme de schémas $f : \mathrm{A}_g \to M$ tel que $\psi = f \circ \varphi$.

(On note encore $f : h_{\mathrm{A}_g} \to h_M$ la composition par f).

La propriété universelle (ii) détermine le schéma A_g à un unique isomorphisme près. D'après [15, Thm.7.10] et [8, Thm.V.2.3], ce schéma est normal, plat et quasi-projectif sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, de dimension relative $g(g+1)/2$.

De même, étant donné un entier $g \geq 2$, on considère le foncteur contravariant $\mathcal{M}_g$ qui à tout schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphie des *courbes de genre g sur S*, c.-à-d des morphismes $\pi : \mathcal{C} \to S$ propres, lisses, et dont toute fibre géométrique est une courbe de genre g. Ce foncteur admet aussi un espace des modules grossier qu'on note M_g ; c'est un schéma normal, plat et quasi-projectif sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, de dimension relative $3g-3$.

À toute courbe $\pi : \mathcal{C} \to S$ de genre g on associe sa jacobienne relative $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathcal{C}) := \mathbf{Pic}^0(\mathcal{C}/S)$. C'est un schéma abélien sur S dont chaque fibre géométrique $\mathcal{J}_{\bar{s}}$ est la jacobienne $J(\mathcal{C}_{\bar{s}})$; de plus, $\mathcal{J}$ est projectif sur S, et les isomorphismes $\theta_{\bar{s}} : J(\mathcal{C}_{\bar{s}}) \to J(\mathcal{C}_{\bar{s}})^\vee$ se globalisent en un isomorphisme $\theta : \mathcal{J} \to \mathcal{J}^\vee$. Grâce à la propriété universelle de M_g, on obtient donc le *morphisme de Torelli* $\mathfrak{t} : \mathrm{M}_g \to \mathrm{A}_g$ qui est injectif sur les points géométriques (pour tout cela, voir [15]).

1.3. Variétés semi-abéliennes et théorème de réduction semi-stable

Une *variété semi-abélienne* est un groupe algébrique G, extension d'une variété abélienne A par un *tore* T (isomorphe à un produit fini $\mathbb{G}_m^r$ de groupes multiplicatifs). Un tel groupe G est connexe et commutatif, et T est son unique sous-tore maximal ; la dimension r de T est appelée le *rang* de G, et $A = G/T$ est sa *partie abélienne.*

Rappelons la classification des variétés semi-abéliennes. Soient $\Lambda := \operatorname{Hom}(T, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Z}^r$ le *groupe des caractères* de T, et $\pi : G \to A$ le quotient par T. On a une décomposition en espaces propres de T

$$\pi_*(\mathcal{O}_G) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda \tag{1}$$

où chaque L_λ est un fibré en droites sur A. De plus, L_0 est le fibré trivial, et la multiplication de $\pi_*(\mathcal{O}_G)$ définit des isomorphismes $L_\lambda \otimes L_\mu \simeq L_{\lambda+\mu}$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$. Enfin, chaque L_λ est algébriquement trivial, car l'action de G par multiplication préserve la décomposition (1). On obtient donc un homomorphisme

$$c : \Lambda \to A^\vee, \quad \lambda \mapsto [L_\lambda]$$

qui classifie l'extension $1 \to T \to G \to A \to 0$.

Exemple 1.2. — Soit C une courbe complète et *nodale* (c.-à-d dont les seules singularités sont des points doubles ordinaires). Le groupe $\operatorname{Pic}^0(C)$ (formé des classes d'isomorphie des fibrés en droites sur C dont la restriction à toute composante irréductible est de degré 0) est une variété semi-abélienne de dimension $g := h^1(\mathcal{O}_C)$, le *genre arithmétique* de C, et de rang $d-n+1$ où d désigne le nombre des points doubles de C, et n le nombre de ses composantes irréductibles. La partie abélienne de $\operatorname{Pic}^0(C)$ est la jacobienne de la normalisée $\widetilde{C}$.

En effet, soit $f : \widetilde{C} \to C$ la normalisation et soient $C_1, \ldots, C_n$ les composantes irréductibles de C ; alors $\widetilde{C}$ est la réunion disjointe des normalisées $\widetilde{C}_1, \ldots, \widetilde{C}_n$. On a une suite exacte de faisceaux sur C

$$0 \to \mathcal{O}_C \to f_*(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}) \to \mathcal{F} \to 0$$

où $\mathcal{F}$ est un faisceau gratte-ciel de fibre k en chaque point double, et 0 ailleurs. Puisque le morphisme f est fini, on en déduit une suite exacte longue

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_C) = k \to H^0(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}) = k^n \to H^0(\mathcal{F}) = k^d \to H^1(\mathcal{O}_C) \to H^1(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}) \to 0$$

d'où $g = d - n + 1 + \sum_{i=1}^n g(\widetilde{C}_i)$. De même, la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_C^* \to f_*(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}^*) \to \mathcal{F}^* \to 0$ conduit à une suite exacte longue

$$1 \to k^* \to (k^*)^n \to (k^*)^d \to H^1(\mathcal{O}_C^*) = \operatorname{Pic}(C) \to H^1(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}^*) = \operatorname{Pic}(\widetilde{C}) \to 0. \tag{2}$$

D'où une suite exacte

$$1 \to \mathbb{G}_m^{d-n+1} \to \operatorname{Pic}^0(C) \to \prod_{i=1}^n J(\widetilde{C}_i) \to 0$$

ce qui démontre nos assertions.

Le tore maximal de $\operatorname{Pic}^0(C)$ se lit aussi sur le *graphe dual* de C. Il s'agit du graphe non orienté, noté Γ ou $\Gamma(C)$, dont les sommets sont les composantes irréductibles de C ; deux sommets distincts C_i, C_j sont joints par autant d'arêtes que le nombre de leurs points (doubles) communs, et un sommet C_i porte autant de boucles que le nombre de points doubles de C_i. Le tore maximal de $\operatorname{Pic}^0(C)$ est canoniquement isomorphe au groupe de cohomologie $H^1(\Gamma, k^*)$; en effet, dans la suite exacte (2), l'application $(k^*)^n \to (k^*)^d$ s'identifie au cobord $C^0(\Gamma, k^*) \to C^1(\Gamma, k^*)$. Par suite, le groupe des caractères de ce tore est le groupe d'homologie $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, et le rang de $\operatorname{Pic}^0(C)$ est le nombre de cycles libres du graphe Γ.

Les variétés semi-abéliennes apparaissent aussi dans les dégénérescences à un paramètre des variétés abéliennes.

Introduisons quelques notations : soit R un anneau de valuation discrète, complet, de corps des fractions K, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k. Le schéma $S := \operatorname{Spec}(R)$ est appelé un *trait* de point générique $\eta := \operatorname{Spec}(K)$ et de point fermé $s := \operatorname{Spec}(k)$. Tout schéma $\mathcal{X}$ sur S définit ainsi une fibre générique $\mathcal{X}_\eta := \mathcal{X} \times_S \eta$ et une fibre spéciale $\mathcal{X}_s := \mathcal{X} \times_S s$. On choisit un générateur z de $\mathfrak{m}$, qu'on peut voir comme une coordonnée locale sur le germe de courbe (S, s). Pour tout entier n strictement positif, le quotient $R' := R[z']/(z'^n - z)$ est encore un anneau de valuation discrète complet, d'idéal maximal $\mathfrak{m}' = z'R'$ et de corps résiduel k ; c'est la clôture intégrale de R dans le corps $K' := K[z']/(z'^n - z)$. On dit que $S' := \operatorname{Spec} R'$ est obtenu à partir de S par extension finie ramifiée.

On peut maintenant énoncer le théorème de réduction semi-stable [8, Sec.I.2].

Théorème 1.3. — *Soit $\mathcal{A}_\eta$ un schéma abélien sur η (autrement dit, une variété abélienne sur K). Alors, quitte à faire un changement de base fini ramifié $S' \to S$, on peut étendre $\mathcal{A}_\eta$ en un schéma en groupes lisse $\pi : \mathcal{A} \to S$ dont la fibre spéciale $\mathcal{A}_s$ est une variété semi-abélienne sur k ; une telle extension est unique à isomorphisme près.*

L'extension $\pi : \mathcal{A} \to S$ est un *schéma semi-abélien*, c.-à-d un schéma en groupes séparé, lisse, et dont toutes les fibres géométriques sont des variétés semi-abéliennes (dont le rang varie en général : un schéma semi-abélien n'est pas nécessairement extension d'un schéma abélien par un tore). D'après [8, p.35], la donnée d'une polarisation λ_η de $\mathcal{A}_\eta$ induit une polarisation λ_s de la partie abélienne A_s de la fibre spéciale, et si λ_η est principale, alors λ_s l'est aussi.

Le théorème de réduction semi-stable admet un analogue pour les courbes de genre g : cette fois, la fibre spéciale est une *courbe stable de genre* g, c.-à-d une courbe complète, nodale, de genre arithmétique g, et dont le groupe des automorphismes est fini.

Plus généralement, une *courbe stable de genre* g sur un schéma S est un morphisme propre et plat $\pi : \mathcal{C} \to S$ dont toutes les fibres géométriques sont des courbes stables de genre g ; le théorème de réduction semi-stable reste valable [23]. Les courbes stables de genre g admettent un espace des modules grossier $\overline{\mathrm{M}}_g$ sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, qui vérifie les critères valuatifs de séparation et de propreté d'après ce même théorème. En fait, $\overline{\mathrm{M}}_g$ est projectif sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ (voir [15]) et les courbes stables de genre g sont les objets d'un *champ de Deligne–Mumford propre* qui compactifie le champ des courbes de genre g (pour ces notions, voir [12]).

1.4. Compactifications des espaces des modules des v.a.p.p.

D'après [8, Thm.V.2.3], A_g admet une compactification $\overline{\mathrm{A}}_g^{\min}$ dite *minimale* ; c'est un schéma normal, plat et projectif sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, qui contient A_g comme ouvert dense et dont le bord $\overline{\mathrm{A}}_g^{\min} \setminus \mathrm{A}_g$ est réunion disjointe de g sous-schémas localement fermés, isomorphes respectivement à $\mathrm{A}_{g-1}, \ldots, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_0$. De plus, l'adhérence de chaque A_a dans $\overline{\mathrm{A}}_g^{\min}$ est isomorphe à la compactification minimale $\overline{\mathrm{A}}_a^{\min}$.

Soit $\pi : \mathcal{A} \to S$ une dégénérescence à un paramètre comme dans le théorème 1.3. D'après la définition de A_g et le critère valuatif de propreté, il existe un unique morphisme $\varphi : S \to \overline{\mathrm{A}}_g^{\min}$ tel que $\varphi(\eta)$ est la classe d'isomorphie de (A_η, λ_η) (vue comme un point de A_g). Et d'après [8, Thm.V.2.3], $\varphi(s)$ est la classe de (A_s, λ_s), un point géométrique de A_a où a est la dimension de la partie abélienne A_s de la fibre spéciale. Ainsi, la compactification minimale ne rend compte que très partiellement des dégénérescences.

On connaît une famille d'autres compactifications de A_g, les *compactifications toroïdales* [6, 8] qui dépendent de données combinatoires qu'on va préciser. Soit V un espace vectoriel réel de dimension g muni d'un réseau Λ. L'espace vectoriel réel $\mathcal{Q}$ des formes quadratiques sur V est alors muni du réseau Γ des formes *entières*, c.-à-d dont la forme bilinéaire symétrique associée est à valeurs entières sur $\Lambda \times \Lambda$. (On convient que la forme bilinéaire B associée à une forme quadratique Q est donnée par

$B(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$. On note $\mathcal{Q}^+$ le cône convexe de $\mathcal{Q}$ engendré par les formes quadratiques entières et positives ; les points de $\mathcal{Q}^+$ ne sont autres que les formes quadratiques positives sur V à noyau rationnel. Le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(\Lambda) \simeq \mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$ opère dans $\mathcal{Q}$ par changement de variables ; cette opération préserve Γ et $\mathcal{Q}^+$.

Une *subdivision admissible* de $\mathcal{Q}^+$ est une famille Σ de parties de $\mathcal{Q}^+$ telles que :

(i) Chaque $\sigma \in \Sigma$ est un cône convexe polyédral rationnel (pour le réseau Γ), et ces cônes recouvrent $\mathcal{Q}^+$.

(ii) Toute face d'un cône de Σ appartient à Σ.

(iii) L'intersection de deux cônes de Σ est une face commune de ces cônes.

(iv) Σ est invariant par l'action de $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ et ne contient qu'un nombre fini d'orbites pour cette action.

Une subdivision admissible Σ est dite *lisse* lorsque tous ses cônes maximaux sont engendrés par des bases de Γ ; elle est dite *projective* s'il existe une fonction continue et convexe $h : \mathcal{Q}^+ \to \mathbb{R}$ telle que :

(a) $h(Q) > 0$ pour toute forme quadratique Q définie positive.

(b) La restriction de h à chaque cône maximal de Σ s'étend en une (unique) forme linéaire sur $\mathcal{Q}$, à valeurs entières sur Γ.

(c) Les formes linéaires associées à deux cônes maximaux distincts sont distinctes.

Il existe des subdivisions admissibles, et chacune d'elles peut être raffinée en une subdivision admissible, projective et lisse. De plus, deux subdivisions admissibles ont toujours un raffinement commun.

À toute subdivision admissible Σ on associe une compactification $\overline{\mathrm{A}}^{\Sigma}_{g,\mathbb{C}}$ de l'espace analytique complexe $\mathrm{A}_{g,\mathbb{C}}$. En général, $\overline{\mathrm{A}}^{\Sigma}_{g,\mathbb{C}}$ n'est pas un schéma sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$, mais un espace analytique complexe compact qui admet une stratification indexée par les orbites de $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ dans Σ. La strate associée au cône nul n'est autre que $\mathrm{A}_{g,\mathbb{C}}$, et l'identité de $\mathrm{A}_{g,\mathbb{C}}$ s'étend en un morphisme $\overline{\mathrm{A}}^{\Sigma}_{g,\mathbb{C}} \to \overline{\mathrm{A}}^{\min}_{g,\mathbb{C}}$. Pour tout raffinement Σ' de Σ, on a aussi un morphisme $\overline{\mathrm{A}}^{\Sigma'}_{g,\mathbb{C}} \to \overline{\mathrm{A}}^{\Sigma}_{g,\mathbb{C}}$ qui étend l'identité de $\mathrm{A}_{g,\mathbb{C}}$.

Lorsque Σ est projective, $\overline{\mathrm{A}}^{\Sigma}_{g,\mathbb{C}}$ s'obtient à partir de $\overline{\mathrm{A}}^{\min}_{g,\mathbb{C}}$ en éclatant un certain faisceau d'idéaux ("critère de Tai", voir [6, Sec.IV.2]) ; en particulier, $\overline{\mathrm{A}}^{\Sigma}_{g,\mathbb{C}}$ est une variété projective. Le critère de Tai reste valable sur les entiers grâce aux résultats de [8] ; on obtient ainsi un schéma $\overline{\mathrm{A}}^{\Sigma}_{g}$, projectif et plat sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, qui est un modèle entier de $\overline{\mathrm{A}}^{\Sigma}_{g,\mathbb{C}}$. Un tel modèle entier existe aussi lorsque Σ est lisse [8, Thm.IV.5.7] ; c'est un *espace algébrique* propre et plat sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$. En fait, $\overline{\mathrm{A}}^{\Sigma}_{g}$ est l'espace des modules grossiers d'un champ de Deligne–Mumford propre qui compactifie le champ des s.a.p.p.

Parmi les subdivisions admissibles, on distingue la *deuxième subdivision de Voronoi* dont l'intérieur relatif de chaque cône est l'ensemble des formes quadratiques positives qui donnent une décomposition de Delaunay fixée de V (la définition de la décomposition de Delaunay est rappelée en 2.1). Cette subdivision, notée Vor, est toujours projective [3, Cor.5.12.8], mais elle n'est lisse qu'en dimension $g \leq 4$ (voir [5, Sec.1.14] et ses références). De plus, le morphisme de Torelli $\mathfrak{t} : \mathrm{M}_g \to \mathrm{A}_g$ se prolonge en un morphisme

$$\bar{\mathfrak{t}}_{\mathbb{C}} : \overline{\mathrm{M}}_{g,\mathbb{C}} \to \overline{\mathrm{A}}_{g,\mathbb{C}}^{\mathrm{Vor}}$$

qui est un isomorphisme lorsque $g = 2$, mais qui n'est pas injectif dès que $g \geq 3$ (voir [19] et ses références).

2. CONSTRUCTION DE DÉGÉNÉRESCENCES MAXIMALES DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES PRINCIPALEMENT POLARISÉES

Les dégénérescences à un paramètre des variétés abéliennes $\pi : \mathcal{A} \to S$ obtenues grâce au théorème de réduction semi-stable (1.3) ont l'inconvénient de ne pas être propres en général : il existe de telles dégénérescences, dites *maximales*, dont la fibre spéciale est un tore. Mais on peut obtenir des dégénérescences propres $\pi : \mathcal{X} \to S$ de la fibre générique $\mathcal{A}_\eta$ grâce à une construction de Mumford [14], reprise et développée par Faltings et Chai [8], puis par Alexeev et Nakamura [5]. Dans cette partie, on expose l'approche de [5] dans le cas particulier des dégénérescences maximales des v.a.p.p. (Le cas général n'en est pas très éloigné, mais nécessite beaucoup plus de notations).

L'idée, due à Tate, est de voir $\mathcal{A}_\eta$ comme le quotient d'un tore $(K^*)^g$ par un sous-groupe $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^g$ de périodes. On construit des compactifications partielles $\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathcal{X}} \to S$ de $(K^*)^g = \widetilde{\mathcal{X}}_\eta$ qui sont munies d'une action propre de Λ prolongeant son action dans $(K^*)^g$ par multiplication, et dont la fibre spéciale $\widetilde{\mathcal{X}}_s$ est la réunion des translatés par Λ d'une variété torique sous le tore $(k^*)^g$. Le quotient $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}}/\Lambda$ est alors une dégénérescence de $\mathcal{A}_\eta$, propre sur S et dont la fibre spéciale admet une action de $(k^*)^g$ avec un nombre fini d'orbites.

2.1. Décompositions de Delaunay et de Voronoi

On commence par présenter des objets de géométrie des nombres qui apparaîtront comme données combinatoires des dégénérescences.

Soit Λ un réseau d'un espace vectoriel réel V de dimension g. Soit Q une forme quadratique définie positive sur V. Étant donné $v \in V$, un point $\lambda \in \Lambda$ est dit *à distance minimale de* v si $Q(v - \lambda) = \min_{\mu \in \Lambda} Q(v - \mu)$. Il existe de tels points, et ils sont en nombre fini ; leur enveloppe convexe dans V est la *cellule de Delaunay* de v, notée $D(v)$. On a $D(v + \lambda) = D(v) + \lambda$ pour tous $v \in V$ et $\lambda \in \Lambda$.

Chaque cellule est un polytope convexe dont l'intersection avec Λ est formée de ses sommets ; les cellules minimales ne sont autres que les points de Λ. De plus, chaque face d'une cellule est une cellule, et l'intersection de deux cellules est une face de chacune d'elles. Enfin, les cellules recouvrent V et ne forment qu'un nombre fini d'orbites pour l'action de Λ par translation. On dit que les cellules de Delaunay forment un *pavage périodique* de V par des polytopes convexes entiers, la *décomposition de Delaunay* Del_Q.

Pour une forme quadratique générale, la décomposition est une triangulation, c.-à-d les cellules sont des simplexes.

Pour toute cellule de Delaunay σ, l'ensemble des $v \in V$ tels que $D(v) = \sigma$ est l'intérieur relatif d'un polytope convexe noté $\sigma^\vee$ ou encore $V(\sigma)$, et appelé la *cellule de Voronoi duale de* σ. Lorsque σ est maximale, $\sigma^\vee$ est formée d'un point unique : le centre de la sphère circonscrite aux sommets de σ, noté $v(\sigma)$ et appelé le *centre* de σ. En notant B la forme bilinéaire symétrique associée à Q (de sorte que $Q(v) = \frac{1}{2}B(v,v)$), le centre de σ est l'unique solution du système d'équations linéaires

$$B(v(\sigma) - \lambda, \mu - \lambda) = Q(\mu - \lambda) \tag{3}$$

où λ est un sommet fixé de σ, et μ décrit les autres sommets.

Les cellules de Voronoi forment aussi un pavage périodique de V par des polytopes convexes (en général non entiers) ; c'est la *décomposition de Voronoi* Vor_Q. Les cellules de Voronoi sont en bijection décroissante avec celles de Delaunay via $\sigma \mapsto \sigma^\vee$; de plus, $\dim(\sigma) = \mathrm{codim}(\sigma^\vee)$.

Exemple 2.1. — Lorsque $g = 1$, la décomposition de Delaunay de $V \simeq \mathbb{R}$ est formée des intervalles entiers $[n, n+1]$, et celle de Voronoi, des intervalles $[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$.

Lorsque $g = 2$, on obtient deux décompositions de Delaunay de $V \simeq \mathbb{R}^2$, associées aux réseaux carré et hexagonal. Dans le premier cas, les cellules de Delaunay maximales sont le carré unité et ses translatés par $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$; les cellules de Voronoi maximales sont les translatés de ces carrés par le vecteur $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Dans le deuxième cas, les cellules de Delaunay maximales sont des triangles équilatéraux ; elles forment deux orbites sous Λ. Les cellules de Voronoi maximales sont des hexagones réguliers.

Considérons maintenant l'application quadratique

$$F : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto Q(v) + L(v) \tag{4}$$

où L est une forme linéaire sur V. Soit P l'enveloppe convexe dans $V \times \mathbb{R}$ des points $(\lambda, F(\lambda))$ où $\lambda \in \Lambda$. On obtient alors facilement :

Lemme 2.2. — *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, le cône tangent à P en le point $(\lambda, F(\lambda))$ (c.-à-d le cône convexe de $V \times \mathbb{R}$ engendré par $-(\lambda, F(\lambda)) + P$) est l'ensemble des $(v,t) \in V \times \mathbb{R}$ tels que*

$$t \geq B(v(\sigma), v) + L(v) = dF_{v(\sigma)}(v)$$

où σ parcourt les cellules de Delaunay maximales contenant λ. De plus, l'intersection de P avec l'hyperplan d'équation $t - F(\lambda) = dF_{v(\sigma)}(v - \lambda)$ est l'enveloppe convexe des $(\mu, F(\mu))$ où μ décrit les sommets de σ.

Il en résulte que chaque $(\lambda, F(\lambda))$ est un sommet de P ; plus généralement, le bord de P admet un pavage par des polytopes convexes $P(\sigma)$ dont les projections sur V ne sont autres que les cellules de Delaunay σ. De plus, l'*éventail normal de P* (formé des cônes duaux aux cônes tangents aux sommets, ainsi que des faces de ces cônes duaux) est formé de l'origine et des cônes engendrés par les images des cellules de Voronoi via l'application affine injective

$$(-dF, 1) : V \to V \times \mathbb{R}, \quad v \mapsto (-dF_v, 1).$$

Pour tous $\lambda \in \Lambda$ et $v \in V$, on pose

$$h(\lambda; v) := \max_{\sigma \ni \lambda} dF_{v(\sigma)}(v)$$

où σ décrit les cellules de Delaunay maximales qui contiennent λ. La fonction $h(\lambda; -)$ est linéaire sur chaque cône engendré par $-\lambda + \sigma$, ou encore par les vecteurs $\mu - \lambda$ où μ décrit les sommets de σ. Ces vecteurs sont appelés les *vecteurs de Delaunay* de la cellule maximale σ en son sommet λ.

Comme les vecteurs de Delaunay appartiennent à Λ et engendrent l'espace vectoriel V, il existe un entier positif n tel que le réseau qu'ils engendrent contient $n\Lambda$. Le plus petit tel entier n est appelé l'*indice de nilpotence* de σ en λ. Quand σ et λ varient, les indices de nilpotence sont en nombre fini, et leur ppcm est appelé l'indice de nilpotence de la décomposition de Delaunay. Cet indice vaut toujours 1 en dimension $g \leq 4$, car les vecteurs de Delaunay engendrent alors Λ. Mais ceci ne s'étend pas aux dimensions $g \geq 5$; voir [5, Sec.1.14,1.15].

2.2. Construction de compactifications partielles

On conserve les notations de 2.1 et on suppose que F est à valeurs entières sur Λ, si bien que Q et L sont rationnelles. Les polytopes $P(\sigma)$ sont alors entiers, et les centres $v(\sigma)$ sont rationnels d'après (3) ; par suite, l'éventail normal à P est rationnel. On va associer à cet éventail une compactification partielle du tore $\mathrm{Hom}(\Lambda, K^*) \simeq (K^*)^g$, avec les notations de 1.3.

Soit $R[\Lambda]$ l'algèbre du groupe Λ sur R, c.-à-d le R-module libre sur les e^λ, $\lambda \in \Lambda$, muni du produit défini par $e^\lambda \, e^\mu = e^{\lambda+\mu}$. Dans la R-algèbre graduée

$$R[\Lambda][\theta] = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda, \, n \in \mathbb{N}} R \, e^\lambda \, \theta^n$$

où θ est une indéterminée de degré 1, on considère la sous-R-algèbre $\mathcal{S}$ engendrée par les monômes

$$\zeta_\lambda := z^{F(\lambda)} \, e^\lambda \, \theta \quad (\lambda \in \Lambda)$$

ainsi que le sous-R-module $\mathcal{R}$ engendré par les monômes $z^m \, e^\lambda \, \theta^n$ tels que $(\lambda, m) \in nP$. Alors $\mathcal{R}$ est une sous-R-algèbre graduée de $R[\Lambda][\theta]$, entière sur sa sous-algèbre graduée $\mathcal{S}$. De plus, $\mathcal{S}$ est engendrée par ses éléments de degré 1, et $\mathcal{R}_0 = \mathcal{S}_0 = R$. On obtient donc un schéma

$$\widetilde{\mathcal{X}} := \mathrm{Proj}(\mathcal{R})$$

sur S, muni d'un fibré en droites

$$\widetilde{\mathcal{L}} := \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{X}}}(1).$$

Soit enfin

$$T := \operatorname{Spec} R[\Lambda]$$

le tore scindé sur S dont le groupe des caractères est Λ ; ce tore opère dans le schéma $\widetilde{\mathcal{X}}$, et le fibré en $\widetilde{\mathcal{L}}$ est T-*linéarisé* (c.-à-d l'action de T dans $\widetilde{\mathcal{X}}$ se relève en une action dans l'espace total de $\widetilde{\mathcal{L}}$, linéaire dans les fibres).

Des propriétés des décompositions de Delaunay et de Voronoi énoncées ci-dessus, on déduit facilement :

Proposition 2.3. — *(i) Le schéma $\widetilde{\mathcal{X}}$ est recouvert par les ouverts affines $\widetilde{\mathcal{X}}_\lambda :=$ $\operatorname{Spec} \mathcal{R}_\lambda$, où $\lambda \in \Lambda$ et $\mathcal{R}_\lambda := \widetilde{\mathcal{R}}[\frac{1}{\zeta_\lambda}]_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathcal{R}}_n \zeta_\lambda^{-n}$ est la sous-R-algèbre de $R[\Lambda]$ engendrée par les monômes $z^m\, e^\mu$ tels que $m \geq h(\lambda;\mu)$. Les monômes*

$$\zeta_{\lambda;\mu} = z^{\lceil h(\lambda;\mu)\rceil}\, e^\mu$$

(où $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier $\leq x$) forment une base du R-module $\mathcal{R}_\lambda$.

(ii) Toutes les R-algèbres $\mathcal{R}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, sont isomorphes et de type fini sur S. En particulier, $\widetilde{\mathcal{X}}$ est plat et localement de type fini sur S.

(iii) Le fibré en droites $\widetilde{\mathcal{L}}$ est ample sur $\widetilde{\mathcal{X}}$ (c.-à-d les ouverts associés aux sections des puissances positives $\widetilde{\mathcal{L}}^n$ forment une base de la topologie de $\widetilde{\mathcal{X}}$).

(iv) La fibre générique $\widetilde{\mathcal{X}}_\eta$ n'est autre que le tore $\operatorname{Hom}(\Lambda, K^*) = T_\eta$.

(v) La fibre spéciale $\widetilde{\mathcal{X}}_s$ est un schéma localement de type fini sur k, muni d'une action du tore $T_s =$ $\operatorname{Hom}(\Lambda, k^*)$ dont les orbites sont en bijection avec les cellules de Delaunay. Cette bijection $\sigma \mapsto \mathcal{O}_\sigma$ vérifie $\dim \mathcal{O}_\sigma = \dim \sigma$ et $\overline{\mathcal{O}_\sigma} \cap \overline{\mathcal{O}_\tau} = \overline{\mathcal{O}_{\sigma\cap\tau}}$. En particulier, $\widetilde{\mathcal{X}}_s$ est connexe.

(vi) Les composantes irréductibles de $\widetilde{\mathcal{X}}_s$ sont les adhérences $\overline{\mathcal{O}_\sigma}$ où σ décrit les cellules de Delaunay maximales. La multiplicité du schéma $\widetilde{\mathcal{X}}_s$ le long de $\overline{\mathcal{O}_\sigma}$ est le dénominateur de $dF_{v(\sigma)}$ (vu comme un point de l'espace vectoriel dual V^*, rationnel par rapport au réseau dual Λ^*).

En particulier, $\widetilde{\mathcal{X}}_s$ est génériquement réduite lorsque chaque $dF_{v(\sigma)}$ est entier, autrement dit, lorsque chaque $B(v(\sigma), -)$ est à valeurs entières sur Λ. D'après [5, Lem.3.12], cette condition est vérifiée si F est à valeurs dans $n\mathbb{Z}$ où n désigne l'indice de nilpotence de la décomposition de Delaunay. Le changement de base $S' \to S$, $z = z'^n$ permet de remplacer F par nF ; quitte à effectuer ce changement de base, *on suppose désormais que tous les $dF_{v(\sigma)}$ sont entiers.* Alors chaque fonction $h(\lambda; -)$ est à valeurs entières sur Λ. De plus, $\widetilde{\mathcal{X}}_s$ est recouvert par les ouverts affines $\widetilde{\mathcal{X}}_{\lambda,s} := \operatorname{Spec} \bar{\mathcal{R}}_\lambda$ où le k-espace vectoriel $\bar{\mathcal{R}}_\lambda := \mathcal{R}_\lambda / \mathfrak{m}\mathcal{R}_\lambda$ a une base formée des monômes $\bar{\zeta}_{\lambda;\mu}$ (les images des $\zeta_{\lambda;\mu} = z^{h(\lambda;\mu)}\, e^\mu$). La multiplication dans $\bar{\mathcal{R}}_\lambda$ est donnée par

$$\bar{\zeta}_{\lambda;\mu_1} \cdots \bar{\zeta}_{\lambda;\mu_n} = \bar{\zeta}_{\lambda;\mu_1+\cdots+\mu_n}$$

si $\mu_1, \ldots, \mu_n$ appartiennent au cône tangent en 0 à une même cellule de Delaunay $\sigma \ni 0$; sinon, le produit est nul.

Il en résulte aussitôt que $\bar{\mathcal{R}}_\lambda$, et donc $\widetilde{\mathcal{X}}_s$, est réduite. En fait, on a un résultat un peu plus précis [3, Sec.2.3] :

PROPOSITION 2.4. — *La fibre spéciale $\widetilde{\mathcal{X}}_s$ est semi-normale.*

Un schéma réduit X est dit *semi-normal* si pour tout schéma réduit Y, tout morphisme fini et bijectif $\pi : Y \to X$ qui induit des isomorphismes sur les corps résiduels $\kappa(\pi(y)) \subseteq \kappa(y)$ est un isomorphisme. Par exemple, les courbes nodales sont semi-normales, mais non la courbe plane cuspidale d'équation homogène $y^2z = x^3$.

2.3. Action du réseau et passage au quotient

On va définir une action de Λ dans le schéma $\widetilde{\mathcal{X}}$, compatible à l'action de T. Pour cela, on se donne un homomorphisme de groupes $\Lambda \to T_\eta = \mathrm{Hom}(\Lambda, K^*)$, ou encore une application

$$b : \Lambda \times \Lambda \to K^*$$

telle que $b(\lambda+\mu, \nu) = b(\lambda, \nu)\, b(\mu, \nu)$ et $b(\lambda, \mu+\nu) = b(\lambda, \mu)\, b(\lambda, \nu)$ pour tous $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$; on dit que b est *bi-multiplicative*. Ceci définit une action de Λ dans la K-algèbre $K[\Lambda]$ via

$$\lambda \cdot e^\mu = b(\lambda, \mu)\, e^\mu.$$

Pour l'étendre en une action de Λ dans la K-algèbre graduée $K[\Lambda][\theta]$, posons

$$\lambda \cdot \theta := f(\lambda)\, e^\lambda\, \theta$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$, où $f(\lambda) \in K^*$. Ceci définit bien une action pourvu que l'application $f : \Lambda \to K^*$ soit *quadratique multiplicative* et que b soit l'application bi-multiplicative associée, c.-à-d

$$f(\lambda + \mu) = f(\lambda)\, f(\mu)\, b(\lambda, \mu) \quad \text{pour tous } \lambda, \mu \in \Lambda.$$

En particulier, b est alors symétrique. Pour que cette action laisse stables les sous-algèbres $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$, il faut et il suffit que

$$f(\lambda) = u(\lambda)\, z^{F(\lambda)} \quad \text{où} \quad u(\lambda) \in R^*.$$

Alors $b(\lambda, \mu) = u(\lambda + \mu)\, u(\lambda)^{-1}\, u(\mu)^{-1}\, z^{B(\lambda,\mu)}$. Le fait que la forme quadratique Q est définie positive équivaut donc à

$$b(\lambda, \lambda) \in \mathfrak{m} \quad \text{pour tout } \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}. \tag{5}$$

On obtient ainsi une action de Λ dans $\widetilde{\mathcal{X}}$ qui commute à l'action de T et qui se relève en une action dans $\widetilde{\mathcal{L}}$. Pour cette dernière action, on a la relation de commutation $t \circ \lambda = \lambda(t)\, \lambda \circ t$. En d'autres termes, l'action de $T \times \Lambda$ sur $\widetilde{\mathcal{X}}$ se relève en une action du groupe de Heisenberg $(\mathbb{G}_{m,S} \times_S T) \times \Lambda$ sur $\widetilde{\mathcal{L}}$. Chaque $\lambda \in \Lambda$ envoie $\mathcal{R}_\mu$ sur $\mathcal{R}_{\lambda+\mu}$, et donc l'ouvert $\widetilde{\mathcal{X}}_\mu$ sur $\widetilde{\mathcal{X}}_{\mu-\lambda}$. De plus, l'action induite de λ dans $\widetilde{\mathcal{X}}_s$ envoie chaque orbite $\mathcal{O}_\sigma$ sur $\mathcal{O}_{-\lambda+\sigma}$. On en déduit :

Proposition 2.5. — *(i) Toute orbite de* Λ *dans* $\widetilde{\mathcal{X}}_s$ *rencontre la réunion des* $\mathcal{O}_\sigma$ *où* σ *décrit les cellules de Delaunay maximales qui contiennent* 0*.*

(ii) Le groupe Λ *opère proprement dans* $\widetilde{\mathcal{X}}_s$*.*

(iii) Le quotient $\mathcal{X}_s := \widetilde{\mathcal{X}}_s/\Lambda$ *est un schéma projectif sur* k*, et le fibré en droites* $\widetilde{\mathcal{L}}_s$ *descend en un fibré en droites ample* $\mathcal{L}_s$ *sur* $\mathcal{X}_s$*.*

En fait, d'après les propositions 2.3 et 2.4, $\mathcal{X}_s$ est une variété semi-normale dans laquelle T_s opère avec un nombre fini d'orbites, indexées par les orbites de Λ dans les cellules de Delaunay. En particulier, $\mathcal{X}_s$ contient un unique point fixe de T_s.

Plus généralement, on considère pour tout entier $n \geq 1$ le point épaissi

$$S_n := \operatorname{Spec} R/\mathfrak{m}^n$$

et la fibre spéciale épaissie

$$\widetilde{\mathcal{X}}_n := \widetilde{\mathcal{X}} \times_S S_n$$

munie du fibré en droites

$$\widetilde{\mathcal{L}}_n := \widetilde{\mathcal{L}} \times_S S_n.$$

Les assertions (ii) et (iii) ci-dessus s'étendent à ces fibres [14, Thm.3.10] ; on obtient ainsi un système inductif $(\mathcal{X}_n, \mathcal{L}_n)$ qui définit un schéma formel $\mathfrak{X}$ sur le spectre formel de R, muni d'un fibré en droites ample $\mathfrak{L}$. Le couple $(\mathfrak{X}, \mathfrak{L})$ est donc algébrisable en un unique schéma $\mathcal{X}$, propre et plat sur S, muni d'un fibré en droites ample $\mathcal{L}$. De plus, $\mathcal{X}_\eta$ est une variété abélienne d'après [14, Cor.4.9].

On va construire une section globale non nulle de $\mathcal{L}$. Pour cela, on va algébriser la série formelle

$$\widetilde{\theta} := \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda \cdot \theta$$

vue comme une section globale de $\mathfrak{L}$. Posons

$$\xi_\lambda := \lambda \cdot \theta = f(\lambda)\, e^\lambda \theta \quad \text{et} \quad \xi_{\lambda;\mu} := \frac{\xi_{\lambda+\mu}}{\xi_\lambda} \quad (\lambda, \mu \in \Lambda)$$

si bien que $\xi_\lambda \in R^* \zeta_\lambda$ et $\xi_{\lambda;\mu} \in \mathcal{R}_\lambda$ pour tout $\mu \in \Lambda$. On vérifie alors :

Lemme 2.6. — *(i) Pour tout entier* $n \geq 1$*, les* $\mu \in \Lambda$ *tels que* $\xi_{\lambda;\mu} \notin \mathfrak{m}^n \mathcal{R}_\lambda$ *sont en nombre fini.*

(ii) $\xi_{\lambda;\mu} \notin \mathfrak{m}\mathcal{R}_\lambda$ *si et seulement si* μ *est un vecteur de Delaunay en* 0 *(autrement dit,* μ *appartient à une cellule de Delaunay contenant* 0*).*

Le quotient

$$\theta_\lambda := \frac{\widetilde{\theta}}{\xi_\lambda} = \sum_{\mu \in \Lambda} \xi_{\lambda;\mu}$$

donne donc une somme finie dans chaque $\mathcal{R}_\lambda \otimes_R R/\mathfrak{m}^n$, et la famille des θ_λ définit une section Λ-invariante de $\widetilde{\mathcal{L}}_n$ qui s'algébrise comme précédemment en la section cherchée, notée θ. De plus, θ_s ne s'annule identiquement sur aucune orbite de T_s, car l'image de

θ_λ dans $\bar{\mathcal{R}}_\lambda = \mathcal{R}_\lambda/\mathfrak{m}\mathcal{R}_\lambda$ ne s'annule pas en l'unique point fixe de T_s dans $\widetilde{\mathcal{X}}_{\lambda,s}$. Enfin, θ engendre $\pi_*(\mathcal{L})$; il en résulte que $\mathcal{L}_\eta$ définit une polarisation principale de $\mathcal{X}_\eta$.

En conclusion, on a obtenu :

Théorème 2.7. — *À la donnée d'une application quadratique multiplicative $f : \Lambda \to K^*$ telle que l'application bi-multiplicative associée vérifie (5), on associe un schéma $\mathcal{X}$ propre et plat sur S, de dimension relative g, et un diviseur de Cartier effectif et ample $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{X}$ tels que :*

(i) La fibre générique $\mathcal{X}_\eta$ est une variété abélienne dont $\mathcal{D}_\eta$ définit une polarisation principale.

(ii) La fibre spéciale $\mathcal{X}_s$ est une variété projective et semi-normale dans laquelle le tore $T_s = \mathrm{Hom}(\Lambda, k^*)$ opère avec un nombre fini d'orbites et un unique point fixe. Le diviseur $\mathcal{D}_s$ ne contient aucune de ces orbites.

Mais on notera que $\mathcal{X}$ n'est pas toujours une compactification de la dégénérescence semi-stable de $\mathcal{X}_\eta$ donnée par le théorème 1.3. En effet, l'adhérence dans $\mathcal{X}$ de la section nulle de $\mathcal{X}_\eta$ rencontre la fibre spéciale en un point dont l'orbite n'est pas nécessairement de dimension maximale [5, Sec.3.25]. Il faut plutôt voir $\mathcal{X}$ comme une compactification d'un *torseur* (ou espace principal homogène) sous une variété abélienne ; ce point de vue sera développé dans la troisième partie.

Exemple 2.8. — Comme dans l'exemple 2.1, considérons les cas où $g \leq 2$.

Lorsque $\Lambda = \mathbb{Z}$, la fibre spéciale $\widetilde{\mathcal{X}}_s$ est une chaîne infinie de courbes C_n, $n \in \mathbb{Z}$, où chaque C_n est isomorphe à la droite projective $\mathbb{P}^1$, et le point ∞ de C_n est identifié au point 0 de C_{n+1}. Ainsi, C_n rencontre transversalement C_{n-1} et C_{n+1}, et ne rencontre aucun autre C_m. Le groupe $\Lambda \simeq \mathbb{Z}$ opère dans $\widetilde{\mathcal{X}}_s$ par translations : son générateur 1 envoie isomorphiquement chaque $(C_n, 0, \infty)$ sur $(C_{n+1}, 0, \infty)$. Le quotient $\mathcal{X}_s = \widetilde{\mathcal{X}}_s/\Lambda$ est une courbe nodale obtenue à partir de $\mathbb{P}^1$ en identifiant les points 0 et ∞, et le diviseur $\mathcal{D}_s$ est un point distinct du point double. Ainsi, $(\pi : \mathcal{X} \to S, \mathcal{D})$ réalise la dégénérescence d'une courbe de genre 1 munie d'un point, en une courbe rationnelle nodale munie d'un point lisse.

Lorsque $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$ est le réseau carré, $\mathcal{X}_s$ s'obtient à partir de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en identifiant chaque point $(x, 0)$ avec $(t\,x, \infty)$, et chaque point $(0, y)$ avec $(\infty, t\,y)$ où t est un paramètre non nul. Le diviseur $\mathcal{D}_s$ est l'image d'une section du fibré $\mathcal{O}(1,1)$; c'est une courbe rationnelle avec deux points doubles, ou la réunion de deux courbes rationnelles avec un point double chacune, qui se coupent transversalement en un point.

Enfin, lorsque $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$ est le réseau hexagonal, $\mathcal{X}_s$ s'obtient à partir de la réunion disjointe de deux plans projectifs (associés aux deux types de triangles) en identifiant deux à deux les droites de coordonnées. Le diviseur $\mathcal{D}_s$ est l'image de la réunion disjointe de deux droites en position générale ; il est formé de deux courbes rationnelles lisses qui se coupent transversalement en trois points.

3. COMPACTIFICATION MODULAIRE DE A_g ET DU MORPHISME DE TORELLI

Dans cette partie, on présente une partie des résultats de [2, 3, 4]. On commence par définir les couples quasi-abéliens stables, dont on donne plusieurs classes d'exemples. On décrit la structure de ces couples et on leur associe un invariant de nature combinatoire : le type, sous une hypothèse supplémentaire de linéarisation d'un fibré en droites. Puis on explique comment lever cette hypothèse et définir le type en toute généralité. Enfin, on énonce les résultats principaux concernant la compactification modulaire $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$ qui paramètre les couples quasi-abéliens stables de type dit périodique de degré 1, et le morphisme de Torelli compactifié qui à chaque courbe stable associe un couple quasi-abélien stable de ce type.

3.1. Variétés et couples quasi-abéliens stables

DÉFINITION 3.1. — *Une* variété quasi-abélienne stable *est une variété X munie d'une action d'une variété semi-abélienne G telle que :*

(i) X ne contient qu'un nombre fini d'orbites de G.

(ii) Pour tout point $x \in X$, le stabilisateur G_x est un tore (en particulier, le schéma G_x est réduit).

(iii) X est équidimensionnelle de dimension $g = \dim G$.

(iv) X est semi-normale.

Lorsque X est normale (et donc intègre), on dit que c'est une variété quasi-abélienne.

On utilisera aussi les abréviations v.q.-a.s et v.q.-a. (Bien avant que cette définition ne soit formulée dans [3], Nakamura [16] et Namikawa [18] avaient introduit une notion voisine, mais différente, de variété quasi-abélienne stable ; pour eux, il s'agit des fibres, éventuellement non réduites, d'une certaine famille sur $\overline{\mathrm{A}}_{g,\mathbb{C}}^{\mathrm{Vor}}$.)

Les conditions (ii) et (iii) entraînent que chaque composante irréductible d'une v.q.-a.s est une compactification équivariante de la variété semi-abélienne associée. En particulier, les v.q.-a.s sous une variété abélienne A ne sont autres que les torseurs sous A. Et les v.q.-a sous un tore T ne sont autres que les *variétés toriques*, c.-à-d les variétés normales dans lesquelles T opère avec une orbite ouverte dont le stabilisateur est trivial (les conditions (i) et (ii) sont alors bien connues).

Les v.q.-a.s sous un tore sont appelées *variétés toriques stables*. Des exemples de telles variétés sont les fibres spéciales des dégénérescences maximales construites dans la deuxième partie.

DÉFINITION 3.2. — *Un* couple quasi-abélien stable *est formé d'une v.q.-a.s projective X (sous une variété semi-abélienne G) et d'un diviseur de Cartier D sur X, effectif, ample et ne contenant aucune orbite de G.*

La variété X est dite polarisée *par le fibré en droites $L := \mathcal{O}_X(D)$. On note s la section canonique de L dont le diviseur des zéros est D, si bien que la donnée du couple (X, D) est équivalente à celle du triplet (X, L, s). Le* degré *de ce couple est $h^0(L)$.*

Exemple 3.3. — En particulier, on a la notion de *couple abélien* (X, D) où X est un torseur sous une variété abélienne A, et D est un diviseur effectif et ample sur X.

Les couples abéliens de degré 1 sont en correspondance biunivoque avec les variétés abéliennes principalement polarisées. En effet, à toute v.a.p.p (A, λ) on associe la variété $X := \mathrm{Pic}^{\lambda}(A)$ (vu comme un ensemble de diviseurs de X) et sa sous-variété D formée des diviseurs Θ qui contiennent 0. Alors X est un torseur sous A via l'isomorphisme $\lambda : A \to A^{\vee}$ et l'action de $A^{\vee}$ par translations, et D s'identifie à un diviseur Θ. Réciproquement, à tout couple abélien (X, D) de degré 1, on associe la variété abélienne A sous-jacente à X, munie de la polarisation définie par les translatés de D.

Exemple 3.4. — Toute courbe complète et lisse C de genre g définit un couple abélien de degré 1, formé de la variété $\mathrm{Pic}^{g-1}(C)$ des classes de diviseurs de degré $g - 1$ (un torseur sous $\mathrm{Pic}^0(C)$) et de la sous-variété des classes des diviseurs effectifs.

Plus généralement, à toute courbe complète et nodale C de genre arithmétique g, on associe d'abord la variété semi-abélienne $\mathrm{Pic}^0(C)$ (décrite dans l'exemple 1.2), puis la *jacobienne compactifiée* $\mathrm{Jac}^{g-1}(C)$; c'est l'espace des modules des *faisceaux semi-stables de degré $g - 1$ sur C*, c.-à-d des faisceaux cohérents $\mathcal{F}$ sur C qui sont de rang 1 en chaque point générique et qui vérifient $h^0(\mathcal{F}) = h^1(\mathcal{F})$ et $h^0(\mathcal{G}) \leq h^1(\mathcal{G})$ pour tout sous-faisceau $\mathcal{G}$ (en particulier, un faisceau semi-stable ne contient aucun faisceau gratte-ciel). Le groupe $\mathrm{Pic}^0(C)$ opère dans $\mathrm{Jac}^{g-1}(C)$ par produit tensoriel. Enfin, on note Θ le sous-schéma réduit de $\mathrm{Jac}^{g-1}(C)$ formé des classes des faisceaux $\mathcal{F}$ tels que $h^0(\mathcal{F}) \neq 0$. D'après [20] et [4], le couple $(\mathrm{Jac}^{g-1}(C), \Theta)$ est quasi-abélien stable sous $\mathrm{Pic}^0(C)$; lorsque C est une courbe stable, le degré de ce couple est 1.

On renvoie à [20] pour l'étude détaillée d'une famille de jacobiennes compactifiées $\mathrm{Jac}^{\phi}(C)$ qui contient $\mathrm{Jac}^{g-1}(C)$; chaque $\mathrm{Jac}^{\phi}(C)$ est munie d'une action naturelle de $\mathrm{Pic}^0(C)$ qui en fait une v.q.-a.s [4, Thm.5.1].

Définition 3.5. — *La v.q.-a.s polarisée (X, L) sous G est dite* linéarisée *si L est muni d'une linéarisation pour le tore maximal T de G.*

On rappelle qu'une linéarisation de L est la donnée d'une action de T dans l'espace total de ce fibré en droites, qui relève l'action de T dans X, et qui est linéaire dans les fibres. Puisque X est une variété complète, les linéarisations du fibré trivial s'identifient au groupe des caractères de T ; ce groupe opère donc simplement transitivement dans l'ensemble des linéarisations de L. Rappelons aussi que tout fibré en droites sur une variété normale est linéarisable ; en particulier, toute v.q.-a polarisée est linéarisable.

Exemple 3.6. — Les couples $(\mathcal{X}_s, \mathcal{D}_s)$ du théorème 2.7 sont des couples quasi-abéliens stables ; aucun d'eux n'est linéarisable.

En effet, lorsque X est une variété projective munie d'une action d'un tore T et d'un fibré en droites L ample et T-linéarisé, les sections d'une grande puissance L^n donnent une immersion T-équivariante $i : X \to \mathbb{P}(V)$ où V est un T-module (rationnel, de dimension finie), et $\mathbb{P}(V)$ désigne son projectivisé. Il en résulte que X est recouvert par des ouverts affines et invariants par T ; en particulier, toute courbe de X qui est invariante par T contient au moins deux points fixes. Mais on a vu que $\mathcal{X}_s$ contient un seul point fixe de T_s.

Exemple 3.7. — Rappelons la classification des variétés toriques linéarisées (X, L) sous un tore T : en notant Λ le groupe des caractères de T, et V l'espace vectoriel réel associé à Λ, on a une correspondance biunivoque entre ces variétés et les polytopes convexes P dans V, entiers par rapport au réseau Λ, et d'intérieur non vide.

La classification des couples toriques s'en déduit aisément : pour tout entier $n \geq 0$, le T-module $H^0(X, L^n)$ est somme directe de droites propres dont les poids ne sont autres que les $\lambda \in \Lambda \cap nP$. En particulier, tout $s \in H^0(X, L)$ se décompose en somme de vecteurs propres s_λ. Pour que le diviseur des zéros D de s définisse un couple torique, il faut et il suffit que $s_\lambda \neq 0$ pour chaque sommet λ de P ; en effet, cette condition signifie que s ne s'annule en aucun point fixe de T dans X.

Enfin, les variétés toriques polarisées correspondent aux classes des polytopes convexes entiers modulo les translations entières.

DÉFINITION 3.8. — *Un* morphisme *du couple quasi-abélien stable (X, D) sous G, vers le couple quasi-abélien stable (Y, E) sous H, est la donnée d'un homomorphisme de groupes $f : G \to H$ et d'un morphisme $\varphi : X \to Y$ tels que φ est G-équivariant (pour l'action de G dans Y via f), et $\varphi^*(E) = D$.*

Pour un tel couple (f, φ), le morphisme φ est fini, car D et E sont amples ; lorsque X et Y ont la même dimension, f est une isogénie. On montre que le groupe des automorphismes de tout couple quasi-abélien stable est fini.

Voici des versions schématiques des définitions précédentes :

DÉFINITION 3.9. — *Un* schéma quasi-abélien stable *sur un schéma S est la donnée d'un couple $(\mathcal{G}, \mathcal{X})$ où*

(i) $\mathcal{G}$ est un schéma en groupes semi-abélien sur S.

(ii) $\mathcal{X}$ est un schéma plat, séparé et de type fini sur S, muni d'une action de $\mathcal{G}$.

(iii) Chaque fibre géométrique $\mathcal{X}_{\bar{s}}$ est une v.q.-a.s sous $\mathcal{G}_{\bar{s}}$.

Lorsque le morphisme $\pi : \mathcal{X} \to S$ est propre et que $\mathcal{X}$ est muni d'un diviseur de Cartier effectif et relativement ample $\mathcal{D}$ tel que chaque $(\mathcal{X}_{\bar{s}}, \mathcal{D}_{\bar{s}})$ est un couple quasi-abélien stable, on dit que $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ est un couple quasi-abélien stable *sur S. Un tel couple est* polarisé *par le fibré en droites $\mathcal{L} := \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{D})$; il est dit* de degré d *si $h^0(\mathcal{L}_{\bar{s}}) = d$ pour tout point s.*

Exemple 3.10. — Les couples $(\mathcal{X}, \mathcal{D}) \to S$ du théorème 2.7 sont quasi-abéliens stables de degré 1.

D'autres exemples sont issus des courbes stables $\pi : \mathcal{C} \to S$ de genre g : d'après les résultats de [7, Chap.VIII], il existe en effet un *schéma de Picard relatif* $\mathbf{Pic}^0(\mathcal{C}/S)$ qui est un schéma en groupes semi-abélien ayant pour fibres géométriques les $\mathrm{Pic}^0(\mathcal{C}_{\bar{s}})$. Les jacobiennes compactifiées des fibres géométriques se globalisent aussi en une *jacobienne compactifiée relative* $\mathbf{Jac}^{g-1}(\mathcal{C}/S)$; elle est munie d'une action du schéma en groupes $\mathbf{Pic}^0(\mathcal{C}/S)$ et d'un diviseur $\boldsymbol{\Theta}$ qui définissent un couple quasi-abélien stable de degré 1 [4, Sec.5].

Pour tout couple quasi-abélien stable $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ sur S, le diviseur $\mathcal{D}_{\bar{s}}$ ne contient aucune composante irréductible de $\mathcal{X}_{\bar{s}}$. Il en résulte que $\mathcal{D}$ est plat sur S ; autrement dit, $\mathcal{D}$ est un *diviseur de Cartier relatif.*

On a une notion évidente de morphisme entre couples quasi-abéliens stables ; de plus, tout morphisme entre couples abéliens de même degré sur un même schéma est un isomorphisme. L'exemple 3.3 admet une version schématique [3, Cor.3.0.7] :

Théorème 3.11. — *Les couples abéliens de degré* 1 *forment un champ isomorphe au champ des schémas abéliens principalement polarisés.*

3.2. Variétés quasi-abéliennes stables linéarisées

On se donne une variété semi-abélienne G de tore maximal T et de partie abélienne A. On commence par présenter une construction de v.q.-a.s sous G qui s'avéreront être des modèles locaux des v.q.-a.s linéarisées.

Soit Y une variété torique stable sous T. Ce dernier opère dans $G \times Y$ via $t \cdot (g, y) = (gt^{-1}, t \cdot y)$ et cette action commute à celle de G par multiplication sur le premier facteur. Notons

$$X = G \times^T Y$$

le quotient ; la projection $G \times Y \to G$ passe au quotient en un morphisme $p : X \to A$ qui est une fibration localement triviale de fibre Y. Il en résulte que X est une v.q.-a.s sous G, qu'on appelle l'*induite* de Y.

Proposition 3.12. — *Soit* (X, L) *une v.q.-a.s linéarisée sous* G.

(i) X *est recouvert par des ouverts invariants par* G *et induits de variétés toriques stables affines.*

(ii) L'adhérence de toute orbite de G *dans* X *est normale.*

(iii) Toute composante irréductible de X *est induite d'une variété torique.*

Preuve. Soit Z une orbite fermée de G dans X. Comme X est projective, Z est formée de points fixes de T, d'où $Z \simeq G/T \simeq A$. Comme X ne contient qu'un nombre fini d'orbites, la réunion de ces orbites qui contiennent Z dans leur adhérence est un ouvert invariant par G. En remplaçant X par cet ouvert, on peut donc supposer que Z est l'unique orbite fermée ; c'est l'ensemble des points fixes de T. Pour tout $x \in X$, on a

$Z \subseteq \overline{G \cdot x} = G \cdot \overline{T \cdot x}$ (car G/T est complet), c.-à-d $\overline{T \cdot x}$ rencontre Z en ses points fixes de T. Il en résulte qu'il existe un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbb{G}_m \to T$ (dépendant de x) tel que $\lambda(0) \cdot x \in Z$, c.-à-d le morphisme $\mathbb{G}_m \to X$, $t \mapsto \lambda(t) \cdot x$ s'étend en un morphisme $\mathbb{A}^1 \to X$ qui envoie 0 sur un point de Z.

Puisque X est munie d'un fibré en droites ample et T-linéarisé, elle est isomorphe à une sous-variété localement fermée et invariante par T du projectivisé d'un T-module, $\mathbb{P}(V)$; on peut supposer que Z est contenue dans $\mathbb{P}(V_0)$ où V_0 désigne le sous-espace des points fixes de T. La projection T-invariante $V \to V_0$ donne une application rationnelle $p : \mathbb{P}(V) - \to \mathbb{P}(V_0)$ qui est définie en chaque $x \in X$ et l'envoie sur $\lambda(0) \cdot x$. On vérifie que le morphisme $p : X \to Z$ obtenu ainsi est affine et G-équivariant, ce qui démontre l'assertion (i).

Comme l'assertion (ii) est de nature locale, on peut d'après (i) supposer que $G = T$, d'où X est torique stable et affine. Soit Y l'adhérence d'une orbite de T dans X, et $\nu_Y : \widetilde{Y} \to Y$ la normalisation. Alors $\widetilde{Y}$ est une variété torique affine sous un quotient de T, et ν_Y induit une bijection entre les ensembles de T-orbites dans $\widetilde{Y}$ et dans Y. Grâce à la connexité des stabilisateurs T_y, $y \in Y$, il en résulte que ν_Y induit des isomorphismes entre les corps résiduels. De plus, les ν_Y se recollent en $\nu : \lim \widetilde{Y} \to X$ où lim désigne la limite inductive sur l'ensemble partiellement ordonné des adhérences des orbites. Comme X est semi-normale, ν est un isomorphisme, ce qui entraîne (ii).

Soit X' une composante irréductible de X. En identifiant l'orbite ouverte de X' à G et en notant Y' l'adhérence de T dans X', on obtient un morphisme birationnel propre et G-équivariant $\varphi : G \times^T Y' \to X'$. Montrons que φ est bijectif. Dans le cas contraire, comme la restriction de φ à chaque fibre de $p : G \times^T Y' \to G/T$ est injective, il existe $g \in G \setminus T$ tel que $g \cdot Y'$ rencontre Y'. L'intersection $Y' \cap g \cdot Y'$ contient alors un point fixe x de T. Soient $x = x_1, \ldots, x_n$ les points fixes de T dans Y'. Puisque L est ample et T-linéarisé, les poids de l'action linéaire de T dans les fibres $L_{x_1}, \ldots, L_{x_n}$ sont deux à deux distincts. Puisque G est connexe, ces poids sont constants sur chacune des orbites $G \cdot x_1, \ldots, G \cdot x_n$. On a donc $x_1 = g \cdot x_1$ d'où $g \in T$, ce qui est absurde. Puisque X' est normale, φ est un isomorphisme, ce qui démontre (iii).

Exemple 3.13. — Il existe des v.q.-a.s non induites : soit $G := E \times \mathbb{G}_m$ où E est une courbe elliptique, et soit X_1 la variété obtenue à partir de $E \times \mathbb{P}^1$ en identifiant $E \times \{0\}$ à $E \times \{\infty\}$ via $(x, 0) = (x + e, \infty)$ où e est un point de E distinct de l'origine. On vérifie que X_1 est une variété quasi-abélienne stable sous G, qui n'admet aucun morphisme équivariant vers E.

On construit de même des exemples de v.q.-a.s linéarisées qui ne sont pas induites : soit X_2 la variété obtenue à partir de la réunion disjointe de deux exemplaires de $E \times \mathbb{P}^1$ via les identifications $(x_1, 0) = (x_2, 0)$ et $(x_1, \infty) = (x_2 + e, \infty)$ où e est un point de 2-torsion de E. Alors X_2 est une v.q.-a.s sous G, qui n'admet aucun morphisme équivariant vers E. Mais X_2 est linéarisée par le fibré en droites L obtenu en identifiant deux exemplaires de $M \otimes \mathcal{O}(1)$ où M est un fibré en droites de degré 2 sur E (si bien que $\tau_e^*(M) \simeq M$).

On va déduire de la proposition 3.12 un résultat de structure des v.q.-a linéarisées. Fixons les notations : soient $\pi : G \to G/T = A$ la projection, Λ le groupe des caractères de T, $V = \Lambda \otimes \mathbb{R}$, et L_λ, $\lambda \in \Lambda$ les fibrés en droites sur A tels que $\pi_*(\mathcal{O}_G) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$.

Proposition 3.14. — *Soit (X, L) une v.q.-a linéarisée.*

(i) Il existe un unique polytope convexe entier P d'intérieur non vide dans V, et un unique fibré en droites ample M sur A tels que

$$X \simeq \mathrm{Proj}_A \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \cap nP} M^n \otimes L_\lambda \quad \textit{et} \quad L \simeq \mathcal{O}(1). \tag{6}$$

Toute adhérence d'une orbite de G dans X s'obtient en remplaçant P par une face F dans (6), et ceci définit une bijection croissante entre adhérences d'orbites et faces.

(ii) On a $H^i(X, L^n) = 0$ pour tous $i \geq 1$ et $n \geq 1$, et

$$H^0(X, L^n) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \cap nP} H^0(A, M^n \otimes L_\lambda)$$

pour tout $n \geq 0$.

(iii) Soit D le diviseur des zéros de $s \in H^0(X, L)$. Ecrivons $s = \sum_{\lambda \in \Lambda \cap P} s_\lambda$ où $s_\lambda \in H^0(A, M \otimes L_\lambda)$. Pour que D ne contienne aucune orbite de G dans X, il faut et il suffit que $s_\lambda \neq 0$ pour tout sommet λ de P.

Preuve. D'après la proposition 3.12, $X \simeq G \times^T Y$ où Y est une variété torique projective sous T ; on note $p : X \to A$ la projection. Et d'après les résultats rappelés dans l'exemple 3.7, il existe un unique polytope convexe entier P dans V, d'intérieur non vide, tel que

$$H^0(Y, L^n) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \cap nP} k_\lambda$$

comme T-modules, où k_λ désigne le T-module de dimension 1 et de poids λ. De plus, $H^i(Y, L^n) = 0$ pour tous $i \geq 1$ et $n \geq 0$. D'après le théorème de cohomologie et changement de base, ceci entraîne la décomposition en espaces propres de T

$$p_*(L^n) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \cap nP} L_{n,\lambda}$$

où chaque $L_{n,\lambda}$ est un fibré en droites sur A, ainsi que l'annulation des $R^i p_*(L^n)$ lorsque $i \geq 1$ et $n \geq 0$. La multiplication de l'algèbre $\bigoplus_{n=0}^{\infty} p_*(L^n)$ se restreint en des isomorphismes

$$L_{n,\lambda} \otimes L_{p,\mu} \simeq L_{n+p,\lambda+\mu}.$$

Il existe donc des fibrés en droites $L_{0,\lambda}$ ($\lambda \in \Lambda$) et $L_{1,0}$ sur A, tels que $L_{n,\lambda} \simeq L_{1,0}^n \otimes L_{0,\lambda}$ chaque fois que $\lambda \in nP$. En considérant les restrictions à l'orbite ouverte $G \simeq G \times^T T$, on obtient des isomorphismes $L_{0,\lambda} \simeq L_\lambda$. D'où, en posant $M := L_{1,0}$:

$$H^i(X, L^n) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \cap nP} H^i(A, M^n \otimes L_\lambda)$$

pour tout $i \geq 0$. Comme L est ample et chaque L_λ est algébriquement trivial, on en déduit que M est gros (c.-à-d $h^0(M^n)$ croît comme n^g) ; et comme A est une variété abélienne, il en résulte que M est ample. Ceci entraîne les autres assertions.

Ainsi, les v.q.-a linéarisées (X, L) (sous une variété semi-abélienne G non spécifiée) sont classifiées par les quadruplets

$$(A, c, [M], P)$$

où A est une variété abélienne, $c : \Lambda \to A^\vee$ est l'homomorphisme associé à l'extension $1 \to T \to G \to A \to 0$, $[M] \in \mathrm{Pic}(A)$ est une classe ample, et P est un polytope convexe entier dans V, d'intérieur non vide. Les adhérences des orbites de G dans X sont en bijection croissante avec les faces de P.

Plus généralement, à toute v.q.-a.s linéarisée (X, L) on associe la famille $\Delta(X, L)$ des polytopes associés aux adhérences de ses orbites sous G. Grâce aux propositions 3.12 et 3.14, $\Delta(X, L)$ vérifie les conditions de la

Définition 3.15. — *Un* complexe de polytopes convexes entiers *au-dessus de V est un espace topologique $|\Delta|$ muni d'un recouvrement Δ par des fermés, et d'une* application de référence $\rho : |\Delta| \to V$ *telles que :*

(i) La restriction de ρ à chaque $P \in \Delta$ est un homéomorphisme de P sur un polytope convexe entier dans V.

(ii) Toute face d'un $P \in \Delta$ appartient à Δ.

(iii) Pour tous $P, Q \in \Delta$, l'intersection $P \cap Q$ (considérée dans $|\Delta|$) est une réunion de faces de P et de Q.

Définition 3.16. — *Le complexe (fini) $\Delta(X, L)$ est le* type *de la v.q.-a.s linéarisée (X, L).*

L'application de référence n'est pas nécessairement injective : pour la v.q.-a.s linéarisée (X_2, L) de l'exemple 3.8, le type est formé de deux intervalles $[0, 1]$ recollés en leurs extrémités.

3.3. Linéarisation de l'action d'un tore

Dans la deuxième partie, on a construit des exemples de variétés complètes X munies d'une action d'un tore T et d'un fibré en droites ample L, telles que L n'est pas T-linéarisable mais le devient après un revêtement infini étale dont le groupe est celui des caractères de T. En fait, ce phénomène est bien plus général, comme le montrent les résultats de [3, Sec.4] qu'on va présenter brièvement.

Soit X une variété complète. Le foncteur contravariant qui à tout schéma S associe le groupe $\mathrm{Pic}(X \times S)/p_2^* \mathrm{Pic}(S)$ est représentable par un schéma en groupes $\mathbf{Pic}(X)$, localement de type fini sur $\mathrm{Spec}\, k$. La composante neutre $\mathbf{Pic}^0(X)$ est un schéma en groupes de type fini ; son sous-schéma réduit $\mathbf{Pic}^0(X)_{\mathrm{red}}$ est un groupe algébrique commutatif qu'on peut identifier au groupe $\mathrm{Pic}^0(X)$ des classes d'isomorphie des fibrés en droites algébriquement triviaux.

Proposition 3.17. — *Lorsque X est semi-normale, tout morphisme $\mathbb{A}^1 \to \mathbf{Pic}(X)$ est constant. De plus,* $\mathrm{Pic}^0(X)$ *est une variété semi-abélienne.*

Preuve. La première assertion se déduit de l'isomorphisme $\mathrm{Pic}(X \times \mathbb{A}^1) \simeq p_1^* \mathrm{Pic}(X)$ vérifié pour toute variété semi-normale X (voir [24, Thm.3.6] pour le cas affine, et [3, Lem.4.1.10] pour le cas général).

D'après un théorème de Chevalley, le groupe algébrique connexe $\mathrm{Pic}^0(X)$ est extension d'une variété abélienne par un groupe algébrique linéaire connexe G, qui est ici commutatif. Mais on a vu que G ne contient aucun sous-groupe fermé isomorphe au groupe additif $\mathbb{G}_a$, donc G est un tore.

(Dans cet énoncé, l'hypothèse de semi-normalité est essentielle comme le montre l'exemple de la cubique plane cuspidale munie de l'action du groupe additif.)

Soit G un groupe algébrique opérant dans la variété complète X. Pour tout fibré en droites L sur X, on dispose d'un *morphisme de polarisation*

$$\lambda_L : G \to \mathbf{Pic}(X), \quad g \mapsto [L^{-1} \otimes g^*(L)].$$

C'est un morphisme de schémas, qui est constant si L admet une G-linéarisation. Lorsque G est connexe et réduit, l'image de λ_L est contenue dans $\mathrm{Pic}^0(X)$.

Proposition 3.18. — *(i) Lorsque X est munie d'une action d'une variété semi-abélienne G, le morphisme de polarisation λ_L est un homomorphisme de groupes pour tout fibré en droites L sur X. Autrement dit, le théorème du carré est vérifié pour l'action naturelle de G dans* $\mathbf{Pic}(X)$*.*

(ii) Étant donné un tore T de groupe des caractères Λ, on a une correspondance biunivoque entre les homomorphismes $T \to$ $\mathbf{Pic}(X)$ *et les classes d'isomorphie des Λ-torseurs sur X, c.-à-d des schémas $\widetilde{X}$ munis d'une action propre de Λ telle que $\widetilde{X}/\Lambda \simeq X$.*

Preuve. (i) Pour tout entier $m \geq 1$, soit ${}_m\mathrm{Pic}^0(X)$ le noyau (ensembliste) de l'endomorphisme $[L] \mapsto [L^m]$ du groupe $\mathrm{Pic}^0(X)$. Les ${}_m\mathrm{Pic}^0(X)$ forment une suite croissante de sous-groupes finis dont la réunion est dense dans $\mathrm{Pic}^0(X)$. L'action naturelle de G dans $\mathbf{Pic}(X)$ préserve chaque ${}_m\mathrm{Pic}^0(X)$; puisque G est connexe, il opère trivialement dans chaque ${}_m\mathrm{Pic}^0(X)$ et donc dans $\mathrm{Pic}^0(X)$. Ceci entraîne l'isomorphisme

$$g_1^*(L^{-1} \otimes g_2^*(L)) \simeq L^{-1} \otimes g_2^*(L)$$

pour tous $g_1, g_2 \in G$, et donc le théorème du carré.

(ii) s'obtient en adaptant celle de l'énoncé analogue pour les homomorphismes d'un schéma en groupes finis vers $\mathbf{Pic}(X)$ [23, Prop.6.2.1].

Dans [3, Sec.4.1,4.2], la proposition 3.18 est généralisée aux schémas $\pi : \mathcal{X} \to S$ propres, plats et à fibres géométriques connexes et semi-normales. Cette généralisation permet d'établir un résultat clé [3, Thm.4.3] :

THÉORÈME 3.19. — *Étant donné un tore scindé T sur un schéma S, de groupe des caractères Λ, on a une équivalence de catégories entre :*

(a) Les couples $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$, où

(i) $\mathcal{X}$ est un schéma propre sur S, à fibres géométriquement connexes, réduites et semi-normales, muni d'une action de T.

(ii) $\mathcal{L}$ est un fibré en droites relativement ample sur $\mathcal{X}$.

(b) Les couples $(\widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{L}})$, où

(i) $\widetilde{\mathcal{X}}$ est un schéma localement de type fini sur S, à fibres géométriquement réduites et semi-normales, muni d'une action de $T \times \Lambda$.

(ii) $\widetilde{\mathcal{L}}$ est un fibré en droites relativement ample sur $\widetilde{\mathcal{X}}$, muni d'actions de T et de Λ qui relèvent leurs actions dans $\widetilde{\mathcal{X}}$.

(iii) Λ opère proprement dans $\widetilde{\mathcal{X}}$ et le quotient $\widetilde{\mathcal{X}}/\Lambda$ est propre sur S, à fibres géométriquement connexes.

(iv) Pour les actions de T et Λ dans $\widetilde{\mathcal{L}}$, on a la relation de commutation $t \circ \lambda = \lambda(t) \lambda \circ t$ pour tout point fonctoriel t de T et tout $\lambda \in \Lambda$.

Lorsque S est connexe, les composantes connexes de $\widetilde{\mathcal{X}}$ sont paramétrées par le groupe des caractères du noyau de l'homomorphisme de polarisation $\lambda_L : T \to \mathbf{Pic}(\mathcal{X}/S)$.

En particulier, à toute v.q.-a.s polarisée (X, L) sous la variété semi-abélienne G de tore maximal T, on associe un revêtement étale infini $\pi : \widetilde{X} \to X$ de groupe Λ, où $\widetilde{X}$ est un schéma localement de type fini muni d'une action de G qui relève l'action dans X et commute à celle de Λ. Par suite, $\widetilde{X}$ est semi-normale et toute réunion finie de ses composantes irréductibles est une v.q.-a.s linéarisée relativement au fibré en droites linéarisé $\widetilde{L} := \pi^*(L)$. À l'aide des propositions 3.12 et 3.14, on peut donc définir le *type*

$$\widetilde{\Delta} := \Delta(\widetilde{X}, \widetilde{L}).$$

C'est un complexe *localement fini* de polytopes convexes entiers, muni d'une action de Λ telle que l'application de référence $\widetilde{\rho} : |\widetilde{\Delta}| \to V$ est équivariante pour l'action de Λ par translations sur V. Le quotient $\Delta := \widetilde{\Delta}/\Lambda$ peut être vu comme un complexe de polytopes convexes entiers muni d'une application de référence à valeurs dans le tore réel V/Λ.

Passons en revue quelques classes d'exemples, en commençant par les plus simples.

Exemple 3.20. — Les couples abéliens sont ceux dont le type est un point.

Exemple 3.21. — Lorsque le fibré en droites L est linéarisé, le schéma $\widetilde{X}$ est réunion disjointe d'exemplaires de X notés X_λ, $\lambda \in \Lambda$. L'action de chaque $\lambda \in \Lambda$ dans $\widetilde{X}$ est donnée par les identifications $X_\mu \to X_{\lambda+\mu}$. La restriction à X_λ du fibré en droites $\widetilde{L}$ est le fibré L muni de sa linéarisation tordue par le caractère λ.

Exemple 3.22. — Pour la dégénérescence maximale $(\mathcal{X}_s, \mathcal{L}_s)$ du théorème 2.7, l'espace topologique $|\widetilde{\Delta}|$ est identifié à V par l'application de référence, qui identifie $\widetilde{\Delta}$ à la décomposition de Delaunay Del_Q.

Exemple 3.23. — On va décrire le type du couple $(\mathrm{Jac}^{g-1}(C), \Theta)$ associé dans l'exemple 3.4 à une courbe complète et nodale C de genre arithmétique g. Avec les notations de cet exemple et de l'exemple 1.2, on obtient $\Lambda = H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \subseteq C_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^d$, d'où $V = H_1(\Gamma, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^d$. D'après [4, Sec.2], on a encore $|\widetilde{\Delta}| \simeq V$ via l'application de référence, et $\widetilde{\Delta}$ n'est autre que la décomposition de Delaunay de V relative à la restriction de la forme quadratique standard sur $\mathbb{R}^d$. Ainsi, le type est la trace sur V du pavage entier de $\mathbb{R}^d$ en "cubes" découpés par les hyperplans de coordonnées et leurs translatés entiers.

Ces deux derniers exemples motivent la

Définition 3.24. — *Le type $\widetilde{\Delta}$ d'une v.q.-a.s polarisée est dit* périodique de degré 1 *si son application de référence est un homéomorphisme qui identifie $\widetilde{\Delta}$ à un pavage périodique de V par des polytopes convexes entiers (au sens défini en 2.1).*

En particulier, pour une v.q.-a.s polarisée (X, L) dont le type $\widetilde{\Delta}$ est périodique de degré 1, l'ensemble des sommets des polytopes de $\widetilde{\Delta}$ n'est autre que Λ. Autrement dit, X contient une unique orbite fermée de G, qui est alors un A-torseur.

3.4. Espaces des modules de couples stables

La classification des variétés et des couples quasi-abéliens stables peut se déduire des résultats de 3.2 et 3.3 : grâce au théorème 3.19, on se ramène au cas linéarisé, où les objets considérés s'obtiennent par recollement de fermés irréductibles qu'on a déterminés dans la proposition 3.14(i). On ne détaille pas ici cette classification, pour laquelle on renvoie à [3, Sec.1.2], mais on en énonce deux conséquences importantes :

Proposition 3.25. — *Pour toute v.q.-a.s polarisée (X, L), on a $H^i(X, L^n) = 0$ lorsque $i \geq 1$ et $n \geq 1$.*

Pour une v.q.-a linéarisée, c'est la proposition 3.14(ii) ; le cas général en est déduit dans [3, Thm.2.5.1,Thm.5.4.1].

Il en résulte que pour tout couple quasi-abélien stable $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ sur S, le degré de $(\mathcal{X}_{\bar{s}}, \mathcal{D}_{\bar{s}})$ est constant sur chaque composante connexe de S.

Théorème 3.26. — *Soit $(\mathcal{X}_\eta, \mathcal{D}_\eta)$ un couple quasi-abélien stable sur le point générique d'un trait S. Alors, quitte à faire un changement de base fini ramifié, on peut étendre $(\mathcal{X}_\eta, \mathcal{D}_\eta)$ en un couple quasi-abélien stable $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ sur S ; une telle extension est unique à isomorphisme près. Lorsque le type de $(\mathcal{X}_\eta, \mathcal{D}_\eta)$ est périodique de degré 1, il en est de même du type de la fibre spéciale.*

Cet analogue du théorème de réduction semi-stable est d'abord établi pour les couples toriques stables [3, Sec.2.8]. Le cas général est déduit dans [3, Sec.5.7] du cas torique stable et de la construction de dégénérescences des couples abéliens obtenue dans [5] (voir le théorème 2.7 pour les dégénérescences maximales).

Le théorème 3.26 est l'un des principaux ingrédients dans la preuve du résultat principal de ce texte [3, Sec.1.2.H] :

THÉORÈME 3.27. — *(i) Les couples quasi-abéliens stables de dimension g et de type périodique de degré* 1 *forment un champ algébrique propre $\overline{\mathcal{A}_g}^{\mathrm{mod}}$ dont le morphisme diagonal est fini. Les couples de type fixé forment un sous-champ localement fermé.*

(ii) Le champ $\overline{\mathcal{A}_g}^{\mathrm{mod}}$ admet un espace des modules grossier $\overline{\mathrm{A}_g}^{\mathrm{mod}}$. C'est un espace algébrique propre muni d'une stratification par le type, indexée par les classes d'isomorphie des pavages périodiques des $\mathbb{R}^r$, $r = 0, 1, \ldots, g$, par des polytopes convexes entiers.

(iii) La strate de $\overline{\mathrm{A}_g}^{\mathrm{mod}}$ associée à $r = 0$ n'est autre que A_g ; son adhérence dans $\overline{\mathrm{A}_g}^{\mathrm{mod}}$ en est une composante irréductible dite principale*, dont la normalisation est la compactification toroïdale $\overline{\mathrm{A}_g}^{\mathrm{Vor}}$ associée à la deuxième subdivision de Voronoi (voir 1.4).*

Indiquons les grandes lignes de la démonstration. On commence par obtenir un résultat similaire pour les couples toriques stables linéarisés dont le type est une subdivision d'un polytope convexe entier donné ; dans ce cas, on construit directement le champ des modules par des méthodes de géométrie torique [3, Sec.2]. Ces méthodes ne se transposent pas telles quelles au cas périodique de degré 1, mais elles permettent de décrire les déformations infinitésimales des couples stables (car tout schéma semi-abélien sur un anneau local artinien est extension d'un schéma abélien par un tore). L'algébricité du champ $\overline{\mathcal{A}_g}^{\mathrm{mod}}$ se déduit alors d'un critère d'Artin [12, Thm.10.10]. Et sa propreté résulte du critère valuatif et du théorème 3.26 ; l'existence de son espace des modules grossier s'obtient en appliquant le résultat principal de [10].

Remarque 3.28. — L'énoncé (iii) ci-dessus apparaît dans [3, Thm.5.11.6] sous une forme beaucoup plus simple : la composante principale de $\overline{\mathrm{A}_g}^{\mathrm{mod}}$ est isomorphe à $\overline{\mathrm{A}_g}^{\mathrm{Vor}}$. Mais la preuve de ce résultat, qui équivaut bien sûr à la normalité de la composante principale, n'est pas tout à fait complète.

Le théorème 3.27 et les propriétés des jacobiennes compactifiées relatives énoncées dans l'exemple 3.10 entraînent aussitôt l'existence d'une version modulaire du morphisme $\bar{\mathfrak{t}}_{\mathbb{C}} : \overline{\mathrm{M}}_{g,\mathbb{C}} \to \overline{\mathrm{A}}_{g,\mathbb{C}}^{\mathrm{Vor}}$.

THÉORÈME 3.29. — *En associant à toute courbe stable $\pi : \mathcal{C} \to S$ de genre g le couple quasi-abélien stable $(\mathbf{Jac}^{g-1}(\mathcal{C}/S), \mathbf{\Theta}) \to S$, on définit un morphisme de Torelli compactifié*

$$\bar{\mathfrak{t}} : \overline{\mathrm{M}}_g \to \overline{\mathrm{A}_g}^{\mathrm{mod}}$$

dont l'image est contenue dans la composante principale.

Remarque 3.30. — Rappelons que les strates de $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{Vor}}$ sont paramétrées par les classes d'isomorphie des décompositions de Delaunay des $\mathbb{R}^r$ où $r = 0, 1, \ldots, g$. On montre que lorsque $g \leq 3$, tout pavage périodique de $\mathbb{R}^g$ par des polytopes convexes entiers est une décomposition de Delaunay, mais qu'il n'en est plus ainsi dès que $g \geq 4$; dans ce dernier cas, il en résulte que $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$ admet des composantes irréductibles autres que la composante principale.

Ces composantes sont analysées plus en détail dans [2] à l'aide d'une formule calculant la dimension de la strate associée à un type donné. Il y est montré en particulier que $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$ est irréductible lorsque $g \leq 3$, mais que la dimension de $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$ croît au moins comme 2^g, bien plus vite que la dimension $g(g+1)/2$ de la composante principale.

Ainsi, $\overline{\mathrm{A}}_g$ est loin d'être dense dans $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$ lorsque g est grand. En fait, il n'est pas rare qu'une compactification modulaire d'un espace de paramètres introduise de nouvelles composantes irréductibles ; c'est le cas, par exemple, du schéma de Hilbert ponctuel $X^{[n]}$ qui compactifie les n-uplets de points non ordonnés, deux à deux distincts, d'une variété X de dimension au moins 3.

Remarque 3.31. — Les résultats de [3] concernent, plus généralement, les couples abéliens stables de dimension g et degré d arbitraire ; on y montre qu'ils admettent un espace des modules grossier, noté $\mathrm{AP}_{g,d}$. En associant à chaque couple la variété abélienne polarisée sous-jacente, on définit un morphisme

$$\mathrm{AP}_{g,d} \to \mathrm{A}_{g,d}$$

qui est projectif de dimension relative $d-1$; ici $\mathrm{A}_{g,d}$ désigne l'espace des modules grossier des variétés abéliennes de dimension g munies d'une polarisation de degré d. Et $\mathrm{AP}_{g,d}$ admet aussi une compactification modulaire $\overline{\mathrm{AP}}_{g,d}^{\mathrm{mod}}$ paramétrant les couples quasi-abéliens stables dont le type est *périodique de degré* d, c.-à-d possède exactement d composantes connexes, chacune étant identifiée par l'application de référence à un pavage de V, périodique pour un sous-groupe d'indice d de Λ.

Cependant, la construction d'une compactification modulaire de $\mathrm{A}_{g,d}$ nécessite d'autres idées lorsque $d \geq 2$, voir [21].

De même, on dispose d'espaces des modules grossiers $\mathrm{A}_{g,d,n}$ qui paramètrent les variétés abéliennes de dimension g munies d'une polarisation de degré d et d'une *structure de niveau* n, c.-à-d d'un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ sur leur sous-groupe de n-torsion. Lorsque $n \geq 3$, il s'agit même d'espaces des modules fins (voir [15]).

Mais on ne connaît pas de compactification des espaces $\mathrm{A}_{g,d,n}$ qui soit modulaire au sens du théorème 3.27 (voir cependant [18, 17] pour des compactifications de certains $\mathrm{A}_{g,d,n}$, modulaires en un sens plus faible). On ignore aussi comment définir des structures de niveau n pour les couples quasi-abéliens stables.

RÉFÉRENCES

[1] V. ALEXEEV – *Log canonical singularities and complete moduli of stable pairs.* arXiv : alg-geom/9608013.

[2] V. ALEXEEV – *On extra components in the functorial compactification of A_g.* Moduli of abelian varieties (Texel Island, 1999), 1–9, Birkhäuser, Basel, 2001.

[3] V. ALEXEEV – *Complete moduli in the presence of semiabelian group action.* Ann. Math. **155** (2002), 611–708.

[4] V. ALEXEEV – *Compactified Jacobians and Torelli map.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40** (2004), no. 4, 1241–1265.

[5] V. ALEXEEV, I. NAKAMURA – *On Mumford's construction of degenerating abelian varieties.* Tohoku Math. J. **51** (1999), 399–420.

[6] A. ASH, D. MUMFORD, M. RAPOPORT, Y. TAI – *Smooth compactification of locally symmetric varieties.* Math Sci Press, Brookline, 1975.

[7] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD – *Néron models.* Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[8] G. FALTINGS, C.-L. CHAI – *Degeneration of Abelian Varieties.* Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[9] R. HARTSHORNE – *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[10] S. KEEL, S. MORI – *Quotients by groupoids.* Ann. Math. **145** (1997), 193–213.

[11] J. KOLLAR, N. I. SHEPHERD–BARRON, *Threefolds and deformations of surface singularities.* Invent. Math. **91** (1988), 299–338.

[12] G. LAUMON, L. MORET–BAILLY – *Champs algébriques.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[13] D. MUMFORD – *Abelian Varieties.* Oxford University Press, Oxford, 1970.

[14] D. MUMFORD – *An analytic construction of degenerate abelian varieties over complete rings.* Compos. Math. **24** (1972), 239–272.

[15] D. MUMFORD, J. FOGARTY, F. KIRWAN – *Geometric Invariant Theory.* Third edition. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[16] I. NAKAMURA – *On moduli of stable quasi abelian varieties.* Nagoya Math. J. **58** (1975), 149–214.

[17] I. NAKAMURA – *Stability of degenerate abelian varieties.* Invent. Math. **136** (1999), 659–715.

[18] Y. NAMIKAWA – *A new compactification of Siegel spaces and degenerations of abelian varieties I, II.* Math. Ann. **221** (1976), 97–141, 201–241.

[19] Y. NAMIKAWA – *Toroidal Compactification of Siegel Spaces.* Lecture Notes in Math. **812**, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[20] T. ODA, C. S. SESHADRI – *Compactifications of the generalized jacobian variety.* Trans. Amer. Math. Soc. **253** (1979), 1–90.

[21] M. C. OLSSON – *Canonical compactifications of moduli spaces for abelian varieties.* http://www.ma.utexas.edu/~molsson/

[22] M. RAYNAUD – *Spécialisation du foncteur de Picard.* Publ. Math. IHÉS **38** (1970), 27–76.

[23] M. RAYNAUD – *Compactification du module des courbes.* Séminaire Bourbaki (23ème année, 1970/1971), Exp. No. 385, pp. 47–61. Lecture Notes in Math. **244**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[24] C. TRAVERSO – *Seminormality and Picard group.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **24** (1970), 585–595.

Michel BRION

Université Grenoble I
Institut Joseph Fourier
UMR 5582 du CNRS
B.P. 74
F–38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
E-mail : `Michel.Brion@ujf-grenoble.fr`